

P/T ペトリネットの状態方程式の非負整数解の代数的構造に関する基礎的考察

松本 忠*, 恐神 正博**, 茂呂 征一郎***

Basic Considerations on Algebraic Structure in Nonnegative Integer Solutions for State Equation of a P/T Petri Net

Tadashi Matsumoto*, Masahiro Osogami**, Seiichiro Moro***

Abstract P/T Petri nets and their extended models have been widely used for modelings, analyses, and verifications for discrete-event dynamic systems in various field. It is one of features that P/T Petri nets are analyzed by state equation.

Generators for nonnegative integer homogeneous solutions(i.e., T-invariants) have been deeply studied, but minimal solutions for nonnegative integer inhomogeneous solutions have not been discussed in detail. While the augmented system $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ ($\tilde{A} := [A, -b]$) of state equation $Ax = b$ has the well-known generators, then we can derive particular solutions of $Ax = b$ from elementally nonnegative rational T-invariants for $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$.

In this paper, fundamental and algebraic properties of T-invariants and particular solutions for both $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ and $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ are discussed.

1. まえがき

ペトリネットは離散事象システムの有用なモデルの1つとして広く用いられている。P/T ペトリネットは状態方程式を用いて代数的な解析が比較的容易なクラスであるが、従来は非負整数同次解 (T インバリエント) の生成元だけに焦点が当てられていて [1]~[6], 非負整数非同次解の極小ベクトルである特解は十分に論じられてこなかった [6],[9]。ところが、状態方程式の拡大システムを考えると、従来の T インバリエントの生成元に関する諸知見を活用して、特解の代数的構造や諸性質を論じることが可能になった。本論文では、このための状態方程式の非負整数解の基本的な性質を論じている。

2. 諸準備

2.1 数学的記号と概念 [1]~[4]

$Q^{m \times n}, Z^{m \times n}, Q_+^{m \times n}, Z_+^{m \times n}$ はそれぞれ、有理数、整数、非負有理数、非負整数を要素とする $m \times n$ 次行列の集合である。 $0^{m \times n}$ は $m \times n$ 次零行列を意味する。 $n \times 1$ 次列ベクトル x の第 i 要素を $x(i), i \in I(n) := \{1, \dots, n\}$ と記すが、 $I(n)$ はインデックス集合である。表現の簡単化のため、以下の諸定義は $Ax = b$ ($A \in Z^{m \times n}, b \in Z^{m \times 1}$) の非負有理数解 $x \in Q_+^{n \times 1}$ を対象とする

* 電気電子工学科 ** 経営情報学科 *** 福井大学

ものとする. ここで, $Q_+^{n \times 1} \supseteq Z_+^{n \times 1}$ である.

ベクトルの不等式の表示法; 列ベクトル $x = (x(1), \dots, x(n))^T$ と $y = (y(1), \dots, y(n))^T$ の関係に代表させてベクトルの不等式の表示法を示す. $x > y \Leftrightarrow x(i) > y(i) \forall i \in I(n), x \geq y \Leftrightarrow x(i) \geq y(i) \forall i \in I(n), x \geq y \Leftrightarrow x(i) \geq y(i)$, かつ, $\exists i \in I(n)$ s.t. $x(i) > y(i)$.

$Ax = b$ の同次解; 状態方程式 $Ax = b$ の $b = 0^{m \times 1}$ のときの $n \times 1$ 次行列 x を同次解と呼ぶ.

$Ax = b$ の非同次解; 非同次解; 状態方程式 $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ のときの $n \times 1$ 次行列 x を非同次解と呼ぶ.

台集合; ベクトル $x \geq 0^{n \times 1}$ の非零成分に対応する要素の集合を台集合と呼び, $\text{supp}(x)$ と表す.

極小ベクトル; すべての要素 k に対して $x_1(k) \leq x(k)$ である他の異なるベクトル x_1 が存在しないとき, この x を極小ベクトルと呼ぶ.

初等ベクトル; 極小ベクトル x の台集合の空でない真部分集合ベクトルがいずれも台集合でないとき, この x を極小台集合ベクトルまたは初等ベクトルと呼ぶ. 以下, 本論文では極小台集合ベクトルを用いずに初等ベクトルを用いることにする. 本論文を通して, 初等ベクトルは極小ベクトルであるが, その逆は一般に真でないことに留意されたい.

