フーリエ多数回変換に関する研究

白 崎 智 義*

A Study of Repeating Transformation's Work at Fourier Transform Continuously

Chiyoshi SHIRASAKI

By using a mathematical method of Fourier Transform, we can get a figure of spectrum in frequency states from a picture's figure of time's states.

As known generally, the times of this transformation process are 2.

Now, the results of study for the another method upon transformation, following were cleared.

1. Changing the transformation's order.
2. Increasing transformation's times to many times that exceed 2 times.
3. Effect of swapping process used in transformation's work.

1. まえがき

ある図形をフーリエ変換して生じたパワー・スペクトルを、フィルタ処理することなくそのまま逆変換するとそっくり元の図形が復元することは既によく知られている。ところで、これは、変換と逆変換の２回の変換を行うだけである。そして、文献[1]によると、（図－４ｂ）のような図の中心部に直流成分を表す突出した複素振幅が見られるスペクトルからは、変換して原画を復元することが出来ないとある。

本研究では、この変換処理法の変換過程についてソフト的に追究したところ、(1) 変換と逆変換の実行順序を逆にしても２回の変換で原図を復元させることができる。(2) また、たとえ２回の変換で原図が復元出来なかったにしても、ＳＷＡＰを適当に使い分けしながら更に変換を継続することで４回目に復元する。(3) そして、復元には周期性のある事が分かったので、これらの事について報告する。

＊電気工学科

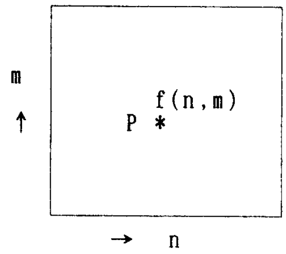
2．理論・説明

下図（n,m直交座標）内の一点Ｐにおける画像濃度f(n,m) に対する２次元フーリエ変換式を離散的に表示すると、次式のようになる。

$$F(u,v)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f(n,m)W_N^{nu}\cdot W_M^{mv} \qquad (1)$$

そして、逆変換の式は、次式のようになる。

$$f(n,m)=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} F(u,v)W_N^{-nu}\cdot W_M^{-mv} \qquad (2)$$



（図－１）画点の位置

N、M は、それぞれ n 軸、 m 軸上の分割数，そして、W_N^{un} とW_M^{vm} は回転子である。

(1) 式で入力画像を変換して複素振幅スペクトルを求め、引続き、これを、(2) 式で逆変換すると、元の画像が戻って来る。そして、ここのところで、変換作業をとめずに引続き継続して３回以上の変換を行う。

つまり、多数回の繰り返し変換は、

FF_4 [FF_3 [FF_2 [FF_1 [原画]]]]

ここで、　[FF_n (n = 1～4)= FFT or IFFT]

のように、一つの原画を２回にとどめないで、３回を越える多数回の変換処理が出来ないものかと考えている。

変換を繰り返すことで、画像とスペクトルは下記のように交互に出現する。

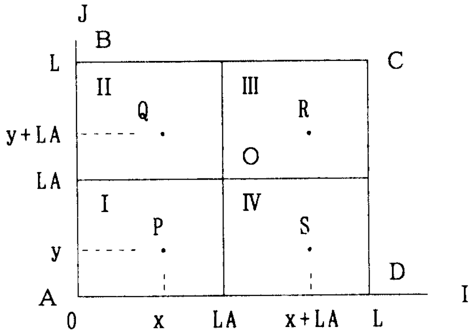
原画 $\xrightarrow{FF_1}$ スペクトル$_1$ $\xrightarrow{FF_2}$ 復元$_1$ $\xrightarrow{FF_3}$ スペクトル$_2$ $\xrightarrow{FF_4}$ 復元$_2$

添え字は、何回目の変換であるかを示している。ここで、ＦＦは、フーリエ変換（ＦＦＴ）か，フーリエ逆変換（ＩＦＦＴ）かどちらであってもよい。尚、このように変換を多数回繰り返し実施しても、ＳＷＡＰの有無を適当に介在させることで、実際に原画が復元出来るかどうかは、実験で確認することにした。

