

磁区が周期的に反転する磁気光学媒質における波動の伝搬特性

堤 誠*

Wave Propagation Characteristics in the Magneto-Optic Medium Loaded Periodically Magnetic Domains with Opposite Direction of Magnetization.

Makoto Tsutsumi

Wave propagation characteristics in the magneto-optic slab medium periodically loaded by magnetic domains with opposite direction of magnetization was analysed using a singular perturbation technique. Maxwell's equation under periodic domain profile was expanded in series of perturbed electromagnetic fields and boundary conditions in the first order around Bragg frequency. The solvability condition of perturbed field leads to the coupled mode equation which governs the Bragg reflection characteristic of waves due to the periodic domain with half wavelength order. Coupling between forward and backward waves on the Bragg condition was not found for the symmetric mode but for the antisymmetric mode of TM wave, which has a potentiality to the optical filter application.

1. まえがき

イットリウム鉄ガーネット (YIG) にはバイアス磁界が弱い場合、図1に示すようなストライプ状のドメイン (磁区) が存在することが知られている。このドメインはブロッホの磁壁を介して磁化が反転する二種類の領域から構成され、その大きさは数 μm から数十 μm で、磁界により移動するとともに、その形状も変化する。一方、この磁界によるドメインの変化は光に対して等価的に屈折率の変化として応答 (磁気光学効果) し、これを応用すれば光-磁気センサーあるいは最近ではマイクロ波の高周波磁界によるドメインの振動に関連して、マイクロ波・光アイソレータ、変調器の応用も可能となる^{2),3)}。

本論文ではこの様な磁区がストライプ状で光の波長の大きさで周期的に反転する磁気光学媒質における波動 (光) の伝搬特性を、光・磁気周調フィルタならびに変調器への応用の関点から理論的に考察する。



図1. YIGに見られるストライプ状ドメイン

* 経営工学科

2. 理 論

図2に理想化されたストライプ状の磁区の問題の構成を示す。同図は厚さ $2h$ の磁気光学媒質 (YIG) のスラブであり、周期 Λ で磁区が反転する。いま、この磁区が厚さ $2h$ で、 z 方向に一様で、かつ y 方向に無限に存在するものとする。図2に示す A の磁区の等価的な屈折率を

$$\widehat{\varepsilon}_A = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_r & j\varepsilon_{av} & 0 \\ -j\varepsilon_{av} & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

とテンソルの形で置き、Bの磁区を

$$\widehat{\varepsilon}_B = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_r & -j\varepsilon_{av} & 0 \\ j\varepsilon_{av} & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

と置く。この様に屈折率が周期的に周期 Λ で変化する場合、 Λ が波長に近いとブラッグ反射特性が現れる。ブラッグ反射特性に関する波動の解析法は歴史は古く、多くの手法が提案されているが、ここでは解が比較的簡単に解析的に求まる特異摂動法を採用する^{4),5)}。

i) 特異摂動法による解析

すでに定義した屈折率テンソル(1)および(2)が周期 Λ で y 方向に無限に周期的に存在しさらにその周期的な変化が微小であると仮定すると、式(1),(2)における磁区の反転に伴うテンソルの非対角項 ε_{av} は

$$\varepsilon_{av} = \delta\eta \cos ky, \quad K = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (3)$$

と置ける。ここに δ は一次の微小量 (摂動) を、 η は変調率を表わす。マクスウエルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \widehat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (5)$$

で波動が z 方向に依存せず、さらに TM モード (H_z, E_x, E_y) を考える。この TM モードの界を式(3)に関連して δ の一次の項で展開し、

$$H_z = H_{z0} + \delta H_{z1} \quad (6)$$

と置く。また、 y 方向のオペレータ

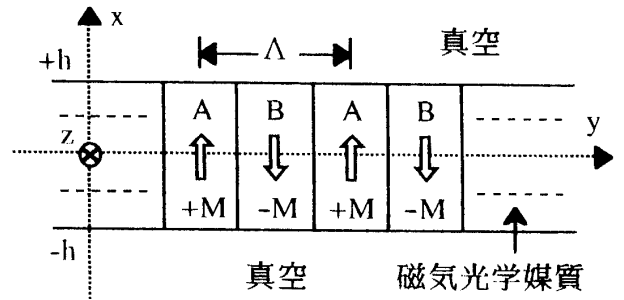


図2. 磁区が周期 Λ で反転するスラブ状磁気工学媒質

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_0} + \delta \frac{\partial}{\partial y_1} \quad (7)$$