$Ax = b$ の特解; $Ax = b$ の $b \neq 0^{m \times 1}$ のときの $n \times 1$ 次非同次解 x の極小ベクトルを特解と呼ぶ. すなわち, 非同次解が同次解を和形式に含まないとき, その非同次解を特解と呼ぶ.

また, 本論文を通して, 非同次解の極小ベクトルのすべては特解のすべてでもあるので, 今後は特解の極小ベクトルを極小特解と, 特解の初等 (すなわち, 極小台集合) ベクトルを初等特解と記すことにする.

凸結合; 非負重み付き 1 次結合において, 非負重みの総和が 1 であるとき, この 1 次結合を凸結合と呼ぶ.

2.2 P/T ペトリネットに関する諸定義 [6]

① ペトリネットは, $N = (P, T, F, W)$ で表わされ, 節点 P, T に関する 2 部グラフである. ここで, $P := \{p_1, \dots, p_m\}$; プレースの有限集合, $T := \{t_1, \dots, t_n\}$; トランジションの有限集合, $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$; アークの集合, $W : F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$; アークの重み付け関数である. (N, M_0) をマーキングつきネットと呼び, $M_0 \in Z_+^{m \times 1}$ は初期マーキングである.

② ペトリネットのマーキングは, 次のトランジションの発火則にしたがって変化する. トランジション t のすべての入力プレース p に, 少なくとも $w(p, t)$ 個のトークンがあれば, トランジション t は, 発火可能である. ここで, $w(p, t)$ は入力プレースからトランジション t へのアークの重みである. 発火可能なトランジションは, 発火しても発火しなくてもよい. トランジション t が発火すると, t の各入力プレース p から $w(p, t)$ 個のトークンが取り去られ, t の各出力プレース p へ $w(t, p)$ 個のトークンが加えられる. ここで, $w(t, p)$ は, トランジション t から出力プレース p へのアークの重みである.

③ ペトリネット N の接続行列は行, 列を各プレース, 各トランジションに対して定義されるもので, $A \in Z^{m \times n}$ で示す. このとき, (N, M_0) の状態方程式は $Ax = b$, $b \in Z^{m \times 1}, x \in Z_+^{n \times 1}$ で与えられる. ここで, x はトランジションの発火回数ベクトルであり, $b := M_d - M_0 \in Z^{m \times 1}$ は最終マーキング $M_d \in Z_+^{m \times 1}$ から初期マーキング $M_0 \in Z_+^{m \times 1}$ を引いたものである.

④ ペトリネットでは, $Ax = 0^{m \times 1} (A^T y = 0^{n \times 1})$ の $x \in Z_+^{n \times 1} (y \in Z_+^{m \times 1})$ を T インバリエント (P インバリエント) と呼んでおり, 本論文では T インバリエントのみを議論するが, 得られる結果は P インバリエントに対しても成立する,

⑤ 拡大システム \tilde{N} の拡大接続行列は $\tilde{A} := [A, -b] \in Z^{m \times (n+1)}$ で示す. ただし, 本論文では, $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の非負整数同次解 $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ のみを考える.

3. $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ の初等 T インバリエントの性質

$\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ が初等 T インバリエントであるときの性質を示す.

$L_i \in Z^{m \times 1}$ を行列 \tilde{A} の第 i 列ベクトルとし, $\tilde{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}, \lambda_i \in \{1, 2, \dots\}, i \in I(q)$, を $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の T インバリエントとする. ここで, \tilde{x} の要素の配列を単純にしたが, 議論の一般性を失わないことに留意されたい. また, 簡単のため, $\tilde{A}'(\tilde{x}) := [L_1, \dots, L_q] \in Z^{m \times q}$ とし, \tilde{x} の非零要素数 q を $q(\tilde{x})$ と明示する. 以上の準備のもとで次の性質を示したい.

