

高周波電界中のプラズマ電子の運動方程式からの パッシェン曲線の導出

長 濱 治 男*

Derivation of the Pashen Curve from Newton's Second Law for the Electrons to move in the R.F.Field

Haruo Nagahama

The motion equation of the electron which moves in the high frequency electric field is solved and it is found that the plasma electron absorbs the electric power in the high frequency electric field. Next, the change of the absorbed electric power is examined both in the high pressure region ($\omega < \nu$) and the low pressure region ($\omega > \nu$). As a result, Pashen Curve which shows the relation between the gas pressure p and the breakdown voltage V_s is obtained.

1. はじめに

変圧器や遮断器などの高電圧を取り扱う場合、気体の絶縁破壊電圧(以下、放電開始電圧と呼ぶ)を知り、さらにこの放電開始電圧を高めることが重要である。一方直流放電、高周波放電に限らず、放電開始電圧は気体の圧力 p と電極間距離 d に依存し、パッシェンの法則としてよく知られ、放電開始電圧 V_s は、

$$V_s = \frac{Bpd}{\ln \left[\frac{Apd}{\ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)} \right]} = \frac{Bpd}{Const + \ln(pd)} \quad (1)$$

で与えられている¹⁾。ここで、A、Bは気体の種類によって異なる係数であり、 γ は陰極に衝突する正イオン1個あたりに放出される平均二次電子数である。(1)式からわかるように同一種のガスでは、放電開始電圧 V_s は pd のみの関数で表示され、この曲線は図1に示すパッ

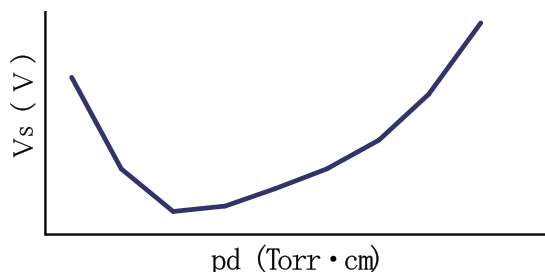


図1. パッシェン曲線

* 電気電子工学科

シェン曲線としてよく知られている。

高周波放電には、図 2(a)に示す誘導結合型高周波放電方式と(b)図に示す容量結合型高周波放電方式の二方式がある。この内、容量結合型高周波放電方式は、一对のリング状電極を距離 $d(m)$ 離して設置するので、放電開始電圧はガス圧 p とリング電極間距離 d の関数になる。しかし、図(a)の誘導結合型高周波放電では、電極がない無電極放電であるので、放電開始電圧はガス圧 p のみの関数となる。また、誘導結合型高周波放電におけるガス圧と放電開始電圧の測定結果において、放電開始電圧が最小値をとるガス圧で、印加高周波電界の角周波数 ω が電子とガス分子との衝突周波数 ν と等しく、 $\omega = \nu$ の関係が成立する²⁾ことが知られている。

今回は、高周波電界中を運動する電子についての運動方程式を立て、電子の速度を解き求め、さらに電子が高周波電界から単位時間、単位体積当たり吸収するエネルギーを表す式を導出した。そして、電子とガス分子との衝突周波数を考慮して、(1)ガス圧が高い場合、(2)ガス圧が低い場合の、電子が高周波電界から吸収するエネルギーの変化を定性的に調べることから、ガス圧 p と気体の放電開始電圧 V_s の関係を表すパッシェン曲線を得たので報告する。

2. 高周波電界中を運動する電子の吸収電力の導出

図 2(a)で図示する誘導結合型高周波放電では、放電管内に電極がない無電極放電を行うことができるので、電極材料から放出される不純物の影響が除去でき、純粋なガスでの放電が得られる、との長所がある。高周波電界中では、電子はどのような運動をし、放電開始がどのように決められるかを調べる。