と置く。さらに角周波数 ω をブラッグの角周波数 ω_0 のまわりで δ により展開し,

$$\omega = \omega_0 + \delta \omega_1 \quad (8)$$

と置く。

式(3),(6)そして(7),(8)を, マクスウエルの方程式(4),(5)に代入し δ の零次 (非摂動界) および一次 (摂動界) ごとに界を整理し波動方程式を磁気光学媒質中で求めると,

$$\frac{\partial^2 H_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z0}}{\partial y_0^2} + \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r H_{z0} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z1}}{\partial y_0^2} + \omega_1^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r H_{z1} = & -2 \left\{ \frac{\partial^2 H_{z0}}{\partial y_0 \partial y_1} + \omega_0 \omega_1 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r H_{z0} \right\} \\ & - j \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_{av}}{\partial y_0} \frac{\partial H_{z0}}{\partial x} \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。式(9),(10)に関連して図2に示す真空中における界は, $\epsilon_r = 1$, $\epsilon_{av} = 0$ と置いて

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}_{z0}}{\partial y_0^2} + \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 \bar{H}_{z0} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}_{z1}}{\partial y_0^2} + \omega_1^2 \epsilon_0 \mu_0 \bar{H}_{z1} = -2 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{H}_{z0}}{\partial y_0 \partial y_1} + \omega_1 \omega_0 \epsilon_0 \mu_0 \bar{H}_{z0} \right\} \quad (12)$$

となる。ここに \bar{H}_{z0} , \bar{H}_{z1} は真空中の δ の零次, 一次の磁界の界成分である。

一方この系における境界条件は電磁界の接線成分が $x = \pm h$ において連続であることから, δ の零次および一次毎に界を整理して

$$H_{z0} = \bar{H}_{z0}, \quad E_{y0} = \bar{E}_{y0} \quad (13a)$$

$$H_{z1} = \bar{H}_{z1}, \quad E_{y1} = \bar{E}_{y1} \quad (13b)$$

となる。式(13)で

$$\begin{aligned} E_{y0} &= \frac{-1}{j\omega_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\partial H_{z0}}{\partial x} \\ E_{y1} &= \frac{1}{j\omega_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \left\{ -\frac{\partial H_{z1}}{\partial x} + j \frac{\epsilon_{av}}{\epsilon_r} \frac{\partial H_{z0}}{\partial y_0} + \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\partial H_{z0}}{\partial x} \right\} \\ \bar{E}_{y0} &= \frac{-1}{j\omega_0 \epsilon_0} \frac{\partial \bar{H}_{z0}}{\partial y_0} \\ \bar{E}_{y1} &= \frac{1}{j\omega_0 \epsilon_0} \left\{ -\frac{\partial \bar{H}_{z1}}{\partial x} + \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\partial \bar{H}_{z0}}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

である。

δ の零次の H_{z0} および \bar{H}_{z0} の界を y 方向に伝搬する進行波 (β_r) と反射波 (β_s) との和で表わし、

$$H_{z0} = A_{or} \frac{\cos k_r x}{\cos k_r h} e^{-j\beta_r y_0} + A_{os} \frac{\cos k_s x}{\cos k_s h} e^{j\beta_s y_0} \quad (14)$$

$$\bar{H}_{z0} = B_{or} e^{-\alpha_r(x-h)} e^{-j\beta_r y_0} + B_{os} e^{-\alpha_s(x-h)} e^{j\beta_s y_0} \quad (15)$$

と置く。ここに A_{or} , A_{os} , B_{or} , B_{os} は未知定数で y_1 の関数である。また k_r , k_s , α_r として α_s は零次の波動方程式(9)と(11)から

$$k_r = \sqrt{\omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r - \beta_r^2} \quad k_s = \sqrt{\omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r - \beta_s^2}$$

$$\alpha_r = \sqrt{\beta_r^2 - \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0} \quad \alpha_s = \sqrt{\beta_s^2 - \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0}$$