画像に対するフーリエ変換処理を開始してから、一回目の変換が終了した後、その時点で得たデータをＳＷＡＰさせたり、しなかったりするが、ＳＷＡＰは次に述べる方法で行っている。

説明の都合上、仮にＩ，Ｊを直交座標とし、この中に縦、横の長さをＬとする平面画像があるものと想定する。ここで、Ｌは正方形の一辺の長さを離散個数で表示したものである。そして、この画像領域を（図－２）のように、Ｉ＝ＬＡ、Ｊ＝ＬＡ（注、LA＝L/2 ）の境界線でⅠ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳの４領域に分割する。ＳＷＡＰは、領域ⅠとⅢの間でのデータ交換及び領域ⅡとⅣの間でのデータ交換を行う。具体的には、領域Ⅰ中に一画点Ｐの濃度 X(I,J) を仮定した場合、この画点からＩ，Ｊ両方向に＋ＬＡだけ離れた画点Ｒ（領域Ⅲの中）の濃度X(I+LA,J+LA)との間で、この二つを入れ替える。そして、さらに画点ＰからＪ方向に＋ＬＡだけ離れた位置にあ

る領域II内にある画点をＱとし、その画点の濃度を X(I,J+LA)とする。そして、この画点Ｑから I 方向に＋ＬＡ、Ｊ方向にＪ－ＬＡだけ離れた領域内の画点Ｓの濃度を X(I+LA,J)とする。そして、画点ＱとＳの間でもデータの交換を行う。このような要領の繰り返しで、領域内のすべての画点についてデータの交換を行う。プログラム処理は、ＢＡＳＩＣ文の場合下記のようになる。




```
10  FOR I=1 TO LA
20  FOR J=1 TO LA
30  SWAP X(I, J    ),X(I+LA,J+LA)
40  SWAP X(I, J+LA),X(I+LA,J    )
50  NEXT J,I
```

（図－２）ＳＷＡＰの位置関係

フーリエ変換の正変換と逆変換の働きは、一応回転子内のπが＋πか－πかによって区別されているところから、本論では、変換をＦＦとし、更に＋πの場合の変換をＦＦｐ、－πの変換をＦＦｎのように記号表示して、以後の説明にこれを利用することにした。

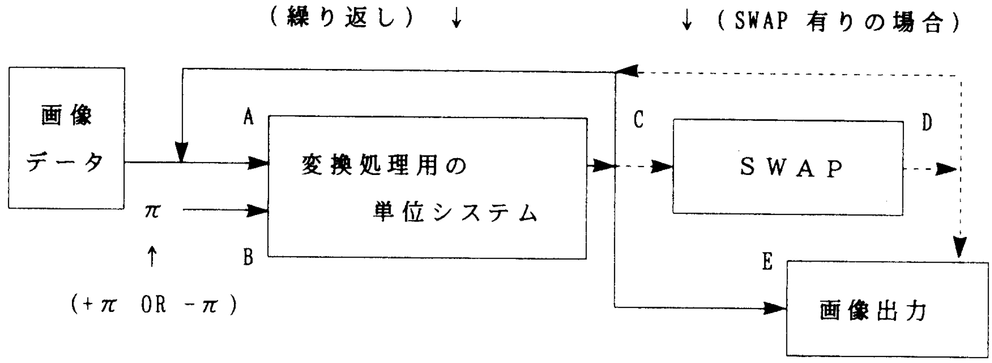
フーリエ変換は画像データを一次変換した後、続けて２次の変換をすることで、目的の画像処理を行っている。ところが、実際には、πの ＋，－ いずれかの選択、そしてＳＷＡＰの有無によって、どのようにフーリエ変換させるかである。つまり、この４つの選択子が２次変換作業を２回で復元終了させる為の条件になっている。

