

下端を鉛直方向に高周波加振された片持ち梁の座屈

山下 清隆*, 和田 翔**

Buckling of a cantilevered beam subjected to high frequency base excitation

Kiyotaka Yamashita and Shou Wada

A buckling of a cantilevered beam subjected to high frequency base excitation has been investigated. The effects of high frequency excitation on the buckled beam dynamics was discussed with a complex amplitude equation from the viewpoint of nonlinear dynamics theory. It was clarified theoretically that a high frequency excitation had a stabilization effect on the buckling of a beam. Typical features of a buckled beam also have confirmed experimentally.

1. はじめに

両端単純支持された梁の両端に圧縮荷重が作用した場合, その荷重が一定値を超えると梁が座屈することはよく知られている[1]. この座屈が発生する荷重の境界値を以降, 臨界荷重と呼ぶ. 臨界荷重は圧縮荷重が梁の復元力と等しくなった場合の圧縮荷重に相当する. 一方, 上端が自由で下端が固定された片持ち梁を考えると, 梁の自重が梁の復元力を上回ると同様に座屈が発生することは容易に予想される.

この事を簡単に整理する目的から図 1 に示すような振り子とばねからなる系を考える. ここで m および l は振り子先端の集中質量および振り子の長さである. 振り子と y 軸のなす角 θ の線形化された無次元運動方程式は以下ようになる.

$$\ddot{\theta} + (1 - \alpha)\theta = 0 \quad (1)$$

ここで無次元パラメータ α は, ばね力と重力の比 $\alpha = mg/\kappa l$ である. α が 1 より小さければ θ は単振動する. α が 1 を越えると θ の静的平衡状態が不安定となる. 式(1)の復元力 $-(1 - \alpha)\theta$ のポテンシャル U を求めると

$$U = \frac{1}{2}(1 - \alpha)\theta^2 \quad (2)$$

を得る. 式(2)に基づきポテンシャルを図 2 に示す.

同図より, α が 1 より小さい時にはポテンシャルは谷となり, α が 1 より大きいと尾根となる. すなわち振り子の静止状態は $\alpha < 1$ のとき安定, $\alpha > 1$ のとき不安定となる. すなわち ポテンシャル場と静止状態の安定性は, 図2に示すように関係している.

