

プラズマ電磁流体安定性理論への Mathematica の応用 II

— 非線形エネルギー原理 —

山 岸 留次郎*

Application of Mathematica for MHD Stability Theory of Plasma II

— Nonlinear Energy Principle —

Tomejiro YAMAGISHI

Abstract: The energy principle of plasma magnetohydrodynamic (MHD) theory has been developed to a nonlinear problem in the cylindrical system. The fourth order potential energy is analytically calculated by computer making use of Mathematica. It is found that the linearly unstable state can be transformed to a nonlinearly stable helical state depending on the sign of the higher order potential energy.

1. はじめに

先に MHD エネルギー原理に Mathematica の数式処理を応用し [1], 解析の手順をそのまま数式処理により計算機に行なわせて、エネルギーの極小条件から径変位 ξ にたいする 2 階の固有微分方程式 (オイラーの方程式) を導くことが出来ることを示した。これは手計算ではかなりの時間と労力を要する作業であるが、作業の内容はルーチン的なものであり、数式処理によれば、ほとんど瞬時に間違いなく固有微分方程式が導けることを示した。これは数値計算の作業のみならず、解析的作業にも数式処理を使うことによって、計算機が役立つことを、はじめて示した意味で重要であるが、得られた線形理論の結果はすでによく知られている。ところで、もし高次非線形ポテンシャルエネルギーを評価することが可能になると、これまでの振幅が 0 の局所線形理論から有限振幅の大域的理論へ本質的拡張が可能となる。数式処理の大きな利点は複雑な解析作業を実行する点にあるが、もう一つ重要なことは得られた表式が安定性の必要又は十分条件に応用出来ることである。本研究は、数式処理が疲れを知らず長くて複雑な様々の解析的作業を間違いなく実行するという特徴を生かして、これまで非常に重要であるにかかわらず人手では扱いきれずに残されている非線形のエネルギー原理へ応用を試みたので、その成果の一部を報告する。

高次摂動項を考慮した場合、多フーリエモードが存在する乱流的な場合のモード結合による非線形問題と、単一モードの複素共役結合による非線形問題とに大別されよう。これらの問題に対して非線形の固有微分方程式が導かれるが、ここでは変位 ξ に対して簡単な分布を仮定し、エネルギーの有限変位振幅に対する依存性を調べ安定性を研究する。3 次の非線形エネルギー項までは一般の分布で数式表現を求めることが出来るが、4 次以上を扱う場合、現在の Mathematica [2] の能力では似ている項を自動的にまとめて短くする能力に欠けるため、あまりに式が長くなり

* 教養部

実用的でなくなる。4 次の非線形項に対しては、一般の分布関数の場合、微分演算で項の数が爆発的に増加して、4 メガバイトの記憶容量では計算不能となったので、あらかじめモデルを単純化しておく必要が生じた。対流による非線形性も非常に重要であるが、これは将来の問題とし、ここでは対流の効果は無視する。

2. 非線形ポテンシャルエネルギー

高次の摂動磁場及びプラズマ圧力は低次の摂動量により次のように表される [3]

$$B_i = \text{rot}(\xi_i \times B_{i-1} + \xi_i \times B_{i-2} + \dots + \xi_i \times B_0) \quad (1)$$

$$p_i = -[\xi_i \nabla p_{i-1} + \dots + \xi_i \nabla p_0 + \gamma(p_0 \text{div} \xi_i + \dots + p_{i-1} \text{div} \xi_i)] \quad (2)$$

ここで B_0, p_0 は 0 次の平衡状態の量であり、また i 次の変位 $\xi_i = \xi_{i-1} \nabla \xi_i$ で与えられる。

(1)、(2) 式から 1 次の摂動量は $B_1 = \text{rot}(\xi \times B_0)$ 、 $p_1 = -(\xi \nabla p_0 + \gamma p_0 \text{div} \xi)$ のような、よく知られた形になる。これらの摂動量を使うと、 i 次のエネルギーは次のように書ける

$$W_{i+1} = -\int d^3r \xi_i^* \cdot (J_0 \times B_{i+1} + J_1 \times B_{i+2} + \dots + J_{i+1} \times B_0 - \nabla p_{i+1}) \quad (3)$$

