

磁気流体力学の超伝導理論への適用について

伊 藤 博*

On Application of Magnetohydrodynamics to the Theory of Superconductors

Hiroshi ITÔ

In the previous paper, it is proved that the quantization process of the magnetic flux in the phenomenological theory of superconductors can be replaced by the conservation of the vorticity of the electron flow in magnetohydrodynamics. However, the validity of the introduction of magnetohydrodynamics into the theory of superconductors was not discussed strictly. In this paper, the condition of the charge neutrality is established in solid crystals more rigorously than the case of plasmas of which densities are exceedingly smaller than that of solids. The Debye length is estimated to be the order of the size of ions or that of the lattice constant in the solid in which the charge neutrality is satisfied. Therefore, it is concluded that magnetohydrodynamics is applicable to the electron flow in ideally none resistive solid substances where ions are nearly at rest since the temperature is extremely low.

1 序 論

液体ヘリウムは臨界温度以下で、超流動現象を示すことが知られている。¹⁾ すなわち液体ヘリウムが固体面にそって、粘性がないと考えられるほど、速い速度で拡散して行くことから超流動という言葉が生まれた。ランダウ (Landau) ²⁾ は液体ヘリウムを粘性の無い理想流体と考え、その流れの量子化を考えた。すなわち流速のうち、ポテンシャル流から“フォノン”、渦流から“ロトン”が生まれるとして、液体ヘリウムの基本的性質を説明するのに成功した。ただし“ロトン”に関しては、ランダウは定式化を見送り、その後別の^{3), 4), 5)} 研究者達によって厳密な研究が行われたのである。もともと流体力学は流体全体の巨視的な運動を記述するものであり、流体を構成する多数の粒子の性質から導きだされているものではない。逆に粒子間の複雑な相互作用がたまたま十分に取り入れられたため、全体として流体の巨視的なふるまいが合理的に記述されているとも考えられる。そこで粒子あるいは原子群モデルから出発した場合、避けて通れない超多体問題をあつかうことなく、現象論的な流体力学モデルを出発点としたランダウはやはり天才的といえることができる。もっとも物理学において、連続体モデルから出発し、最終的に原子的

*電気工学科

概念を採用して成功した例に、デバイの固体比熱理論がある。⁶⁾ いうまでもなく絶対温度零度近傍における固体の比熱の T^3 則の説明に成功したことで知られるけれど、結論的に格子振動の量子化、すなわちフォノンの導入のきっかけの概念は、流体力学における音波の式の導出と関係があることはいうまでもない。

現在、連続体力学的表現がよく使われ、成功している分野に天体論とプラズマ・核融合がある。プラズマはイオンと電子からなる2成分系の流体と考えられるけれど、十分に温度が高くなると比抵抗が小さく、従って理想流体と考えてよく、磁気流体力学がモデルとして登場する。ただこのプラズマの世界では、温度が高いせいで量子化の概念がなく、従って液体ヘリウムのような量子流体力学に相当する話は存在しない。

一方超伝導の理論⁷⁾はロンドンの方程式が中心で展開され、極低温の領域であるため、量子化の過程が展開されている。とくに磁束の量子化はロンドン方程式の直接の結果として現象論的理論の核とされている。そこでロンドン方程式の導入が、古典論では不可であるという概念が一般的に行われていることは前論文で指摘した通りである。

著者は前論文⁷⁾において磁気流体力学をまったく電気的抵抗のない流体に適應し、流れの渦度の保存則が磁束保存則と同様であることを示した。しかしながら電価の中性条件をふくめ、固体に磁気流体の概念を適用できるという議論を行っていない。そこで本論文では改めてこの点について述べることにする。

2 デバイ長

プラズマの理論のなかで、その基本なる性質の一つに電気的中性 (Charge Neutrality) を要請することがある。⁹⁾ いうまでもなくプラズマはイオンと電子が同数だけ集っており、全体として価電は中性である。しかしもし一部においてこの条件が破られるとすると電界が生じ、移動度の大きい電子が電流を作り電価は中和されることになる。そこで全体はいうまでもなく、その一部の小さな領域をとってもやはり電気的中性は保たれているというのである。そのため、静かなプラズマの表面に生じる電気的2重層による電界をのぞき、内部に巨視的な電界は存在しないことになっている。プラズマの巨視的なふるまいを記述する力学は、電磁流体ではなく、磁気流体力学とよばれることになる。このようなプラズマの電気的中性をもっと詳しく知るため、電解質におけるデバイの理論が利用されている。¹⁰⁾ いまプラズマ中に存在するイオンを考える。このイオンの作る場は球対称と考えて、 r だけ離れた場所における静電ポテンシャル ϕ を考える。イオンの周囲には反対の価電を持つ電子が集ってくるので ϕ に関するポアソンの方程式を考える。電子の平均密度を n_0 とすると、イオンの近傍ではその電価の遮蔽効果が十分でないため、電子密度 n_e は

$$n_e = n_0 \cdot \exp(e\phi/kT) \quad (2.1)$$

となる。このポテンシャル ϕ は電子の熱運動エネルギーに比べて小さいとすると

$$n_e \sim n_0 \left(1 + \frac{e \phi}{k T} \right) \quad (2.2)$$

そこで

$$\Delta n_e = n_e - n_0 = n_0 \frac{e \phi}{k T}$$

が位置 r における電荷密度となり、ポアソンの方程式は

$$-\epsilon_0 \Delta \phi = -e \Delta n_e = e^2 n_0 \frac{1}{k T} \phi$$

とかかれ、さらに

$$\Delta \phi = \frac{\phi}{\Lambda_D^2} \quad (2.3)$$

が得られる。ここで右辺の分母は

$$\begin{aligned} \Lambda_D &= \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2} \right)^{1/2} \\ &= 7.45 \times 10^3 \left(\frac{T_e}{e n_e} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