連続変換は、２回変換で復元出来なかった場合において、さらに続けて３回以上行うことを考えている。この場合、条件４つの選択子の組合せによって非常に多くの分類分けが考えられるが、この中には、４回目で元の画像が復元できる組合せが含まれていることが実験的に分かっている。

連続変換の構成図は（図－３）の通りである。図中に、ＳＷＡＰは点ＣとＤの間にあって変換の処理後に使うように示している。変換後、ＳＷＡＰをしない時は、Ｃ点で折り返しとなるが、ＳＷＡＰをした場合は当然Ｄ点で折り返しとなる。

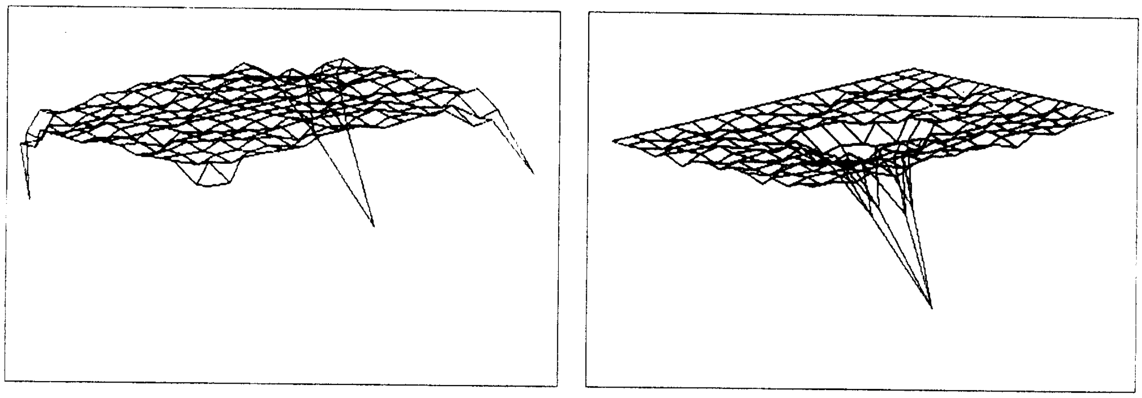
変換システムは基本的な処理形式のものがあって、これを＋πと－πの入力で変換と逆変換に使い分けて利用する事が出来る。そして、繰り返し処理用にも使用する。

繰り返し処理を行っていると、スペクトル振幅値が次第に増大するので、グラフィック表示がディスプレー画面からはみ出ないように注意する。



（図－３）繰り返し変換実行の流れ図

第１回目の変換が終わった時点（Ｃ）と、ＳＷＡＰした後の時点（Ｄ）のそれぞれの場合のスペクトル画像の一例を（図－４）に示しておく。ここで、ａ図とｂ図は相互にＳＷＡＰの関係になっていることが伺われる。即ち、（ａ）図の４隅に突起状の縦線が現れているが、これをＳＷＡＰすると、これらの突起線がすべて画面中央の位置に集合して（ｂ）のように、一つの大きな突起線が見られる。