ここで J_i は i 次のプラズマ電流であり、他の記号は通常のものである。(3) 式で $i=1$ とする、良く知られた線形理論のエネルギーがでる。円柱座標 (r, θ, z) に於いて各摂動量を次のようにフーリエ展開する

$$B_i = \sum_{k,m} B_{km}(r) e^{im\theta + ikz} \quad (4)$$

このとき線形理論のエネルギーは Mathematica により次の形に書ける

$$W_1 = \int_0^a dr [f_m \xi_m^2 + g_m \xi_m^2] + (kaB_z)^2 - (mB_p)^2 / (m^2 + (ka)^2) \quad (5)$$

ここで係数 f_m, g_m は既知である [1], [4]。

2 次の摂動量を使い、(3) 式から 3 次のエネルギーを考えると、部分積分法を使って変形すると、次のように書ける：

$$W_3 = \int d^3r (B_1^* \cdot B_2 + B_1 \cdot B_2^* + B_0 \cdot B_3 + |\text{div} \xi_1|^2 p_1 + \text{div} \xi_1^* \xi_1 \nabla p_1) \quad (6)$$

対流による非線形性は 2 次以上の変位 ξ_i ($i \geq 2$) に含まれているが、ここでは簡単のためにこの対流の効果は無視する。つまり、 $i \geq 2$ に対し $\xi_i = 0$ とする。このとき (1) 式では、第 1 項のみが残る。このとき 2 次の摂動磁場は $B_2 = \text{rot}(\xi \times \text{rot}(\xi \times B_0))$ 、又 3 次は $B_3 = \text{rot}(\xi \times B_2)$ と書けるが、この式に (4) 式のフーリエ展開を代入すると、変位のフーリエ係数 ξ_{m1} 、 ξ_{m2} とそれらの微分のモード結合の形に書ける。その摂動磁場を用いると、3 次のエネルギーは (6) 式より次のように書ける

$$W_3 = \int dr (\xi Q_{1m} + \xi_m^* Q_{2m} + \xi_m^* Q_{3m}) \quad (7)$$

ここで Q_{im} は ξ_{m1} 、 ξ_{m2} 、 ξ_{m3} の異なったモード結合の 2 次形式で表される。 Q_{im} の具体

的表現は数式処理によりもとめなければならない。一般の場合表式は非常に長くなるので省略する。エネルギーの極小条件から

$$(\mathbf{f}_m \xi_m)' - g_m \xi_m - \frac{1}{2} (Q_m - Q_{2m} + Q_{3m}) = 0 \quad (8)$$

のように非線形の固有微分方程式が得られる。 Q_{1m} は ξ_m のモード結合で与えられるから、(8)式は連立固有微分方程式を表している。(7)式で与えられる3次のエネルギーはポロイダル角 θ と円柱の長さで積分したものであり振動項はすべて0となる。 W_3 が0とならないのは、 ξ_m と Q_{1m} とが複素共役の形になっているからである。これは Q_{1m} が乱流状態のように、多数のモード結合の形になっている場合に可能である。

巨視的MHDモードでは、単一のモードが成長していると考えられる場合がしばしば観測されている。この単一モードの場合(7)式で ξ_m の2次形式 Q_{1m} は(0,0)モードとなり、 W_3 は0となってしまう。つまり3次の組み合わせでは、単一モードとその共役では積分すると消えてしまう。この単一モードの場合、非線形効果を入れるには、4次のエネルギーを考える必要がある。一般形として4次のエネルギーは次のように書ける：

$$W_4 = \int d^3r (B_0 B_4 + B_1^* B_3 + B_3^* B_1 + |B_2|^2 + |\text{div} \xi_1|^2 \gamma p_2 + \text{div} \xi_1^* \xi_1 \gamma p_2) \quad (9)$$