3.1 $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の $(n+1) \times 1$ 次非負整数初等 T インバリエントの性質

[定理 1] $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ が $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の非負整数初等 T インバリエントである必要十分条件は, $q(\tilde{x}) = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 1$ である. ただし, $\rho(\tilde{A}'(\tilde{x}))$ は $\tilde{A}'(\tilde{x})$ の階数である. ■

(証明) 十分性: $\tilde{x}' = (\lambda_1, \dots, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ を $\tilde{A}\tilde{x}' = 0^{m \times 1}$ の任意の T インバリエントであるとする, 次式を得る.

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i L_i = 0^{m \times 1}, \lambda_i \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

$r := \rho(\tilde{A}'(\tilde{x}'))$ のとき, $q > r$ である ($\because q = r$ ならば, $\lambda_i = 0^{1 \times 1} \forall i \in I(q)$ となり, $\lambda_i > 0$ なる仮定に反するから. ただし, $q = q(\tilde{x}')$ である). $\tilde{A}'(\tilde{x}') = [L_1, \dots, L_q]$ なる q 列から基底として r 列を選ぶことができる. 更には, この基底を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \mu'_i L'_i &= 0^{m \times 1}, L'_i \in \{L_1, \dots, L_q\}, \\ \mu'_i &\in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \end{aligned} \quad (2)$$

を得るが, (2) 式は一般には (1) 式とは異なる式である (このとき, もし $q = r + 1$ であれば, (2) 式は (1) 式そのものであり, $q = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x}')) + 1$ であり, 後の (3) 式で $s = r_0 + 1 (r = r_0)$ の場合に相当する).

(1) 式と (2) 式から, $\{L_1, \dots, L_q\}$ に関する少なくとも 1 つの列を消去でき, (1) 式に類似しているが, すべての係数は正である次式を得る. ただし, 項数 s は q より小さい.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s \mu''_k L''_k &= 0^{m \times 1}, L''_k \in \{L_1, \dots, L_q\}, \\ \mu''_k &\in \{1, 2, \dots\}, \quad s < q. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, $r_0 := \rho([L''_1, L''_2, \dots, L''_s])$ とする.

もし, $s > r_0 + 1$ ならば, 上記と同様な列の消去を繰り返せば, 最後には (3) 式で $s = r_0 + 1$ を満足する場合に至る ($r \geq r_0$). ところで, $s = r_0 + 1$ の (3) 式から更に任意の 1 個の 1 次従属列を消去すると,

$$\sum_{l=1}^{r_0} \mu_l''' L_l''' = 0^{m \times 1}, L_l''' \in \{L_1, \dots, L_q\}, \mu_l''' = 0^{1 \times 1} \quad \forall l \in I(r_0) \quad (4)$$

を得る ($\because L_l''', \dots, L_{r_0}'''$ はすべて 1 次独立であるから). その結果, μ_l''' から得られるベクトルは $(0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ となるが, これは初等ベクトルでない.

ゆえに, $s = r_0 + 1$ ($s = q(\tilde{x}) = r_0 + 1 = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 1, \tilde{A}'(\tilde{x}) = [L_1'', \dots, L_s''] \in Z^{m \times s}$) の (3) 式は初等 T インバリエント $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ を定義しており, $\tilde{x} = (\mu_1'', \dots, \mu_s'', 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ となる. しかも, このときの $s = r_0 + 1$ の (3) 式は唯一な表現であることに留意されたい.

以上で, 十分性の証明が完了した.

必要性: $\tilde{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ が初等 T インバリエントであるならば, $q(\tilde{x}) = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 1$ であることを示したい. 以下に, このことを対偶を用いて示す. すなわち, $q(\tilde{x}) \neq \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 1$ ならば, \tilde{x} は初等 T インバリエントでないことを証明する. ただし, $q = q(\tilde{x})$ で $\tilde{A}'(\tilde{x}) = [L_1, \dots, L_q] \in Z^{m \times q}$ である.

① $q(\tilde{x}) \neq \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 1$ は次の (5) 式, または (6) 式を意味する.

$$q(\tilde{x}) \leq \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})), \quad (5) \quad q(\tilde{x}) \geq \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 2. \quad (6)$$

② 他方, \tilde{x} の非零要素の数は $q(\tilde{x})$ であるから次式が成立する.

$$q(\tilde{x}) \geq \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})). \quad (7)$$

③ (5) 式と (7) 式から

$$q(\tilde{x}) = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})). \quad (8)$$

となる. このとき, L_1, \dots, L_q は互いに 1 次独立であるから次式が成立する.