の関係をj得る。ここに β_r は進行波の、 β_s は反射波の伝搬定数である。

式(14),(15)を零次の境界条件式(13a)に代入し、未知定数 A_0 , B_0 を消去すると、TM モードの進行波および反射波の分散関係式、

$$k_r \tan k_r h = \epsilon_r \alpha_r, \quad k_s \tan k_s h = \epsilon_r \alpha_s \quad (16)$$

を得る。式(16)は厚さ $2h$ のスラブ状磁気光学媒質における分散特性を与え、その特性の概略を図3に示す⁵⁾。同図は進行波 (β_r) の曲線と、反射波 (β_s) の曲線を示すが、 β_r の場合、基本波と一次の高次モードを描いている。また反射波 (β_s) は後に述べるブラッグの条件を考慮して、 $-\beta_s$ の曲線を Λ だけ右に移行して描いている。また、 β_r と β_s の曲線はP点とQ点で交叉する。この交叉する点における周波数がブラッグ反射の周波数 (ω_0) を与えるが、ここでは基本モード

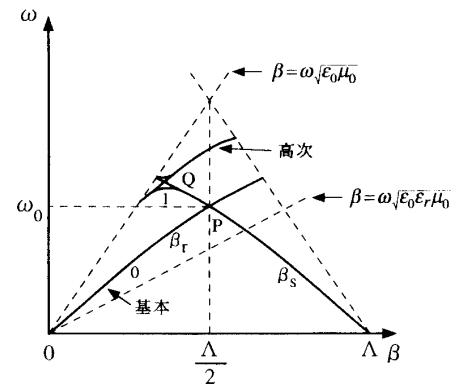


図3. 分散曲線とブラッグ結合

間の交点Pと基本モードと高次モードとの交点Qにおけるブラッグ結合 (反射) 特性を求める。

ii) 基本モード間のブラッグ反射特性

いま、磁気光学媒質中の摂動界 H_{z1} を

$$H_{z1} = \phi_r e^{-j\beta_r y_0} + \phi_s e^{j\beta_s y_0} \quad (17)$$

と置き、式(10)に代入し、式(14)の関係をj用いると、 ϕ_r に関して

$$\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} + k_r^2 \phi_r = P_1 \cos k_r x + Q_1 \sin k_r x \quad (18)$$

の微分方程式を得る。ここに P_1 および Q_1 は

$$P_1 = -2 \left\{ -j\beta_r \frac{\partial A_{or}}{\partial y_1} + \omega_0 \omega_1 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r A_{or} \right\} \frac{1}{\cos k_r h}$$

$$Q_1 = \frac{k\eta}{2} \cdot \frac{k_s}{\epsilon_r} \cdot \frac{1}{\cos k_s h} A_{os}$$

である。なお、この式の導出にあたって、ブラッグの条件

$$\beta_r + \beta_s = K \quad (19)$$

を用いた。ここにKは式(3)に示した磁区の反転の周期 Λ に関連する定数である。同じく式(17)の ϕ_s に関する方程式も A_{or} を A_{os} 、 β_r を β_s と置き換えた形で求まる。

いま、 $k_r = k_s$ 、 $\beta_r = \beta_s$ の場合を考える。これはTM波の対称モード間のブラッグ結合特性を求めることになり、図3に示すP点で結合特性を求めることになる。

式(18)の ϕ_r の解として

$$\phi_r = s_1 x \frac{\sin k_r x}{\cos k_r h} + s_2 x \frac{\cos k_s x}{\cos k_s h} + \frac{\cos k_r x}{\cos k_r h} A_{lr} \quad (20)$$

$$s_1 = \frac{1}{2k_r} \left\{ 2j\beta_r \frac{\partial A_{or}}{\partial y_1} - 2\omega_0 \omega_1 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r A_{or} \right\}$$

$$s_2 = -\frac{K\eta}{4\epsilon_r} A_{os}$$

を得る。一方、 ϕ_s に関しても同様な界を対称モード間のブラッグ結合による非摂動界から求める。なお、式(20)における A_{lr} は ϵ_{av} の摂動により生じる δ の一次の未知定数である。