ここで4次の摂動磁場は $B_4 = \text{rot}(\xi \times B_3)$ のようにかかる。4次のエネルギー W_4 も W_3 が3次で表されるのと同じように、変位 ξ について4次になる。変位の振幅を λ として $\xi = \lambda \hat{\xi}$ と表すとエネルギーは $W_2 = \lambda^2 \hat{W}_2$, $W_4 = \lambda^4 \hat{W}_4$ のように書ける。ここで \hat{W}_4 は $\hat{\xi}$ の関数である。いまの場合全エネルギーは $W = \lambda^2 (\hat{W}_2 + \lambda^2 \hat{W}_4)$ のように書ける。このエネルギーは $\hat{W}_2 \hat{W}_4 < 0$ の場合、 $\lambda_* = (-\hat{W}_2 / \hat{W}_4)^{1/2}$ で極値 $\Delta = W(\lambda_*)$ を持ち、安定性は次のように4つの場合に分けられる：

(1) $W_2 > 0$, $W_4 > 0$ ：非線形的に安定

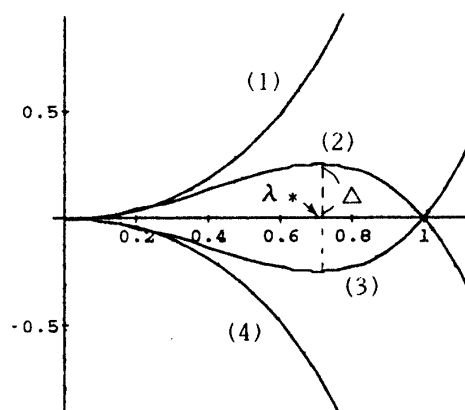
(2) $W_2 > 0$, $W_4 < 0$, $W_k < \Delta$ ：安定

$W_k > \Delta$ ：非線形的に不安定

(3) $W_2 < 0$, $W_4 > 0$ ：非線形的に安定

(4) $W_2 < 0$, $W_4 < 0$ ：非線形的に不安定

(2)の場合 W_k は、 $\lambda = 0$ の平衡状態で系が振動している場合の運動エネルギーを表している。この場合、線形理論的に安定であってもそのモードの運動エネルギーがポテンシャルエネルギーの閾値 Δ を超えるかどうかで非線形的に安定かどうか分かることを示している。(3)の場合は線形理論で不安定であると、 $\lambda = 0$ の平衡状態から新しい平衡状態 $\lambda = \lambda_*$ へ移ることを示している。この平衡状態の遷移は $\lambda = 0$ での線形的不安定性が引金として必要なのである。これは自己組織化のモデル[5]と等価である。3次までの全エネルギー $W = \lambda^2 (\hat{W}_2 + \lambda^2 \hat{W}_3)$ の場合も上の場合と全く同じように分類することができる[3]。



3. キンクモードに対する4次摂動エネルギー

問題をできるだけ簡単化するため、円柱プラズマに対し $m=1$, $n=1$ の単一キンクモードの場合に4次の摂動磁場のエネルギーを Mathematicaを用いて解析的に計算をすすめる。変位 ξ が (1,1) モードとすると、1次摂動磁場 $B_1 = \text{rot}(\xi \times B_0)$ も ξ と同じ (1,1) のモードとなる。これらの複素共役 ξ^*, B_1^* は (-1,-1) モードとなる。又2次の摂動磁場 $B_2 = \text{rot}(\xi^* \times B_1 + \xi \times B_1^*)$ は (0,0) モードとなり3次の摂動磁場 $B_3 = \text{rot}(\xi \times B_2)$ は (1,1) モードとなる。従って4次の摂動磁場 $B_4 = \text{rot}(\xi^* \times B_2 + \xi \times B_2^*)$ は (0,0) モードとなる。これら (0,0) モード成分のために W_4 は0とならない。