* 機械工学科 **機械工学科学生

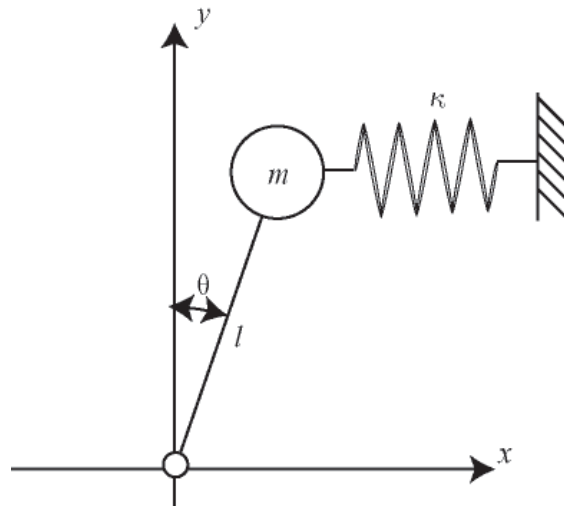


図1 ばね支持された振り子

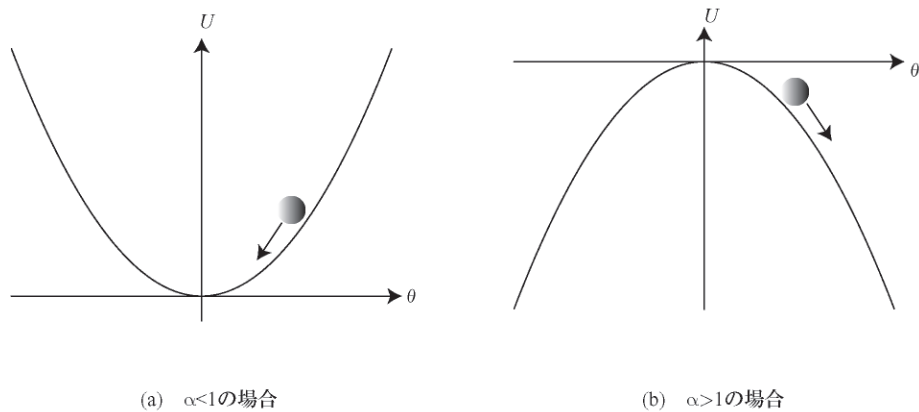


図2 ポテンシャル場

このような中、古くは L.D.ランダウの物理学教程[2]において、急激に振動する外力がポテンシャル場に作用すると元のポテンシャル場に変化を及ぼすことが述べられている。すなわち不安定な場にこのような急激に振動する外力が加えられた場合、系が安定化する可能性がある。近年では藪野らにより、倒立振り子の安定化あるいは圧縮荷重を受ける梁の座屈の安定化などに与える高周波加振の影響が幾何学的力学系理論を用いて調べられている[3]。また、その安定化に注目するのみならず、現象の非線形安定性に影響を及ぼすことが分岐理論の立場から述べられている。

本研究は、このような中で上端自由で下端が固定された片持ち梁に生じる座屈を取り上げる。そしてこの座屈に与える下端高周波加振の影響について理論的および実験的にアプローチした。すなわち理論的に座屈が安定化しうることを示す一方で座屈について実験的にその発生を確認した。

2. 解析モデル

図3に示すような上端自由下端固定支持された梁の横振動を考える．梁の下端は鉛直方向に $x_0(t)$ で加振される．梁の中立軸に沿った座標 s を取り，中立軸は伸びないと仮定する．梁の曲げ剛性を EI ，梁の単位長さ当たりの質量を m ，梁の全長を l とする． s での梁の横変位を w とし， w は梁の全長に比べ十分小さいが有限の大きさを有するものとする．以上の仮定の元に，梁の横変位 w についてその3乗までを考慮した無次元の運動方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} & \ddot{w} + (\gamma + \ddot{x}_0) [w'(1-s)]' + w'''' + c\dot{w} \\ &= -w' \int_0^s \dot{w}'^2 ds - w' \int_0^s w' \ddot{w}' ds + \frac{1}{2} \ddot{w} w'^2 + w'' \int_s^1 \int_0^s \dot{w}'^2 ds ds \\ &+ w'' \int_s^1 \int_0^s w' \ddot{w}' ds ds - w'' \int_s^1 \ddot{w} w' ds + \frac{1}{2} w''^2 w'' - \frac{3}{2} w''^3 \\ &- 3w' w'' w''' - \frac{1}{2} w'''' w'^2 - \frac{\gamma}{2} (1-s) w'' w'^2 + \frac{1}{2} \gamma w'' \int_s^1 w'^2 ds \end{aligned} \quad (3)$$

ここで左辺は第一項より，慣性力，重力と下端加振の影響を含む項，曲げによる復元力，空気減衰項からなる．右辺は， w について，3乗の非線形項を表わしており，重力，曲げによる復元力，慣性力の幾何学的非線形項である．境界条件も同様に， w を用いて記述され， $s=0$ で固定， $s=1$ で自由な条件より以下ようになる．右辺は式(3)と同様に w について3乗の非線形性までを考慮した．