であり、デバイ長と呼ばれる。(2.3)は

$$\phi \propto \frac{1}{r} \exp \left(-\frac{r}{\Lambda_D} \right) \quad (2.5)$$

という解をもっている。この解の教えるところによると、一つのイオンを中心とし、半径 Λ_D の球の内部では電荷の中性が不十分であり、そのため静電ポテンシャルは零ではない。しかし Λ_D をこえる距離ではイオンの正電荷は電子によって全く中和されるということである。(2.4)によると Λ_D は電子温度 T_e と密度の関数であり、とくに密度の上昇とともに小さくなって行く。

いうまでもなく、固体と液体はそれぞれの密度は同程度だと考えられる。もともとそのような考え方はデバイが強電解質の理論に導入したものであり、 Λ_D の値について理論と実験の比較が行われたが、非常に興味のある議論が展開されている。すなわち(2.4)によると密度を $10^{20}/\text{cm}^3$ 個とすると Λ_D は例えば 3 \AA となり、これではイオンの大きさと同じで小さすぎることになる。そこで多少の修正が行われ、大体 30 \AA 程度の値におちついている。

我々が進めている議論においては、たぶん電解質と同程度と考えられる固体のデバイ半径の大きさを正確につめる必要はない。ただその大きさが格子間距離と同程度と考えておけば十分であり、現在行われている固体(結晶)の理論とも矛盾するものではない。ここで本論文と直接関係はないけれど以下の事に注意しておこう。現在各所で議論されている常温核融合について考えてみる。¹¹⁾ その基盤になっている物質はパラジウムという金属であり、水素を大量に吸収することで知られている。すなわち体積の10倍か10²倍の水素を吸収するといわれており、重水素についても同程度のものといわれている。もしそうとするならば、デバイ長は 1 \AA 以下ともなり、いうまでもなくパラジウムに注入された重水素原子はイオン化されるけれど、全体としては中

性であることにかわりがない。

3 渦糸モデル

MHDモデルにおいて全系のエネルギー、あるいはハミルトニアン密度は

$$H = \frac{\rho_i}{2} \vec{v}_i^2 + \frac{\rho_e}{2} \vec{v}_e^2 + \rho U + \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \quad (3.1)$$

で与えられる。¹²⁾ 今超伝導現象にあてはめてみると、イオンの速度の項はなく、また内部エネルギーUは考えなくてよい。ただし常温核融合のモデルは考える必要がある。結局

$$H = \frac{\rho_e}{2} \vec{v}_e^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \quad (3.2)$$

となる。磁気エネルギーの項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \int \vec{B}^2 dt &= \frac{1}{2\mu} \int \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} dt = -\frac{1}{2\mu} \int \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{A} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dt \end{aligned}$$

ここで

$$\vec{j} = n e \vec{v} = -\frac{n e^2}{m} \vec{A}$$

を使って

$$\frac{1}{2\mu} \int \vec{B}^2 dt = \frac{n m}{2} \int \vec{v}^2 dt \quad (3.3)$$

となり、結局(3.2)は

$$H = \int \rho \vec{v}^2 dt = \int \frac{\vec{B}^2}{\mu} dt \quad (3.4)$$

と結論される。ロンドン方程式により、渦ベクトル \vec{w} は

$$\vec{w} = \text{rot } \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{B} \quad (3.5)$$

となり、全系のエネルギー密度は渦ベクトル \vec{w} 、あるいは磁界 \vec{B} の2乗になることがわかる。超伝導モデルで考えられている反磁性電流による磁束管は磁気流体モデルによれば渦管になっていることがわかる

4 結論

本編で述べたように、電子流をMHDモデルであつかう議論は、超伝導の従来から行われている現象論によく適合していることがわかった。議論の中心となっているロンドン方程式は、固体よりずっと密度の低いプラズマにも適用できることは、前論文においても指摘したところである。

そして大きな違いは密度の違いだけではなく、固体では密度が一定であり、プラズマはそうではないということである。とくに前論文において、密度分布を与えると、プラズマ内部の磁界が計算できる関係が導きだされている。この関係を用いて具体的な例題をとくことを次の機会に紹介したいと考えている。

5 参考文献

- 1) F.London ; "Superfluids" Vol.1 (Dover Press 1960),29.
- 2) L.Landau ; Journal of Phys. 5 (1941),71.
- 3) R.Kronig & A.THellung ; Physica 18 (1952),749.
- 4) H.Ito ; Progr.Theor.Phys. 9 (1952),117.
- 5) J.M.Ziman ; Proc.Roy.Soc.A. 219 (1953),257.
- 6) F.Seitz ; "The Modern Theory of Solids" Mc Graw Hill (1940),103.
- 7) 中島 貞雄 ; "超伝導入門",培風館 (1971).
- 8) 伊藤 博 ; "福井工業大学研究紀要 " 22 (1992),91.
- 9) L.Spitzer ; "Physics of Fully Ionized Gases" (Intersciences Publishers 1959).
- 10) R.H.Fowler & E.A.Guggenheim ; "Statistical Thermodynamics"
(Cambridge Univ.Press 1939),377.
- 11) 高橋 亮人 ; "常温核融合研究 (解説),プラズマ・核融合" 68 (1992),360.
- 12) H.Ito ; Progr.Theor.Phys 48 (1972),1442.

(平成4年12月18日受理)