磁場を $B = \text{rot}A$ のようにベクトルポテンシャル A であらわすと、 $B_i = \text{rot}A_i$, $A_i = \xi \times B_{i-1}$ ($i=1, 2, 3, 4$) のように書ける。 A_1 の r 成分を A とおくと2次のエネルギーを極小にする条件から、 $A = i((mB_z + krB_p)\xi + (mB_z - krB_p)r\xi)/H$ のように書ける。ここで、 $H = m^2 + (kr)^2$ である。単一モードの場合 $B_2 = \text{rot}(A_2^* + A_2)$ の (0,0) モードの r 成分は0となり、他の成分は A と ξ の r 成分で表される。その式に A と ξ を代入させるのを Mathematicaに行なわせると

```
In[6]:=
B2p[r]=D[2/r D[r x[r]^2 Bp[r],r],r]-4 k D[I A[r] x[r],r]
B2s[r]=(2/r D[D[x^2 x[r]^2 Bz,r]/r,r]
+4 m D[I A[r] x[r],r]/r);
B2p[r]=B2p[r]//.unif;B2s[r]=B2s[r]//.unif;
B2={0,B2p[r],B2s[r]}/.arg;
B2=Collect[B2//.mk,{x,x'}]/.(k^2->0,x'^2->0)

Out[6]=
2      2      2      2      2      2
{0, x[r] (- ---- + ----) +
          2          r
x[r] (12 Bz k + ---- + 8 Bp') x', x[r] (- ---- - 4 k Bp') + 4 k r x[r] Bp' x'}
          r          x
```

上の計算では一般の分布関数では結果が非常長くなるので変換 `unif` によって高次微分項を打ち切っている。又変換 `mk` によって $m=1$ とし $(kr)^n$ ($n>2$) も打ち切っている。 x は ξ を表し、`Collect` によって2次形式に表すために変換 `arg` によって変数 $[r]$ を除いている:

```
unif={x'[r]->x',x''[r]->0,Bz'[r]->0,Bp'[r]->0,Bz''[r]->0};
mk={m->1,k^2->0,k^7->0,k^8->0,k^3->0,k^4->0,k^5->0,k^6->0};
arg={x'[r]->x',Bp'[r]->Bp',Bz[r]->Bz,x'[r]^2->0,x'[r]^3->0,k^2->0};
```

2次摂動磁場に対する4次のエネルギーは次のように、4次形式の形で求まる。

```
In[7]:=
B42=Collect[B2.B2,x]//.Noarg//.(k^2->0,x'^2->0,x'^3->0,x'^4->0)

Out[7]=
4      4      2      2      2      2      2      2      2      2      2
x (- ---- - ---- + ----) + x (- ---- - ---- + ---- + ---- + ----) x'
    4      3      2      3      2      2      2      r      r
    r      r      r      r      r      r      r
```

2次の摂動磁場を用いて2次のベクトルポテンシャル A_2 が次のように求まる

```
In[9]:=
A2[r]=Collect[o[Bo,B2][[1]],x]; A2[r]=A2[r]//.mk

Out[9]=
2      2      2      2      2      2      2      2      2
x[r] (- ---- - ---- + ---- + ---- + ---- + ----)
          2          r          r          r          r
- 4 k Bp[r] Bp') + x[r] (-12 Bz k - ---- - 8 Bz Bp' + 4 k r Bp[r] Bp') x'
          r
```

これらのベクトルポテンシャルと2次の摂動磁場を用いて、3次の摂動磁場は次のように求まる

In[10]:=

```
m=1; kv={0,m/r,k}; kB2[r]=kv.B2;
B3r[r]=I kB2[r] x[r];
B3p[r]=(k ((x[r]+r x'[r]) A2[r]+I A[r] r kB2[r])/r/kB
-D[x[r] B2p[r],r])/unif;
B3z[r]=(m((x[r]+r x'[r]) A2[r]-I A[r] r kB2[r])/r^2/kB
-D[r x[r] B2z[r],r])/unif;
B3a={B3r[r],B3p[r],B3z[r]};
B3o={-B3r[r],B3p[r],B3z[r]};
B3a=Collect[B3a,{x,x'}]/x'^2>0;
B3o=Collect[B3o,{x,x'}]/x'^2>0;
B3a=B3a//mk;B3o=B3o//mk;
B3o=B3o//Bz[x]->Bz;B3a=B3a//Bz[x]->Bz
```