ａ．ＳＷＡＰしない場合　　　　　　ｂ．ＳＷＡＰした場合

（図－４）ＳＷＡＰの有無によるスペクトル図の違い

ここで、（図－４）に関連して、これらから直接元の図形を復元させるには、例えば次の一例があげられる。

ｱ.（ａ）の図の場合は、

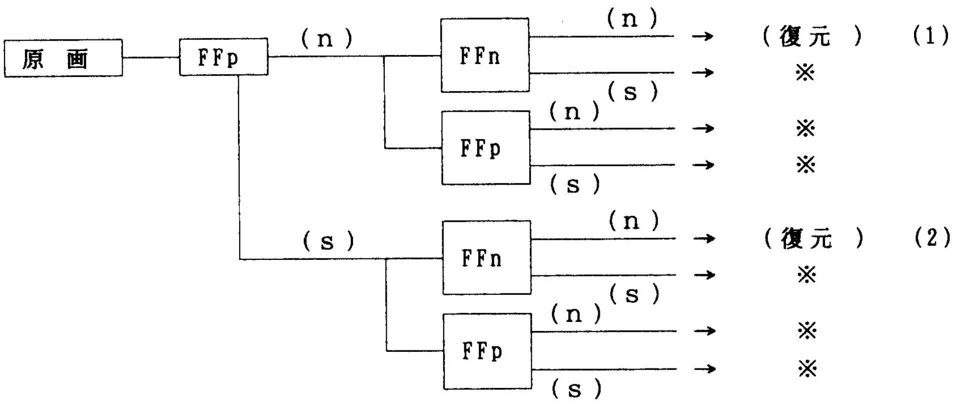
ＦＦＴ（ＳＷＡＰしない）—>ＩＦＦＴ（ＳＷＡＰしない）

ｲ.（ｂ）の図の場合は、

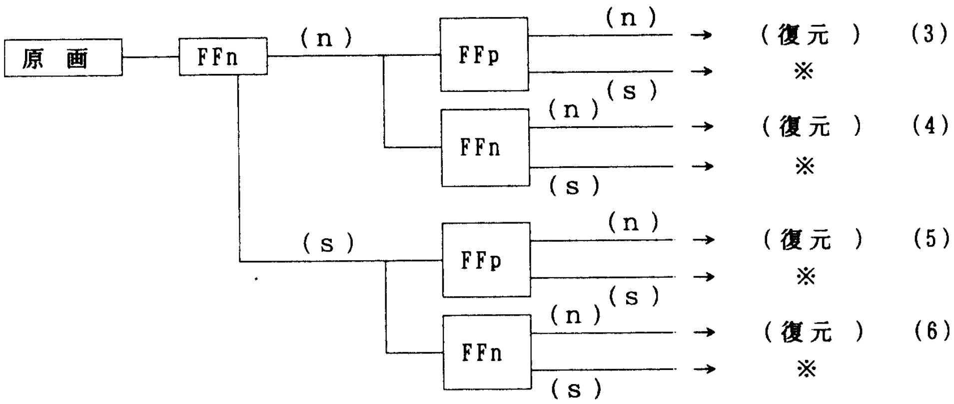
ＦＦＴ（ＳＷＡＰする　）—>ＩＦＦＴ（ＳＷＡＰしない）

連続変換の組立てはこの他にも多数ある。いま、連続変換の回数を２回とした場合、変換順序として考えられるいろいろの場合を図にまとめると、（図－５）（図－６）のようになる。尚、図中ｓ，ｎは、ＳＷＡＰするものを（ｓ）、ＳＷＡＰしないものを（ｎ）と明記したまでである。

（図－５），（図－６）内の※印の箇所は、ここでは、２回の変換での復元は出来なかったが、継続してさらに変換を繰り返し続けると、４回目にしてやっと復元するというものが含まれていることを示している。



（図－５）２回目までの変換系統図（ＦＦｐ開始）



（図－６）２回目までの変換系統図（ＦＦｎ開始）

上図から、連続２回の変換で復元できる場合は、次ぎのように整理できる。

(1)（図－５）は、ＦＦｐを変換処理の最初に利用した場合の変換系統図である。この図から言えることは、次の通りである。即ち、

ＦＦｐをＳＷＡＰ無しで先行させる時は、次回のＦＦｎでもＳＷＡＰ無しにすればよく、原図の復元ができる。(No.1)

ＦＦｐをＳＷＡＰ付きで先行させる時は、次回のＦＦｎでＳＷＡＰをさせないでおけば、原図が復元できる。(No.2)

(2)（図－６）は、ＦＦｎを変換処理の最初に利用した場合の変換系統図である。この図から言えることは、次の通りである。即ち、

ＦＦｎを先行させる場合は、これがＳＷＡＰをしようとしまいと関係なく、次の変

換ではＦＦｎ、ＦＦｐをＳＷＡＰしないで実行すればよく、原図の復元ができる。(No.3,4,5,6)