試料ガスの電離や励起が小さく、電子と試料ガスの弾性衝突が支配的である場合、高周波電界の下、プラズマ生成用試料ガス中を運動する電子は試料ガスと衝突するので、その単位時間当たりの衝突回数を表す衝突周波数を ν とすると、電子の運動方程式は、

$$m \frac{d\mathcal{V}}{dt} + m \nu \mathcal{V} = -eEp \varepsilon^{j\omega t} \quad (2)$$

で表すことができる。ここで、 Ep は高周波電界の最大値である。

振動する電界の下では、電子は高周波電界と同様に振動するので、電子の運動速度 \mathcal{V} は

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_p \varepsilon^{j\omega t} \quad (3)$$

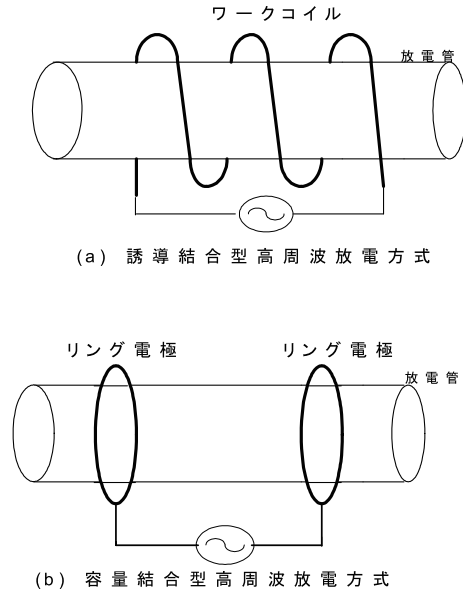


図 2. 高周波放電の 2 方式

で表すことができる。ただし、 v_p は電子速度の最大値である。

(3)式を(2)式左辺第1項目に代入すると

$$m \frac{d\psi}{dt} = j\omega m \psi p \varepsilon^{j\omega t} = j\omega m \psi \quad (4)$$

が得られる。(4)式を(2)式に代入すると、

$$(j\omega + v)m\psi = -eEp \varepsilon^{j\omega t} \quad (5)$$

となる。(5)式を ψ についての式に書き直すと、

$$\psi = -\frac{e}{m} \left(\frac{1}{v + j\omega} \right) Ep \varepsilon^{j\omega t} \quad (6)$$

となるが、(6)式を有理化すると、

$$\psi = -\frac{e}{m} \left\{ \frac{v - j\omega}{(v + j\omega)(v - j\omega)} \right\} Ep \varepsilon^{j\omega t} = -\frac{e}{m} \left(\frac{v}{v^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{v^2 + \omega^2} \right) \frac{Ep}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

が得られる。ここで、 $Ep/\sqrt{2}$ は実効値で、 E で表示される。

電力 P は

$$P = IV = JS \cdot V \quad (\text{watt}) \quad (8)$$

で表わされる。また、電界 E と電位 V の関係 $V = dE$ を(8)式に代入すると単位体積当たりの電力 P' は、

$$P' = \frac{P}{dS} = JE \quad (\text{watt} / \text{m}^3) \quad (9)$$

となる。ただし、 S は断面積、 d は電極間距離(ギャップ長)である。

電流密度の式は

$$J = ne \psi \quad (\text{A} / \text{m}^2) \quad (10)$$

で表されるが、対象にしているのは負電荷の電子であるので(10)式は

$$J = -ne \psi \quad (\text{A} / \text{m}^2) \quad (11)$$

になる。(7)式、(11)式を(9)式に代入すると、単位体積当たりの電力 P' は、

$$\begin{aligned} P' &= JE = -ne\psi E \\ &= -ne \left\{ -\frac{e}{m} \left(\frac{v}{v^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{v^2 + \omega^2} \right) \cdot \frac{Ep}{\sqrt{2}} \right\} \cdot \frac{Ep}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{ne^2}{m} \left\{ \frac{v}{v^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{v^2 + \omega^2} \right\} E^2 \end{aligned} \quad (12)$$