Out[10]=

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x[r]^3}{r} - \frac{2 I Bp[r]}{r} + \frac{2 I Bp'}{r} \right) + \\ & x[r] \left(\frac{2 I Bz k}{r} + \frac{4 I Bp[r]}{r} + \frac{8 I Bp'}{r} \right) x' + \\ & (-4 Bz k r - 4 Bp[r]) x'^3 + \\ & x[r] \left(\frac{-4 Bp[r]^3}{r} + \frac{4 Bz k Bp[r]}{kB r} + \frac{4 Bz k Bp'}{kB r} + \frac{4 Bp'[r]}{r} \right) + x[r] x' \left(\frac{10 Bp[r]}{r} + \frac{4 Bz k Bp[r]}{kB r} + \frac{20 Bz k Bp'}{kB r} \right) \\ & - \frac{10 Bp'[r]}{r} - \frac{4 k r Bp[r]}{r} x' + x[r] x' \left(\frac{12 k Bp[r]}{r} + \frac{2 k Bp[r]}{kB r} + \frac{6 k Bp[r] Bp'}{kB r} + 4 k Bp'[r] \right) + \\ & x[r] \left(\frac{-6 k Bp[r]^2}{kB r} + \frac{2 k Bp[r] Bp'}{kB r} + \frac{8 k Bp'[r]}{r} \right) \end{aligned}$$

上の3次の磁場と1次の磁場とから、4次のエネルギーは次の4次形式で表される

In[14]:=

```
B43=Collect[(B1o.B3a+B1a.B3o)//Noarg,{x,x'}]/mk
```

Out[14]=

$$\begin{aligned} & x \left(\frac{4 Bp Bz k}{r} + \frac{4 Bp kB}{r} + \frac{8 Bp Bp'}{r} \right) + \\ & - \frac{8 Bp Bz k Bp'}{kB r} - \frac{8 Bz k Bp'}{r} + \frac{4 kB Bp'}{r} + \frac{8 Bp'^2}{r} + \frac{8 Bz k Bp'^2}{kB r} + x \left(\frac{-28 Bp Bz k}{r} + \frac{16 Bp kB}{r} \right) \\ & + \frac{24 Bz k kB}{r} + \frac{20 Bp Bp'}{r} + \frac{8 Bp Bz k Bp'}{kB r} + \frac{28 Bz k Bp'}{r} + \frac{8 kB Bp'}{r} + \frac{20 Bp'^2}{r} + \frac{40 Bz k Bp'^2}{kB r} x' + \\ & + x \left(\frac{8 Bp Bz k}{r} + \frac{20 Bp kB}{r} + 40 Bz k Bp' + 20 kB Bp' \right) x'^2 + x \left(8 Bp Bz k + 8 Bp Bp' + 8 Bz k r Bp' \right) x'^3 + \\ & (8 Bp kB r + 8 Bz k kB r) x'^4 \end{aligned}$$

上の3次の摂動磁場を用いて、4次のベクトルポテンシャルA₄が求まり、それを用いて4次

の磁場B₄が求まる。その4次の磁場と0次の磁場の内積から、4次のエネルギーは

In[16]:=

```
B4r=0;
B4p=-2 D[x[r] B3p[r]+y[r] B3r[r],r];
B4z=-2 D[r(x[r] B3r[r]+x[r] B3z[r]),r]/r;
B4p=B4p//unif;B4z=B4z//unif;
B4={0,B4p,B4z}/x'^2>0;
B4=Collect[B4,{x,x'}];
B4=B4//mk
```

Out[16]=

In[17]:=

```
B41=Collect[B0.B4//Noarg,{x,x'}]
```

$$\begin{aligned} & \frac{80 Bp Bp'}{r} + \frac{8 Bp Bz k Bp'}{kB r} + \frac{96 Bz k Bp'}{r} + \frac{16 Bp Bp'^2}{kB r} + \frac{28 Bz k Bp'^2}{kB r} x' + x \left(\frac{16 Bp}{r} + \frac{72 Bp}{r} + \frac{36 Bp Bz k}{kB r} \right) \\ & - \frac{60 Bp Bz k}{r} + \frac{92 Bz k Bp'}{kB r} + \frac{32 Bp Bp'^2}{kB r} + \frac{72 Bp Bp'}{r} + \frac{116 Bp Bz k Bp'}{kB r} + \frac{8 Bz k Bp'^2}{kB r} x' + x \end{aligned}$$