$$s=0: w=0, w'=0$$

$$s=1: w'' = -\frac{1}{2} w'' w'^2$$

$$w''' = -\frac{1}{2} w''' w'^2 - w'' w' \quad (4)$$

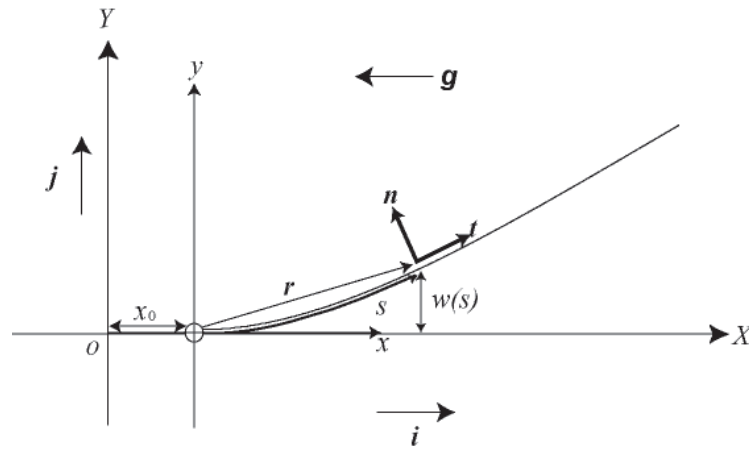


図3 解析モデル

式(3)～式(4)に含まれる無次元パラメータは弾性力と重力の比 $\gamma = mgl^3/EI$ および無次元外部減衰係数 c である．

運動方程式系において下端鉛直加振の影響は式(3)の x_0 の2階微分として現れ、見掛け上無次元の重力加速度 γ を修正する効果を持つ。また外部減衰係数 c は1に比べ小さく、そのため外部減衰に関する3乗の非線形項を無視した。

3. 線形安定性

式(3)および式(4)において鉛直加振の影響および w に関して3乗の非線形項を無視し、 $w=A\Phi(s)e^{\lambda t}$ として固有値問題へと帰着させた。ここで固有値 λ は、以下のように表記した。

$$\lambda = -\omega_i + i\omega_r \quad (5)$$

ここで ω_i および ω_r は、各モードの減衰係数および固有振動数に対応している。図4に γ の増加に伴う1次の固有振動数 ω_r および減衰係数 ω_i の変化を示す。

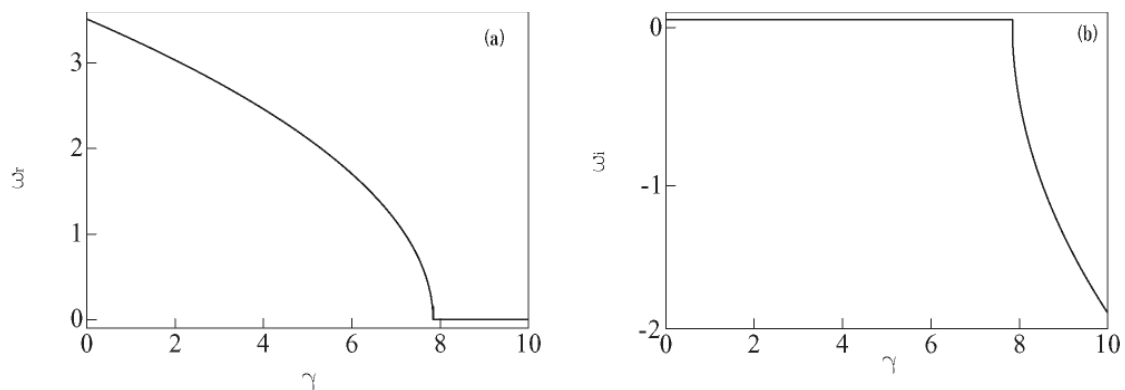


図4 γ と1次の固有値の関係

図4(a)より、 γ が増加するに伴い1次の固有振動数が低下し、やがて7.9を越えるとゼロとなる。これは γ が大きくなると梁の復元力に比べ重力の効果が支配的となるためであり、図1に示す解析モデルで示した式(1)と同様な結果である。また図4(b)に示すように γ が7.9を越えると外部減衰のため正であった減衰係数が負となり、座屈が生じる。本研究では、1次のモードが座屈する $\gamma=7.9$ 近傍での動的挙動に着目する。本研究で対象とする1次の固有モードが座屈する近傍では、他のモードの減衰係数は負であり、それらのモードに関しての微小外乱は時間と共に減衰する。

またここで行った線形解析より、各モードの固有関数 $\Phi(s)$ が求まる。式(3)および式(4)の固有関数 $\Phi(s)$ には以下に示すような直交性が存在している。添え字の n および m はモードの次数を表わしている。また $\Phi_1(s)$ と $\Phi_1(s)$ 間の内積を1になるように $\Phi_1(s)$ の大きさを定めた。

$$\int_0^1 \Phi_n(s) \Phi_m(s) ds = 0 \quad n \neq m \quad (6)$$

4. 非線形解析

式(3)および式(4)で表わされる梁の運動が、前節で求めた固有関数の和で記述され得ると考え以下のように記述する。

$$w = A_1(t)\Phi_1(s) + A_2(t)\Phi_2(s) + A_3(t)\Phi_3(s) + \dots \quad (7)$$

式(3)および式(4)において下端が加振された場合($x_0 = \varepsilon \cos \nu t$)を考える．式(3)に式(9)を代入し式(8)を用いて A_1 に関する方程式を誘導すると

$$\ddot{A}_1 + c\dot{A}_1 - (\lambda_1^2 + \varepsilon \nu^2 \xi_2 \cos \nu t)A_1 = \xi_1 A_1^3 \quad (8)$$