(3)　復元できた場合、更に変換を続けていると復元の周期が発生し、２回目毎あるいは４回目毎に復元現象が見られる。

３．変換確認実験

画像文字の原図はスキャナーの利用で作成した。即ち、スキャナーで画面に取り込んだ画像文章の中から、縦、横の長さを２の冪乗の大きさ（例えば、16x16，64x64但し、標準メモリの関係上128x128 は利用出来ない。）にした方形状の中で取り囲んだ文字を作る。そして、この文字をバイナリー形式で、フロッピー・ディスクに格納して置く。

また、ＢＡＳＩＣのＤＡＴＡ文も研究用データの作成に利用した。

フーリエ変換用ソフトは研究用に独自に作成した。

（表－１）は、２次元方向に対してフーリエ変換を実際に連続４回実施して、復元できたものの中から数例を表示したものである。表中のＦＦＴ，ＩＦＦＴの右下の添え数字は何回目の変換であるかを意味している。そして、▽は原図を左右あるいは上下に反転したような形状の図で表示され、◎は原図が正しく復元出来たことを示している。

（表－１）　多数回変換状況一覧表　（２次元変換の場合）

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FFT_1	S	S	N	N					N	S
$IFFT_1$	↓	↓	↓	↓	S	S	N	N	↓	↓
FFT_2	N	↓	S	↓	↓	N◎	S	N◎	N▽	S
$IFFT_2$	↓	N◎	↓	N◎	S◎		↓		↓	↓
FFT_3	S		N				↓		N	S
$IFFT_3$	↓		↓				N		↓	↓
FFT_4	N◎		S◎				S◎		N◎	S◎
$IFFT_4$										

(1) 原図が２回目に復元できるのは、2，4，5，6，8 番目の場合である。これらの間で共通して言えることは、最初の変換タイプと異なるタイプで２回目の変換を行う時のＳＷＡＰの取扱いが、S→NかN→Nになっている(No.2,4,6,8)。そして、ＩＦＦＴだけで変換する場合は、S→S即ちともにＳＷＡＰをする(No.5)。

(2) 逆変換を全然実行しなくても、ＦＦＴだけで原図の復元が出来ることを 1，3，9，10番目が示している。そして、変換の中でＳＷＡＰすることと、しないことを交互に実施する場合が(No.1,3)、４回ともＳＷＡＰしない場合が(No.9)で、ＳＷＡＰする場合が(No.10) である。

(3) 全くＳＷＡＰしないならば、第１回目と第２回目の変換タイプを違わせておけば、回数の少ない２回で復元できる。(No.4,8)

画面の片方向だけで、複数回のフーリエ一次変換を行ったところ、次表の結果が得られた。

(表－２) 多数回変換状況一覧表 (１次元変換の場合)

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FFT_1	N		S	S	S	N				
$IFFT_1$	↓	N	↓	↓	↓	↓	S	S	N	N
FFT_2	N◎	↓	S	↓	↓	S	↓	N	↓	S
$IFFT_2$		N◎	↓	S	N	↓	S	↓	S	↓
FFT_3			S	S	S	N	↓	↓	↓	↓
$IFFT_3$			↓	↓	↓	↓	S	S	N	N
FFT_4			S◎	↓	↓	S◎	↓	N◎	↓	S◎
$IFFT_4$				S◎	N◎		S◎		S◎	

(1) ２回の変換で復元させるには、ＦＦＴ$_1$とＦＦＴ$_2$、ＩＦＦＴ$_1$とＩＦＦＴ$_2$、の２つの場合において、ともにＳＷＡＰ無しの変換処理を行えばよい。(No1,2)

(2) ＦＦＴ(SWAP)とＩＦＦＴ(SWAP)は、ともにそれだけで連続４回の繰り返しをすれば、復元出来る。(No3,7)