一方、真空中における δ の一次の摂動界 H_{z1} を

$$\bar{H}_{z1} = \bar{\phi}_r e^{-j\beta y_0} + \bar{\phi}_s e^{j\beta y_0} \quad (21)$$

と置いて、式(12)から、 $\bar{\phi}_r$ に関する微分方程式

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_r}{\partial x_2^2} - \alpha_r^2 \bar{\phi}_r = P_0 e^{-\alpha_r(x-h)} \quad (22)$$

$$P_0 = 2j\beta \frac{\partial B_{or}}{\partial y_1} - 2\omega_1 \epsilon_0 \mu_0 \omega_0 B_{or}$$

を得る。式(22)の解を求めると、

$$\bar{\phi}_r = (T x e^{-\alpha_r(x-h)} + B_{lr} e^{-\alpha_r(x-h)}) e^{-j\beta_r y_0} \quad (23)$$

ただし、

$$T = \frac{1}{2\alpha_r} \left\{ -2j\beta_r \frac{\alpha B_{or}}{\alpha y_1} + 2\omega_0 \omega_1 \epsilon_0 \mu_0 B_{or} \right\}$$

を得る。ここに B_{lr} は δ の一次の摂動により生じる未知定数である。同様に $\bar{\phi}_s$ の界も、 $B_{or} \rightarrow B_{os}$ 、 $\beta_r \rightarrow \beta_s$ と置き換えた形で求まる。

式(17)と式(21)そして式(14),(15)を式(13b)の δ の一次の境界条件に代入し、 δ の一次によって生じた新しい未知定数、 A_{1r} , B_{1r} を式(16)の分散関係を用いて消去 (Solvability Condition) すると、ブラッグ反射特性によって生じる進行波と反射波との間の結合を与える方程式

$$\omega_1 A_{or} - j\nu_g \frac{\partial A_{or}}{\partial y_1} = C^+ A_{os}, \quad \omega_1 A_{os} + j\nu_g \frac{\partial A_{os}}{\partial y_1} = C^- A_{or} \quad (24)$$

を得る。ここに ν_g は群速度で

$$\nu_g = \frac{\beta[\epsilon_r(\alpha_r^2 + k_r^2) + \alpha_r h(\epsilon_r^2 \alpha_r^2 + k_r^2)]}{\omega_0 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r [\alpha_r h(k_r^2 + \epsilon_r^2 \alpha_r^2) + \epsilon_r \alpha_r^2 + k_r^2]}$$

$$\beta_r = \beta_s = \beta$$

である。 C は β_r と β_s との間のP点での結合量を示す定数で

$$C^\pm = \frac{\pm \frac{1}{2\epsilon_r}(\beta - \frac{K}{2})\eta}{\omega_0 \epsilon_0 \mu_0 \left\{ \frac{\epsilon_r^2 \alpha_r}{k_r^2} (1 + \epsilon_r \alpha_r h) + \epsilon_r (h + \frac{1}{\alpha_r}) \right\}}$$

である。式(24)を解くと、ブラッグ反射特性が求まり、その特性が光フィルタなどへの応用の基礎を与える。しかしながら式(24)でブラッグの条件(19)を考慮すると、 C は零となる。この事はこの構造ではブラッグ反射特性は現われないことになり、磁区の反転による光(波動)への影響は無い事になる。

iii) 高次モード間のブラッグ結合特性

ii) では

$$k_r = k_s, \quad \beta_r = \beta_s$$

と伝搬定数 β に関して対称モード間のブラッグ結合に着目したが、式(18)に関連して、 $k_r \neq k_s$ ($\beta_r \neq \beta_s$)の解も導出できる。また、この場合、図3に示すQ点でのブラッグ反射特性を評価することになる。その界は ϕ_r に関して

$$\phi_r = S_3 x \frac{\sin k_r x}{\cos k_r h} + S_4 \frac{\sin k_s x}{\cos k_s h} + A_{1r} \frac{\cos k_r x}{\cos k_r h} \quad (25)$$