を得る．この際，他のモードは減衰係数が正のため時間とともにその外乱が減衰すると考え，他のモード間の相互作用を捨象した．ここで ξ_1 および ξ_2 は固有関数を用いて記述される無次元パラメータ γ および c の関数である．

5. 数値計算例

5.1 鉛直加振が無い場合

ここでは先ず鉛直加振が無い場合($\varepsilon=0$)を考える．鉛直加振が無い場合の式(8)の定常解 A_{1s} を求め，その安定性を議論した．式(8)で $dA_{1s}/dt=0$ として定常解を定めると

$$A_{1s} = \pm \sqrt{\frac{\xi_1}{\lambda_1^2}} \quad (9)$$

となる．

図5に γ の変化に伴う梁の上端($s=1$)での定常変位 $w=A_{1s}\Phi_1(1)$ を示す．

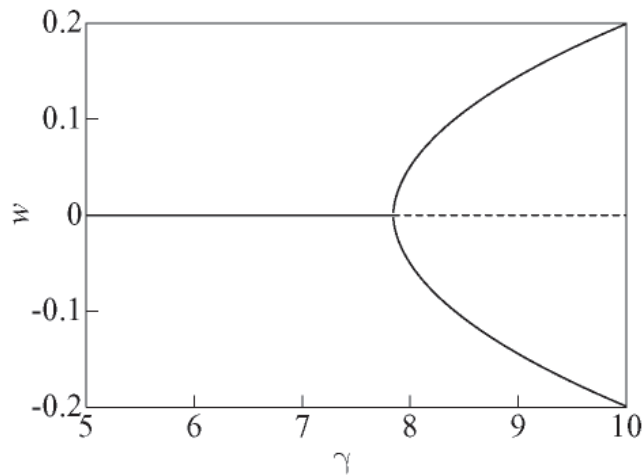


図5 γ の増加に伴う梁の座屈変位

ここで実線は安定，破線は不安定な平衡状態を意味する． γ が 7.9 を越えて変化すると図4(b)に示したように減衰係数が負となり静的平衡状態($w=0$)が不安定となる．そして安定な非自明な平衡状態が発生する．図6に式(8)を数値積分してその過渡的状态を示す． γ の増加に伴い w は大きくなるが本研究では，梁の全長に比べ w が十分小さな範囲を対象とする．

本解析の妥当性を検証する目的からステンレスの板を用いた座屈実験を行った．梁の弾性力と重力の比 γ を変化させる上で梁の全長を変化させながら実験を行った．梁の全長を変化させながら，(1)微小な外乱を与え1次の固有振動数を測定する実験および(2)梁の自由端の定常変位を測定する実験を行った．ステンレスの板厚は，0.3mm である．図7に γ の変化に伴う横振動の1次の固有振動数の変化を示す．図8に無次元化した平衡状

態の実験結果を示す.

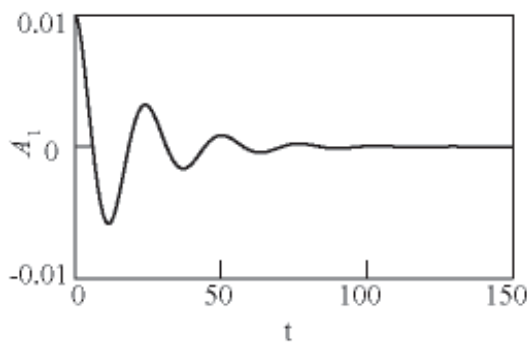
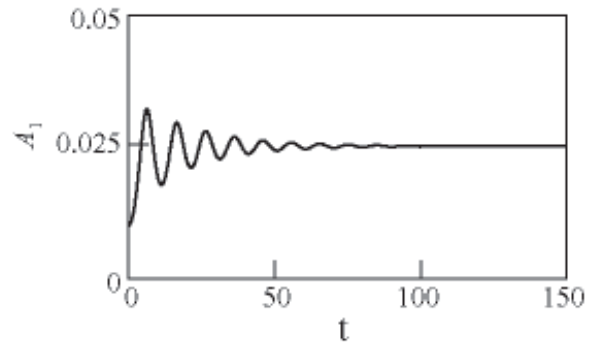