(3) ＦＦＴとＩＦＦＴの組合せをきめて、これを２回繰り返す方法の変換もある。

例えば、NO.5の場合 FFT_1(S)と$IFFT_2$(N)、FFT_3(S) と$IFFT_4$(N)とはともに同じ型の組合せになっている。

つまるところ、画像の片方向だけのフーリエ１次変換であっても、図の復元が可能であることを示している。そして、復元までの変換回数は２回の場合もあるが、大半は４回である。

尚、ここで確認しておきたいことは次の事である。

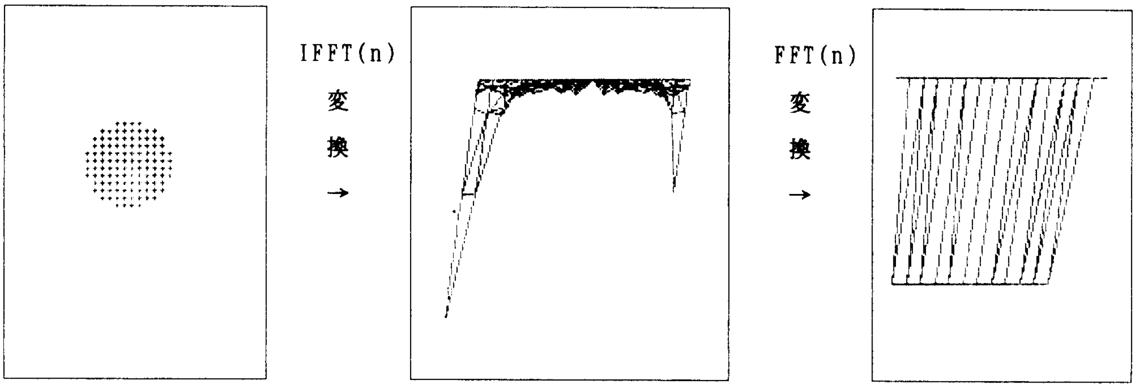
(1) 出力画像の長さは変換を繰り返す都度長くなる。

(2) 復元$_1$，復元$_2$のどちらかの箇所で、大方の場合原画が再現される。

(3) 一般に言われているフーリエ変換は２回の変換処理で終っている。が、このほかにも、表－１，２で示すように、復元出来るＦＦＴ，ＩＦＦＴの組合せが存在する。

(4) 変換作業を多数回実行している中で、いったん復元現象が現れたら、この後の変換作業は周期を繰り返えすのみである。

(図－７) は、参考までに、(表－１, No.8) のＩＦＦＴ (ｎ)，ＦＦＴ (ｎ) の順に２回変換処理した場合の実験例を図示したものである。(ａ) は円形の原画。(ｂ) は２次元変換で得たスペクトルで横から見た状態。(ｃ) は復元図であるが、ただし原画の濃度値の大きさを (ａ) 図の横から見ている状態になっている。



（a）原画　（b）横から見たスペクトル　（c）原画の濃度値

（図－7）IFFT（n），FFT（n）の順による連続処理

4．まとめ

本論に述べてきたところから、次のようなことが分かって来た。

(1) フーリエの変換と逆変換の取扱いはお互いに逆の関係にあるところから、よく知られている変換順序を入れ替えても、SWAPの問題はあるが復元は可能である。

(2) また、フーリエ変換は、4つの選択子（π の ＋，－，SWAPの有無）の組合せで、幾通りもの変換が考えられる。選択子の組合せを誤ると、変換作業は2回で終了することができない。が、これを更に続けていくと、4回目に復元させることが出来る。

(3) そして、原画像の復元だけでよいならば、2次元変換をするまでもなく1次元だけでよい。

(4) 復元は周期性を持っている。その周期は、2回目か4回目に起こっている。

(5) 3次元グラフィックにおいて、3軸間の相対関係位置を適当に決める事で、原画像の濃度値を長さの形で直視することができる。

文献

(1) 田村秀行監修 日本工業技術センター編 コンピュータ画像処理入門 P.45-46 総研出版 1985

(平成5年12月18日受理)