ここに

$$S_3 = \frac{1}{2k_r} \left\{ 2j\beta_r \frac{\partial A_{or}}{\partial y_1} - 2\omega_0 \omega_1 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r A_{or} \right\}$$

$$S_4 = \frac{1}{k_r^2 - k_s^2} \frac{K\eta}{2\epsilon_r} k_s A_{os}$$

である。同様に ϕ_s 解も式(25)の形で求まる。真空中の $\bar{\phi}_r$ 式(23)と(25)そして零次の非摂動解を δ の一次の境界条件式(13b)に代入すると、式(24)と同様な結合モード方程式を得る。この場合、結合係数 C は C^+ と C^- の値が異なった形となり、

$$C^+ = \frac{\eta k_r^2 \alpha_r}{2\omega_0 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \frac{\left\{ \frac{K}{k_r^2 - k_s^2} (k_s^2 + \epsilon_r^2 \alpha_r \alpha_s) + \beta_s \right\}}{\left\{ \epsilon_r^2 \alpha_r^2 (1 + \alpha_r h \epsilon_r) + k_r^2 \epsilon_r (1 + h \alpha_r) \right\}}$$

$$C^- = \frac{-\eta k_s^2 \alpha_s}{2\omega_0 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \frac{\left\{ \frac{K}{k_s^2 - k_r^2} (k_r^2 + \epsilon_r^2 \alpha_r \alpha_s) + \beta_r \right\}}{\left\{ \epsilon_r^2 \alpha_s^2 (1 + \alpha_s h \epsilon_r) + k_s^2 \epsilon_r (1 + h \alpha_s) \right\}}$$

となる。この場合、ブラッグ条件式(19)でもCは零とならず、その値は磁区の反転に伴う ϵ_{av} の変調率 η そしてKに比例して大きくなる。

この様に特異摂動法を用いれば比較的簡単にブラッグ反射特性を解析的に求めることができる⁶⁾。

III. むすび

磁区が半波長の大きさで周期的に反転する磁気光学媒質スラブにおけるブラッグ反射特性を特異摂動法により解析し、結合モード方程式を評価することにより、スラブにおけるTMモードの進行波と反射波のブラッグ結合特性を論じた。その結果、1) TMモードの基本波との間ではブラッグ結合は無い。2) 基本波と高次モード波との間では現われる事が明らかになった。この事はブラッグ反射特性の効率を高めるためには磁気光学媒質のスラブ構造を何んらかの形で非対称性を与える必要があること、例えばガドリニウム・ガリウム・ガーネット基板上に液相成長させた磁気光学媒質導波路などが有効である。

これらの結果は解析結果を示しただけであるが、実際にこの構造を使った光フィルタなどに応用する場合、ここで求めた解を数値的に評価し、光・磁気同調フィルタとしての設計パラメータを求める必要がある⁶⁾。

参 考 文 献

- 1) R. Wolfe, E. M. Gyorgy, B. A. Lieberman, V. J. Fratello and S. J. Licht, M. N. Deeter and G. W. Day; "High frequency magnetic field sensors based on the Faraday effect in garnet thick film," Appl. phys. Lett., 60(17)27, PP. 2048 - 2050(April 1992).
- 2) M. Tsutsumi, T. Ueda and S. K. Dana; "Optical interaction with microwave in the single crystal of yttrium iron garnet" IEEE., Trans. on Magnetics, 35, 5, PP. 3172 - 3174(Sept.1999).
- 3) S. K. Dana, T. Ueda and M. Tsutsumi ; "Optical isolator-modulator in a microstrip line on yttrium iron garnet single crystal," Dig. of International Conference on Ferrite, 18Bp1 - 4(Sept. 2000).
- 4) A. Alphones and M. Tsutsumi ; "Leaky wave radiation of millimeter waves by photoinduced plasma grating in a semiconductor slab," IEEE., Proc. Microw. Antennas Prop., 146, 1, PP. 77 - 83(Feb. 1999).
- 5) C. Surawatpunya, M. Tsutsumi and N. Kumagai; "The filter characteristics of millimeter wave in a permittivity modulated dielectric slab wave guide," The trans. of the IECE of Japan, E64. 3, PP. 188 - 194(March. 1981)
- 6) 堤 誠
"磁区が周期的に反転する磁気光学媒質における波動の伝搬特性," 電気関係学会北陸支部連合大会 D-20 (平12年9月)。

(平成12年10月18日受理)