で表すことができる。

電力の吸収、つまり電力の消費は純抵抗の実数部で行われるので、(12)式の実数部を採ると、電子が高周波電界から単位体積当たり吸収する電力は、

$$P' = \frac{ne^2}{m} \cdot \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \cdot E^2 \text{ (watt / m}^3\text{)} \quad (13)$$

となる。

3. ガス圧による吸収電力の相違

衝突周波数 ν は、試料ガスのガス圧 p に影響を受けるので、(1)ガス圧 p が大きい高ガス圧領域の場合と、(2)ガス圧 p が小さい低ガス圧領域の2つのガス圧領域について、プラズマ電子の高周波電界からの吸収電力がどう変化するかを調べる。

(1) ガス圧 p が大きい領域

この領域では電子と試料ガス分子との衝突は頻繁に起こるので、電子の平均自由行程は短くなる。したがって、電子は1回衝突してから次の衝突までに電界によって加速されるにしても余り大きなエネルギーに達しないので、弾性衝突が支配的となり、衝突周波数 ν は印加高周波電界の角周波数 ω よりも極めて大きくなり、 $\nu \gg \omega$ の関係が成り立つ³⁾。

この関係を考慮すると(13)式は

$$\begin{aligned} P' &\doteq \frac{ne^2}{m} \cdot \frac{E^2}{\nu} = \frac{ne^2 E^2}{m} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\omega}{\omega} \\ &= \frac{ne^2 E^2}{m \omega} \cdot \frac{1}{\frac{\nu}{\omega}} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

単一周波数数の高周波放電では角周波数 ω は一定である。ガス圧 p が大きくなるほど電子とガス分子との衝突は頻繁に起こるようになるので、ガス圧 p が大きくなるほど衝突周波数 ν も大きくなる。それゆえ、ガス圧 p の増加とともに ν/ω の値は大きくなるため、吸収電力 P' は減少する。この傾向を表すため、パッシェン曲線の横軸の物理量であるガス圧 p の代わりに ν/ω を横軸に、縦軸に P' をとり、 ν/ω と P' の関係を定性的に作図したのが図3である。

しかし、このままでは衝突直前まで電子が高周波電界から吸収するエネルギーは小さく、ガス分

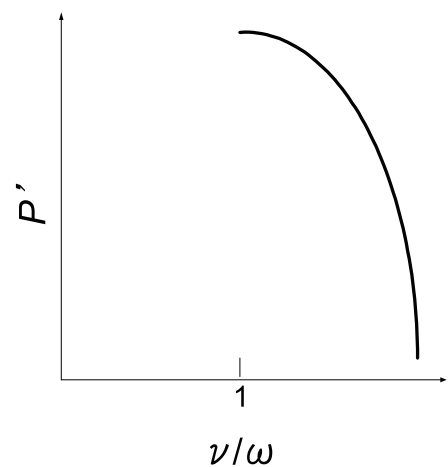


図3. 衝突周波数と吸収電力の関係
(ガス圧の高い $\nu \gg \omega$ の場合)

子固有の電離エネルギーよりも小さいため、電子とガス分子が衝突したときガス分子を電離させることはできない。

試料ガスを電離し放電を発生させるためには、衝突直前まで電子が高周波電界から吸収するエネルギーを試料ガス固有の電離エネルギー以上の大きさにする必要がある。このためには、(14)式から分るように高周波電界 E の大きさを高める必要がある。つまり、電圧を増大していく必要がある。このことを定性的に表したのが図4である。縦軸に放電開始電圧 V_s を、横軸にはガス圧 p の代わりに ν/ω をとっている。それゆえ、放電開始電圧 V_s はガス圧 p の増大とともに大きくなっていき、図1に示すパッシェン曲線の V_s が最小になるガス圧よりも右側の高いガス圧領域におけるガス圧 p と放電開始電圧 V_s の関係が得られる。