図6 (a) $\gamma=7.8$ の場合の時刻歴



(b) $\gamma=8.0$ の場合の時刻歴

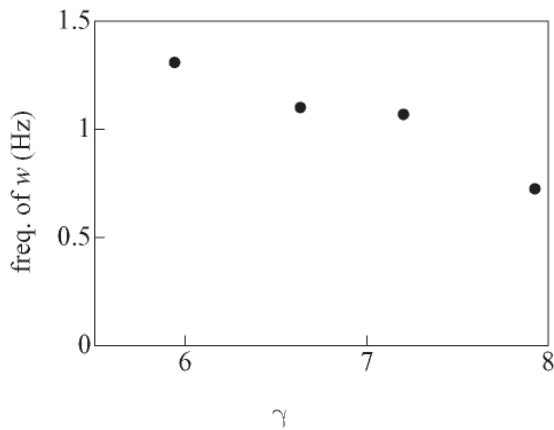


図7 1次の固有振動数の変化(実験)

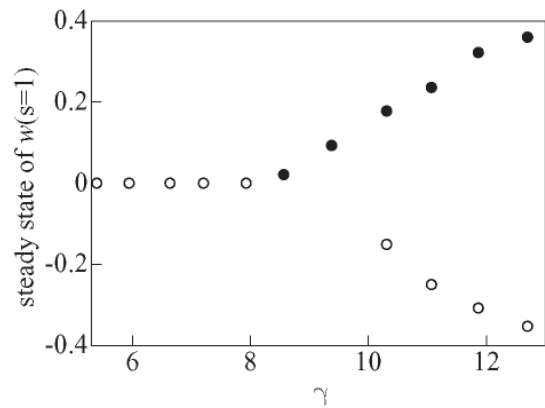


図8 梁の座屈変位(実験)

図7より図4(a)に示すように γ の増加に伴い固有振動数が低下している. また図8より理論解析同様 γ が8を越えると自明な平衡状態が不安定となり, 非自明な平衡状態が発生しているなど定性的特徴が理論解析結果と良好に一致している. また一部, 理論解析と異なり初期たわみなどに代表される初期不整による非対称性の影響が認められる.

5.2 鉛直加振された場合

図9に鉛直加振の影響を考慮し, 式(10)を数値積分した結果を示す. 同図より本来座屈が発生していた $\gamma=8.0$ で自明な平衡状態が安定化している. すなわち鉛直方向に加振することにより, 座屈が安定化した. 図10に $\gamma=8.5$ の場合における数値積分結果およびその周波数分析を示す. 同図より, 鉛直加振を加えても γ を増加させると自明な平衡状態が不安定になる. また A_1 は一定値に収束せず, ある値を中心として一つの周波数成分で振動する. これは, 式(10)の項 $(\varepsilon\nu^2\xi_2\cos\nu t)A_1$ において A_1 が座屈により直流成分を生じると調波的な非同次項が発生するためである. その振動数は, 下端鉛直加振の振動数と等しい.

下端を鉛直方向に高周波加振された片持ち梁の座屈

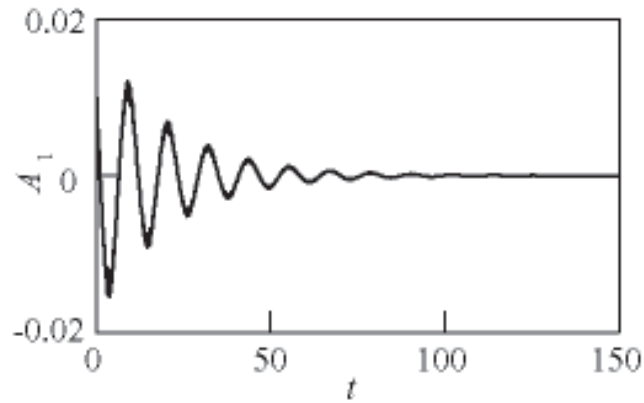


図9 $\gamma=8.0$ の場合の時刻歴($\varepsilon=0.1, \nu=10.0$)