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i' L_i = 0^{m \times 1}, \quad \lambda_i' = 0^{1 \times 1} \quad \forall i \in I(q). \quad (9)$$

④ 他方, $\tilde{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}, \lambda_i > 0$ は T インバリエントであるから

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i L_i = 0^{m \times 1}, \quad \lambda_i > 0^{1 \times 1} \quad \forall i \in I(q). \quad (10)$$

(9) 式と (10) 式は相容れないから, (8) 式の場合は存在しない.

⑤ (6) 式と (7) 式の場合, すなわち (6) 式が成立する場合には, (10) 式が成立するもとの, $\tilde{A}'(\tilde{x}) = [L_1, \dots, L_q]$ の 2 列以上が必ず 1 次従属であることを意味している. いま, 簡単のために,

$$\begin{aligned} L_q &= \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2, & \alpha_1, \alpha_2 &\neq 0^{1 \times 1}, \\ L_{q-1} &= \beta_1 L_3 + \beta_2 L_4, & \beta_1, \beta_2 &\neq 0^{1 \times 1}, \end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \lambda_i L_i &= (\lambda_1 + \lambda_q \alpha_1) L_1 + (L_2 + \lambda_q \alpha_2) + (\lambda_3 + \lambda_{q-1} \beta_1) L_3 + (\lambda_4 + \lambda_{q-1} \beta_2) L_4 + \sum_{i=5}^{q-2} \lambda_i L_i \\ &= \sum_{j=1}^{q-2} \lambda_j' L_j' = 0^{m \times 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_j &\in \{L_1, \dots, L_{q-2}\}, \\ L'_j &\neq 0^{m \times 1} \text{ or } = 0^{m \times 1}, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ \lambda'_j &= \lambda_i > 0^{1 \times 1} \quad \forall j \in \{5, \dots, q-2\}. \end{aligned} \quad (11)$$

すると, $\tilde{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-2}, \lambda_{q-1}, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ に対して,
 $\tilde{x}' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{q-2}, 0, 0, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ が得られたが, $\lambda'_1, \dots, \lambda'_4$ の値の如何にかかわらず

$$\text{supp}(\tilde{x}) \supset \text{supp}(\tilde{x}') \quad (12)$$

となる. (12) 式は, $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ が初等 T インバリエントでないことを意味するから, 結論が得られる.

⑥ 以上で, 必要性も証明された. ■

3.2 $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の $(n+1) \times 1$ 次非負有理数初等 T インバリエントの性質

定理 1 での $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の初等 T インバリエントは非負整数であったが, 非負有理数初等 T インバリエントを考えることも有用であるので, ここでこれを取りあげる. まず, $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ から $\tilde{x} \geq 0^{(n+1) \times 1}$ を満足するすべての初等 T インバリエントを求める問題は, LP (線形計画) 問題の双対定理に関連する Gordon の定理を用いると, 次の特殊な LP 表現式における凸多面体の端点探索問題となることが示される [7],[8].

$$\begin{aligned} &\text{minimize } z = 0^{1 \times (n+1)} \cdot \tilde{x}, \\ &\text{subject to} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ 1^{1 \times (n+1)} \end{bmatrix} \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0^{m \times 1} \\ 1^{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} \geq 0^{(n+1) \times 1}. \quad (13)$$

(13) 式の \tilde{x} に対する拘束条件 $\sum_{i=0}^{(n+1)} \tilde{x}(i) = 1^{1 \times 1}$ は, 得られる解が非負有理数初等 T インバリエント $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ であることを意味している.

$\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ と $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ の関係; $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ の各要素の分母の最小公倍数を $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ の各要素にかければ, $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ が得られる. また, 逆に $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ の各要素を $\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{x}(i)$ で割れば, $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ が得られることになる. ■

以上のことから, 定理 1 の系として次の性質を得る.

[定理 1 の系 1] $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ が $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の非負有理数初等 T インバリエントである必要十分条件は, $q(\tilde{x}) = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 1$ である. ■

Remarks A : (1) 定理 1 の系 1 の $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ では, $Q_+^{(n+1) \times 1} \supseteq Z_+^{(n+1) \times 1}$ であるから, 一般に一部の \tilde{x} は非負整数初等 T インバリエントになっていることがある.