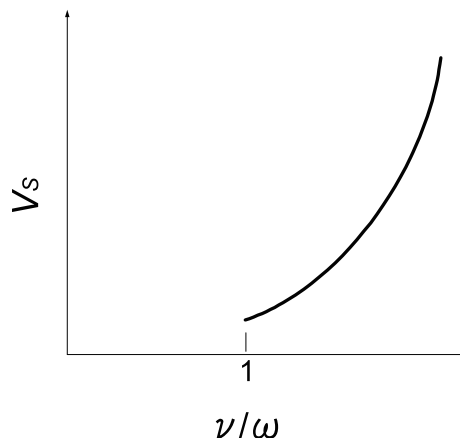


図4. 放電開始電圧とガス圧の関係
(ガス圧の高い $\nu \gg \omega$ の場合)

(2) ガス圧 p が小さい領域

この領域では電子と試料ガス分子との衝突は余り起こらない。したがって、電子は1回衝突してから次の衝突までに移動する距離、つまり平均自由行程は長く、電子は衝突から次の衝突までの間に多くの高周波振動を繰り返すようになるので、衝突周波数 ν は印加高周波電界の角周波数 ω よりも極めて小さく、 $\nu \ll \omega$ の関係が成り立つ⁴⁾。

この関係を考慮すると(13)式は

$$P' \div \frac{ne^2 E^2}{m} \cdot \frac{\nu}{\omega^2} = \frac{ne^2 E^2}{m \omega} \cdot \frac{\nu}{\omega} \quad (15)$$

となる。

ガス圧 p が小さくなるほど電子とガス分子との衝突は起こらなくなるので、ガス圧 p が小さくなるほど衝突周波数 ν も小さくなる。それゆえ、ガス圧 p の低下とともに ν/ω の値は小さくなるため、吸収電力 P' は減少する。この傾向を表すため、パッシェン曲線の横軸の物理量であるガス圧 p の代わりに ν/ω を横軸に、縦軸に P' をとり、 ν/ω と P' の関係を定性的に作図したのが図5である。

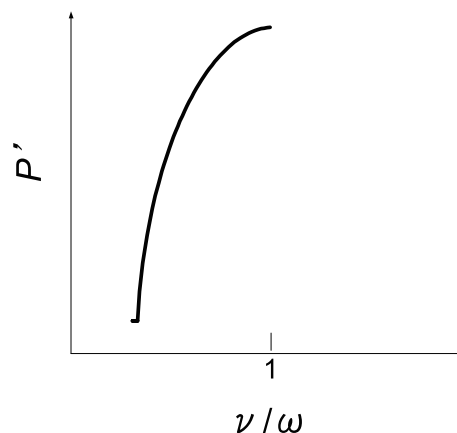


図5. 衝突周波数と吸収電力の関係
(ガス圧が低い $\nu \ll \omega$ の場合)

$\nu/\omega = 1$ の場合、電子は高周波電界から吸収するエネルギーは最大となるが、しかし、 $\nu/\omega \ll 1$

となるガス圧 p の低い領域では吸収電力は小さくなり、衝突直前まで電子が高周波電界から吸収するエネルギーも小さくなり、このままではガス分子固有の電離エネルギーよりも小さいため、電子とガス分子が衝突したときガス分子を電離させることはできない。

試料ガスを電離し放電を発生させるためには、衝突直前まで電子が高周波電界から吸収するエネルギーを試料ガス固有の電離エネルギー以上の大きさにする必要がある。このためには、(15)式から分るように高周波電界 E の大きさを高める必要がある。つまり、電圧を増大していく必要がある。このことを定性的に表したのが図 6 である。

縦軸に放電開始電圧 V_s を、横軸にはガス圧 p の代わりに ν/ω をとっている。それゆえ、放電開始電圧 V_s はガス圧 p の低下とともに小さくなっていき、図 1 に示すパッシェン曲線の V_s が最小になるガス圧よりも左側の低いガス圧領域におけるガス圧 p と放電開始電圧 V_s の関係が得られる。

それゆえ、ガス圧 p の高い領域から図 4 を、ガス圧 p の低い領域から図 6 を採り、横軸にガス圧 p の関数として ν/ω を、縦軸に放電開始電圧 V_s をとると図 7 のパッシェン曲線が得られる。