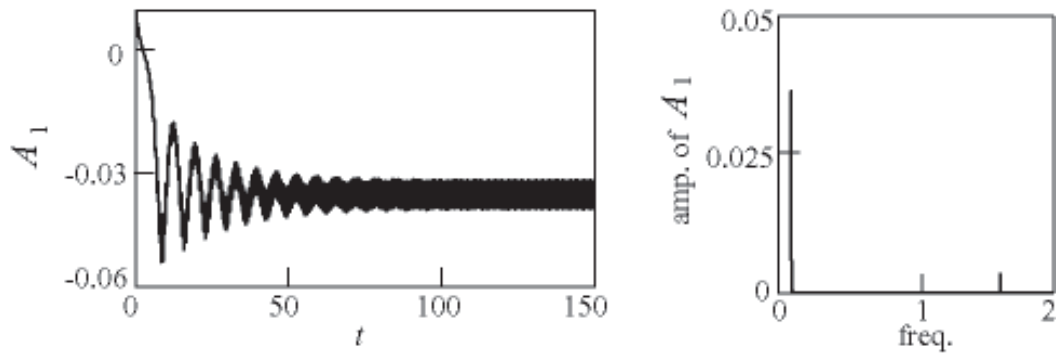


図10 $\gamma=8.5$ の場合の時刻歴($\varepsilon=0.1, \nu=10.0$)

図11に γ の増加に伴う A_1 の直流成分の変化を示す．同図より $\gamma=7.9$ で不安定になっていた自明な平衡状態は， $\gamma=8.2$ 付近まで安定になっている．すなわち上端加振の影響により座屈が安定化された．また γ の増加に伴い図10に示すような直流成分を有する振動が発生する．この直流成分が図5の座屈変位に相当し γ の増加に伴い，増加している．

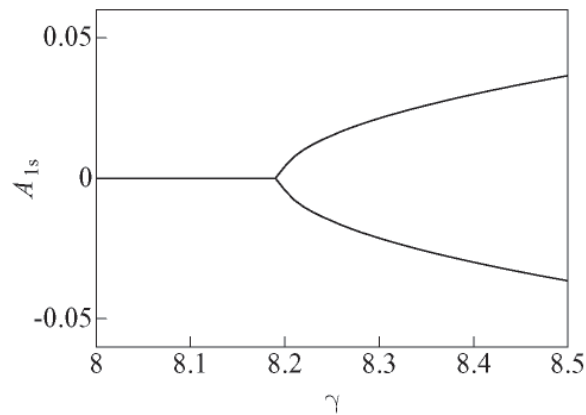


図11 鉛直加振がある場合の直流成分の変化

4.おわりに

下端固定上端自由な片持ち梁の自重による座屈を取り上げた．下端を鉛直方向に加振すると座屈が安定化する

る可能性があることを非線形動力学解析の手法により明らかにするとともに、実験でも座屈を再現した。

(1) 加振が無い場合について、横変位の3乗までを考慮した非線形解析により座屈変位を求めた。また実験によりその妥当性を検証した。

(2) 理論解析により、鉛直方向に加振を加えることにより座屈が安定化することを明確にした。

今後、さらなる実験を行い理論解析結果の妥当性を検証する予定である。

最後に、本研究は平成20年度当研究室で学生の卒業論文を兼ねて実験装置の製作およびデータ収集を行ったものである。ご協力頂いた4年生山本優明君、3年生大矢卓君に感謝の意を表わします。

参考文献

(1)例えば、水野正夫，材料力学大要，(1973)，129-135，養賢堂。

(2)ランダウ，リフシッツ著，広重ら訳，理論物理学教程力学，(1974)，116-118，東京図書。

(3)藪野浩司，SGCライブラリ33 工学のための非線形解析入門システムのダイナミクスを正しく理解するために，(2004)，朝倉書店。

(平成21年3月31日受理)