拘束系の経路積分に対するコメント

大　高　成　介

Comments for Path Integral of Constrained System

Sigeyuki OOTAKA

The path integral for singular Lagrangian is obtained by L.D.Faddeev and V.N. Popov, adapted for the quantization of a mechanical system. A few problems about this path integral are noted, and such problems can be discussed on physical and mathematical grounds.

1948年および1951年にR.P.Feynman[1]は古典力学と量子力学の関係を明らかにした素晴らしいアイディアに満ちた論文を提出した。すなわち，時刻t'での状態 $|q'\rangle$ から時刻t"での状態 $|q''\rangle$ への遷移振幅は

$$\langle q''|\exp\{-\frac{i}{h}H(q^i,p_i)\cdot(t''-t')\}|q'\rangle$$

$$=\int\exp\{\frac{i}{h}\int_{t'}^{t''}(\sum_{i}^{n}p_i\dot{q}^i-H(q^i,p_i))dt\}\prod_i\prod_{i}^{n}\frac{dp_i(t)\,dq^i(t)}{(2\pi h)^n} \tag{1}$$

となることを明らかにした。つまり，彼は位相空間の軌道に沿った積分の指数関数のなかに古典的作用が含まれていることを見出した。ただし，$q^i=(q^1,\cdots\cdots,q^n)$，$p_i=(p_1,\cdots\cdots,p_n)$ はそれぞれ正準座標，正準運動量とし，またH (q^i,p_i) をハミルトニアンとする。

他方，L.D.Faddeev[2)3)]とV.N.Popov[3)]はこのR.P.Feynmanの経路積分を拘束系の力学に用いるために，この経路積分にP.A.M.Diracの拘束系の力学に対する取扱の方法[4)]を適用した。このことによって，電磁場，Yang−Mills場，重力場，等のゲージ場からなるsingularなラグランジァンに対して，我々はDiracの正準形式を用いなくても，便利で計算が容易な経路積分を使うことができるようになった。

さて，この論文の目的は拘束系の経路積分に関するL.D.Faddeev の論文2)および文献5)についての問題点を指摘し，その議論を行うことである。そのために，2(n-m)次元の位相空間Γ^*における正準変数$(q^a, q^{*a'}; p_a, p^*_{a'})$，[$a=1,2,..,m; a'=1,2,..n-m; q^{*a'}$と$p^*_{a'}$を独立な変数とする。]を２n次元の位相空間$\Gamma$へ正準変換し，その正準変数を$(q^i; p_i)$，[$i=1,2,..n$]とする。ただし，$\Gamma$における$\chi_a(q^i; p_i)$は$\Gamma^*$においては$p_a$となるようにする。つまり，

$$p_a = \chi_a(q^a, q^{*a'}; p_a, p^*_{a'}) = 0 \tag{2}$$

とする。従って，

$$\phi(q^a, q^{*a'}; p_a, p^*_{a'}) = 0 \tag{3}$$

とゲージを決めるための必要十分条件[5)]

$$\det\left|\frac{\partial \phi^b}{\partial q^a}\right| = \det|\{p_a, \phi^b\}| = \det|\{\chi_a, \phi^b\}| \neq 0 \tag{4}$$

が成立するならば，陰関数の定理より

$$q^a = q^a(q^{*a'}, p^*_{a'}) \tag{5}$$

とすることができる。ここで，$|\{p_a, \phi^b\}|$はポアッソン括弧$\{p_a, \phi^b\}$に対する絶対値である。従って，文献5)の第２項と第３項にマイナスの記号がついているのは誤りである。

次に，2(n-m)個の独立変数$(q^{*a'}, p^*_{a'})$による経路積分は，(1)より

$$K = \int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{a'=1}^{n-m} p^*_{a'}\dot{q}^{*a'} - H(q^{*a'}; p^*_{a'})\right)dt\right\} \times \prod_{a'=1}^{n-m}\prod_{t}\frac{dp^*_{a'}(t)\,dq^{*a'}(t)}{(2\pi h)^{n-m}} \tag{6}$$