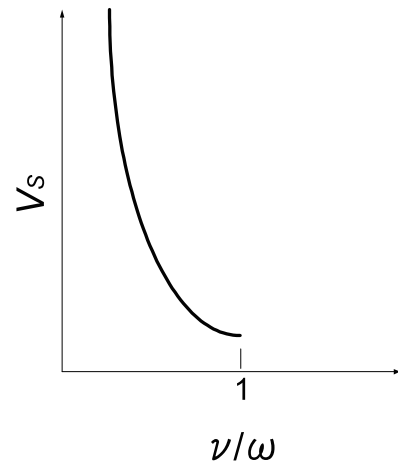


図 6. 放電開始電圧とガス圧の関係
(ガス圧が低い $\nu \ll \omega$ の場合)

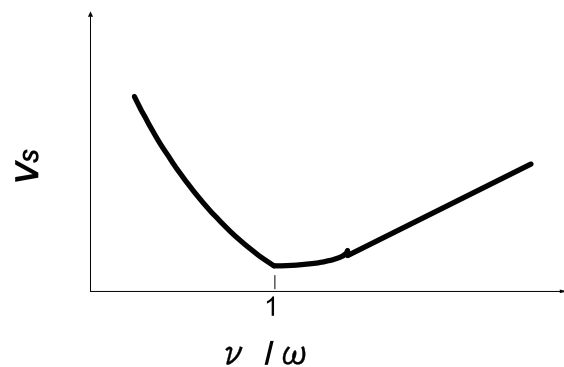


図 7. ガス圧 p と放電開始電圧 V_s の関係
を表すパッシェン曲線

4. まとめ

大気中の絶縁破壊電圧に関する研究の歴史は古く、19 世紀中ごろから定量的研究がされてきた^{5),6)}。そして、1889 年には Friedrich Paschen によって、絶縁破壊電圧は「気体の圧力 p と電極間距離(ギャップ長) d の積」の関数であるとの経験則であるパッシェンの法則が発表された⁷⁾。

今回は、高周波放電におけるパッシェン曲線得る目的で、電界中を運動する電子についてのニュートンの第二運動方程式を立て、方程式を解き電子の速度 v を求め、さらにオームの

法則の一般式($I=ne \int S$)および電力の式を用いて、電子が高周波電界から単位時間、単位体積あたりに吸収するエネルギーを表す式を導出し、そして、電子とガス分子との衝突周波数を考慮して(1)ガス圧が高い場合、(2)ガス圧が低い場合のエネルギーの表示式の変化を定性的に調べることから、ガス圧 p と気体の放電開始電圧(絶縁破壊電圧) V_S の関係を表すパッシェン曲線を定性的に得ることを試みた。

この結果、ガス圧 p の代わりに電子とガス分子との衝突周波数 ν と、プラズマを生成するために使用する高周波発振器の角周波数 ω との比の ν/ω を横軸にとり、縦軸には放電開始電圧 V_S をとり、 ν/ω と V_S の定性的関係を求め作図した結果、いわゆる双曲線状のパッシェン曲線が得られた。

参 考 文 献

- 1) 堤井信力 : プラズマ基礎工学(内田老鶴圃, 東京都, 1986)1 版, p.39
- 2) S.C.Brown : Encyclopedia of Physics XX II, "Gas Discharge II", Springer-Verlag, Berlin(1956), p.531
- 3) 長濱治男, 福村隆志, 高元暉夫 : 電気学会論文誌, A108(1988), p.51
- 4) 長濱治男, 福村隆志, 高元暉夫 : 3)に同じ
- 5) William Snow Harris : Phil Trans, Vol.124(1834), p.213
- 6) J.M.Gaugain : Annales de Chimie et de Physique, S4, Vol.9(1866), p.75
- 7) Friedrich Paschen : Ann Phys, Vol.37(1899), p.69

(平成 21 年 3 月 31 日受理)