(2) $\tilde{x}(n+1) > 0^{1 \times 1}$ であるとき, $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ の各要素を $\tilde{x}(n+1)$ で除して第 $(n+1)$ 要素を 1 にしても, 得られる $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ は依然として $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の解である. それゆえ, $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の各非負有理数初等 T インバリエント $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ は, $\tilde{x}(n+1) = 0^{1 \times 1}$ のとき $Ax = b = 0^{m \times 1}$ の $(n \times 1)$ 次非負有理数初等 T インバリエントに, $\tilde{x}(n+1) = 1^{1 \times 1}$ のとき $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の

$(n \times 1)$ 次非負有理数初等特解に対応していることに留意されたい. このとき, $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ から $\tilde{x}(n+1) = 0^{1 \times 1}$ を除去して得られるものが $(n \times 1)$ 次非負有理数初等 T インバリエントであり, $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ から $\tilde{x}(n+1) = 1^{1 \times 1}$ を除去して得られるものが $(n \times 1)$ 次非負有理数初等特解である.

(3) 拡大システム $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の任意の非負整数同次解 $\tilde{x} \in Z_+^{(n+1) \times 1}$ は非負有理数初等 T インバリエントまたは非負整数初等 T インバリエントの非負重み付き 1 次結合で与えられる. この意味でこれらの T インバリエントを生成元と呼ぶ [1]~[6]. ■

4. $Ax = b$ の T インバリエントの生成元と特解の性質

ここでは, 拡大システム $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の生成元に対して得られた § 3 の性質から $Ax = b$ の T インバリエントの生成元と特解の性質を求める. $q(x), A'(x)$ の定義は § 3 の $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の $q(\tilde{x}), \tilde{A}'(\tilde{x})$ の定義と同様にして, $Ax = b$ に対してなされる.

4.1 $Ax = 0^{m \times 1}$ の $x \in Z_+^{n \times 1}$ (非負整数同次解, すなわち T インバリエント) の生成元の性質

まず, 定理 1 の系 1 と定理 1 からそれぞれ $Ax = 0^{m \times 1}$ の非負有理数と非負整数の初等 T インバリエントの性質が次のように得られる [1].

[定理 2] $x \in Q_+^{n \times 1}$ が, $Ax = 0^{m \times 1}$ の非負有理数初等 T インバリエントである必要十分条件は, $q(x) = \rho(A'(x)) + 1$ である. ■

[定理 3] $x \in Z_+^{n \times 1}$ が, $Ax = 0^{m \times 1}$ の非負整数初等 T インバリエントである必要十分条件は, $q(x) = \rho(A'(x)) + 1$ である. ■

定理 3 の裏を考えれば, 次の系が得られる.

[定理 3 の系 1] $x \in Z_+^{n \times 1}$ が, $Ax = 0^{m \times 1}$ の非負整数初等 T インバリエントでない非負整数 T インバリエントであるための必要十分条件は, $q(x) \geq \rho(A'(x)) + 2$ である. ■

$Ax = 0^{m \times 1}$ の非負整数解 $x \in Z_+^{n \times 1}$ の非負整数初等 T インバリエントでない非負整数極小 T インバリエントの代数的必要条件として次の系を得る. ただし, それらは, 定理 3 の系 1 の非負整数初等 T インバリエントでない非負整数 T インバリエントの一部であるから, 十分性は成立しない.

[定理 3 の系 2] $x \in Z_+^{n \times 1}$ が, $Ax = 0^{m \times 1}$ の非負整数初等 T インバリエントでない非負整数極小 T インバリエントであれば, $q(x) \geq \rho(A'(x)) + 2$ である. ■

4.2 $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の $x \in Z_+^{n \times 1}$ (非負整数非同次解) の特解の性質

まず, 定理 1 の系 1 から $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の $(n \times 1)$ 次非負有理数初等特解の性質として, 次の定理を得る.