となる。条件(2)と条件(5)を考慮しながら，独立な正準変数$(q^{*a'}, p^*_{a'})$で表されるm個の従属変数q^aと$p_a=0$なるm個の定数である正準変数(q^a, p_a)を(6)式に加えても変わらない。従って

$$K = \int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{a'=1}^{n-m}(p^*_{a'}\dot{q}^{*a'} + p_a\dot{q}^a) - H(q^{*a'}, q^a; p^*_{a'}, p_a)\right)dt\right\}$$
$$\times \prod_{a=1}^{m}\prod_{t}\delta(p_a)\,\delta(q^a - q^a(q^{*a'}, p^*_{a'}))\,dp_a\,dq^a \prod_{a'=1}^{n-m}\prod_{t}\frac{dp^*_{a'}(t)\,dq^{*a'}(t)}{(2\pi h)^{n-m}} \tag{7}$$

と書くことができる。

ここで正準変数$(q^a, q^{*a'}; p_a, p^*_{a'})$で表された（位相空間$\Gamma^*$上の）力学系を正準変数$(q^i; p_i)$で表された（位相空間$\Gamma$上の）力学系へ正準変換を行うと次のようになる。

$$K' = \int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}^i - H(q^i, p_i)\right)dt\right\}$$
$$\times \prod_{a=1}^{m}\prod_{t}\delta(\chi_a)\,\delta(\phi^a)\det\left|\frac{\partial \phi^b}{\partial q^a}\right|\prod_{i=1}^{n}\prod_{t}\frac{dp_i\,dq^i}{(2\pi h)^{n-m}} \tag{8}$$

ただし，det｜$\partial\phi^b/\partial q^a$｜はヤコービアンではなく，式(5)が成立する条件をあらわしている。そして経路積分K'は経路積分Kとdet｜$\partial\phi^b/\partial q^a$｜なる定数倍だけ違うが，適当な規格化条件によってK＝K'としても問題はない。ところが，文献5)には

$$\prod_{a=1}^{m}\delta(q^a-q^a(q^{*a'},p^*_{a'}))=\det\left|\frac{\partial\phi^b}{\partial q^a}\right|\prod_{a=1}^{m}\delta(\phi^a) \tag{9}$$

と書いてあるが，この等号は一般には成立しない。そして，このことに関して L.D.Faddeev の論文2)においても何らの特別な注意および深い考察が払われていない。また，この論文2)には上述の(8)式の中にあるδ（χ_a）はなくδ（p_a）と書かれているが，正準変数によって位相空間Γ^*から位相空間Γに変わったのであるから，δの中はp_aでなく$\chi_a(q^i,p_i)$とあらわすべきである。

さらに(8)式に(4)式の第3項を適用すると

$$K=\int\exp\left\{\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(p_i\dot{q}^i)-H(q^i,p_i)\right)dt\right\}$$

$$\times\prod_{a=1}^{m}\prod_{t}\delta(\chi_a)\,\delta(\phi^a)\det|\{\chi_a,\phi^a\}|\prod_{i=1}^{n}\prod_{t}\frac{dp_i\,dq^i}{(2\pi h)^{n-m}} \tag{10}$$

となる。拘束された力学系である位相空間Γにおける正準変数（$q^1,\ldots,q^n;p_1,\ldots,p_n$）で表示した(10)式はL.D.Faddeev によって最初に求められた。

References

1) R.P.Feynman:Space−time approach to non−relativistic quantum mechanics, Rev.Mod. Phys. **20** (1948) 367.
R.P.Feynman:An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, Phys.Rev. **84** (1951) 108.
R.P.Feynman and A.R.Hibbs:Quantum mechanics and path integrals (McGraw−Hill, New York, 1965)

2) L.D.Faddeev:The Feynman integral for singular lagrangians, Theor. and Math.Phys. **1** (1970) 1.

3) L.D.Faddeev and V.N.Popov:Feynman diagrams for the Yang−Mills field,Phys.Lett. **25B** (1967) 29.

4) S.Ootaka:ディラックの正準形式と相対論的質点の運動，福井工業大学研究紀要， **Vol. 18** (1988) 335.
S.Ootaka:ディッラクの正準形式と変分原理，福井工業大学研究紀要，**Vol. 19** (1989) 339.

5) 崎田文二，吉川圭二：経路積分による多自由度の量子力学（岩波書店，1986）.