[定理 4] $x \in Q_+^{n \times 1}$ が $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の非負有理数初等特解である必要十分条件は, $q(x) = \rho(A'(x))$ である. ■

(証明) 定理 1 の系 1 において, $\tilde{x}(n+1) = 1^{1 \times 1}$ のすべての列ベクトルは互いに初等ベクトルであり, それらから $\tilde{x}(n+1) = 1^{1 \times 1}$ を等しく除去して得られる各 $x \in Q_+^{n \times 1}$ も互いに初等ベクトルである. しかも, $q(x) = \tilde{q}(\tilde{x}) - 1 = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) + 1 - 1 = \rho(\tilde{A}'(\tilde{x})) = \rho(A'(x))$ である. 最後の

等号は $Ax = b$ の解の存在条件が成立することから言える. ■

次に, $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の非負整数初等特解の代数的性質 (必要条件) を与える.

[定理 5] $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{n \times 1}$ が $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の非負整数初等特解であるならば, $q(x) = \rho(A'(x))$, または, $q(x) = \rho(A'(x)) + 1$, が成立する. ■

(証明) 対偶で証明する. すなわち, $q(x) < \rho(A'(x))$ または $q(x) \geq \rho(A'(x)) + 2$ ならば, $x \in Z_+^{n \times 1}$ は非負整数初等特解でないことを示す. まず, 前者は $q(x) = q, A'(x)$ の定義から存在することはなく, 次に, 後者は, 定理 1 の必要性の証明の⑤と⑥に類似しているが, 概略を以下に示す. $q(x) \geq \rho(A'(x)) + 2$ は $A'(x) = [L_1, \dots, L_q]$ に少なくとも 2 列以上の 1 次従属列が存在していることを意味するので,

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i L_i = b \neq 0^{m \times 1} \quad (14)$$

において, 例えば $L_q = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 (\alpha_1, \alpha_2 \neq 0^{1 \times 1}), L_{q-1} = \beta_1 L_3 + \beta_2 L_4 (\beta_1, \beta_2 \neq 0^{1 \times 1})$ とすると, (14) 式は次式となる.

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i L_i = \sum_{i=1}^{q-2} \lambda'_i L'_i \neq 0^{m \times 1} \quad (15)$$

(14) 式と (15) 式からそれぞれ, $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-2}, \lambda_{q-1}, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{n \times 1}$, $x' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{q-2}, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{n \times 1}$, を得て, $\text{supp}(x) \supset \text{supp}(x')$ となり, $x \in Z_+^{n \times 1}$ は初等特解でないことになり, 証明完了である. ■

[定理 6] $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{n \times 1}$ が, $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の非負整数初等特解でない非負整数極小特解であるならば, $q(x) \geq \rho(A'(x)) + 1$ である. ■

(証明) ① 対偶で証明すると, $q(x) \leq \rho(A'(x))$ であるならば, $x \in Z_+^{n \times 1}$ は非負整数初等特解でない非負整数極小特解とはならない (すなわち, 非負整数初等特解かつ非負整数極小特解である) ことを示せばよい.

② $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_q, 0, \dots, 0)^T \in Z_+^{n \times 1}, \lambda_i > 0^{1 \times 1} \forall i \in I(q)$ であることは, $q(x) \geq \rho(A'(x))$ を意味する.

③ ① と ② から $q(x) = \rho(A'(x))$ の場合を考えればよい.

④ 特解が $q(x) = \rho(A'(x))$ であるのは, 定理 4 から $x \in Z_+^{n \times 1} \subseteq Q_+^{n \times 1}$ のときであり, 定理 5 からこの $x \in Z_+^{n \times 1}$ は非負整数初等特解である. すなわち, この $x \in Z_+^{n \times 1}$ は非負整数初等特解かつ極小特解である. ゆえに, 命題が成立する. ■

本論文では, 詳細を論じるスペースはないが, $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の $x \in Z_+^{n \times 1}$ の極小ベクトルのすべてが極小特解のすべての集合 V_5 である. ある $v_j^{(5)} \in V_5$ が V_5 の残りの要素の凸結合で表わされないとき, それらの特解集合を基本特解集合 $V_4 (\subseteq V_5)$ と記す. V_4 の部分集合が非負整数初等特解集合である. すると, $v_j^{(4)} \in V_4$ の凸結合で表現される極小特解集合は定理 6 の極小特解集合の部分集合であるから, 定理 6 から次の性質を得る.

[定理 6 の系 1] $x \in Z_+^{n \times 1}$ が $Ax = b \neq 0^{m \times 1}$ の $v_j^{(4)} \in V_4$ の凸結合で表現される非負整数極小特解であるならば, $q(x) \geq \rho(A'(x)) + 1$ である. ■

Remarks B; 状態方程式 $Ax = b$ の任意の非負整数解 $x \in Z_+^{n \times 1}$ は非負整数初等 T インバリア

ントの非負有理数重み付き 1 次結合と非負整数極小特解の和で表現される [9]. ここで, 非負整数極小特解のあるものは, さらに基本特解 V_4 の凸結合で与えられるので, V_4 , すなわち, V_4 の部分集合である非負整数初等特解の必要十分条件と非負整数初等特解以外の基本特解の必要十分条件を明らかにすることが今後の課題の 1 つである. (cf. 定理 5)[10],[11]. ■

5. むすび

P/T ペトリネットの状態方程式 $Ax = b$ の拡大システム $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m \times 1}$ の非負有理数初等 T インバリエント $\tilde{x} \in Q_+^{(n+1) \times 1}$ のすべては, 例えば Fourier-Motzkin 法で容易に求められるので, これを基にして, $Ax = b$ の非負整数初等 T インバリエント $u \in Z_+^{n \times 1}$ のすべてのみならず, 従来十分に理解されていなかった, 非負整数特解 $v \in Z_+^{n \times 1}$ のすべてを求める道筋ができるようになった.

本論文では, このための基礎となる非負有理数解/非負整数解の基本的な性質を示した.

本研究は, 平成 19~21 年度科学研究費, 福井工業大学平成 19,20 年度特別研究費の援助のもとに行われている. ここに記して謝意を表する.

【参考文献】

- [1] J. Martinez and M. Silva, "A simple and fast algorithm to obtain all invariants of a generalized Petri net," Second European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, eds. C. Girault and W. Reisig, Informatik Fachberichte, no.52, pp.301-310, Springer, 1982.
- [2] J. Vautherin and G. Memmi, "Computation of flows for unary predicate transition nets," in Advances in Petri Nets, LNCS, vol.188, ed. G.Rozenberg, Springer,1984.
- [3] J.M. Colom and M. Silva, "Convex geometry and semi - flows in P/T nets - A comparative study of algorithms for computation of minimal P-semiflows-," Proc. of the 10th International Conference on Application and Theory of Petri Nets: pp. 79-112, June 1989.
- [4] 翁長健治, 渡辺敏正, "ペトリネット・インバリエントの基礎的性質と計算法," ペトリネットとその応用, 離散事象システム研究専門委員会編, pp.41 - 64, 計測自動制御学会, 1992.
- [5] F. Krückeberg and M. Jaxy; "Mathematical methods for calculating invariants in Petri nets," LNCS, vol.266, pp.104 - 131, Springer - Verlag, 1987.
- [6] 松本忠, "コンカレントシステムにおけるインバリエントー展望ー," 信学技報, vol.98, no.565, CST98-36, pp.51-58, Jan.1999.
- [7] 坂和正敏, 数理計画法の基礎, p.64, 森北出版, 1999.
- [8] 松本忠, 吉田知弘, 高島浩二, "ペトリネットの初等的インバリエントのすべてを線形計画法によって求めるための二, 三の考察," 信学技報, vol.100, no.103, CST2000-10, pp.73-80, June 2000.
- [9] 二階堂副包, 経済のための線型数学, p.187, 培風館, 1961.
- [10] 高田真樹, 松本忠, 茂呂征一郎, "P/T ペトリネットの状態方程式の非負有理数解の生成元から非負整数解の生成元の導出アルゴリズム," 信学技報, vol.102, no.589, CST2002-46, pp.23-28, Jan. 2003.
- [11] 高田真樹, 茂呂征一郎, 松本忠, "P/T ペトリネットの状態方程式の解の generator の導出法ー拡張 Fourier-Motzkin 法を用いた場合ー," 信学技報, vol.101, no.458, CAS2001-65, CST2001-18, pp.9-16, Nov.2001.

(平成 21 年 3 月 31 日受理)