のように得られる。4 次のエネルギー E_{42} と E_{43} に比べ B_4 を必要とするエネルギー E_{41} の計算は遥かに複雑で時間を要する。モデルを思い切って簡単化しないと4メガバイトの主記憶容量では計算が不能になる。

4 次のエネルギーの総和を $E_4 = E_{42} + E_{43} + E_{41}$ とすると次のように表すことが出来る

$$E_4 = B_p^2 \left\{ f_1 \left(\frac{\xi}{r} \right)^4 + f_2 \xi \left(\frac{\xi}{r} \right)^3 + f_3 \left(\frac{\xi \xi'}{r} \right)^2 + f_4 \frac{\xi \xi'^3}{r} + f_5 \xi r' \right\} \quad (10)$$

このとき、係数 f_i は次のように求められる。第1項の f_1 に対しては次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{In[19]} = & \quad \text{Out[19]} = \\ f1 = \text{Expand}[\text{Coefficient}[E4, x, 4] \cdot r^4 / Bp^2] & \quad -20 + \frac{4 Bz k}{kB} + \frac{16 Bp}{kB r} + \frac{8 Bz k r}{Bp} + \frac{4 kB r}{Bp} + \frac{20 Bp'}{kB} + \\ & \quad \frac{24 r Bp'}{Bp} - \frac{12 Bz k r Bp'}{Bp kB} - \frac{8 Bz k r^2 Bp'}{Bp^2} + \frac{4 kB r^2 Bp'}{Bp^2} + \frac{4 r Bp'^2}{Bp kB} - \frac{4 r^2 Bp'^2}{Bp^2} + \frac{8 Bz k r^2 Bp'^2}{Bp^2 kB} \end{aligned}$$

この式の各項は、 $krBz/Bp=q$, $rBp'/Bp=1-s$, $kB=(1-q)Bp/r$ の関係を使って安全係数 q とシアーパラメタ $s=rq'/q$ によってまとめられる。この変換を tqs と定義し f_1 に施し展開すると、係数 f_1 は次のように簡単化出来る

$$\begin{aligned} \text{In[26]} = & \quad \text{Out[26]} = \\ \text{Expand}[f1 //. tqs] & \quad -20 s + \frac{12 s}{1-q} + 12 qs - \frac{4 qs}{1-q} - 4 s^2 + \frac{4 s^2}{1-q} + \frac{8 qs^2}{1-q} \end{aligned}$$

これから f_1 は s に比例することが判る。 $r > 0$ のとき $s > 0$ であるから $f_1 > 0$ となる。

$m=1$ キンクモードに対して $\hat{\xi} = 1$ ($0 < r < a_s$), $\hat{\xi} = 0$ ($a_s < r < a$) のように簡単な分布を仮定すると、 $r E_4$ の積分で第1項は有限になることが判る。このモデルでは $\hat{\xi}$ はプラズマ中で一定であるからその微分は0となり、 E_4 の第2項以下は0となるはずであるが、部分積分法によると第2項の寄与が残る。第2項の係数 f_2 も全く同じように次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \text{In[27]} = & \quad \text{Out[28]} = \\ f2 = \text{Expand}[\text{Coefficient}[E4, x^3, x'] \cdot r^3 / Bp^2] & \quad 24 - \frac{24 q}{1-q} - 96 q - \frac{24 q^2}{1-q} - 24 q^2 + 4 s - \frac{32 s}{1-q} + 28 qs - \\ \text{In[28]} = & \quad \frac{40 qs}{1-q} + 52 s^2 + \frac{16 s^2}{1-q} + \frac{12 qs^2}{1-q} \end{aligned}$$

以下 f_3, f_4, f_5 も全く同様に求めることが出来る。 ξ の高次項も部分積分によりその寄与が残ることが判る。しかし以下では、2次以上の微分項は充分小さいとして無視する。このとき E_4 の第2項まで考慮に入れると、4 次のエネルギーは次のように書ける

$$W_4 = \int_0^a dr \left(\frac{B_p}{r} \right)^2 \xi^4 \left\{ \frac{f_1}{r} - \frac{1}{4} \left(f_2 - 2 \frac{s f_2}{r} \right) \right\} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{B_p}{r} \right)^2 f_2 \xi^4 \right]_0^a \quad (11)$$

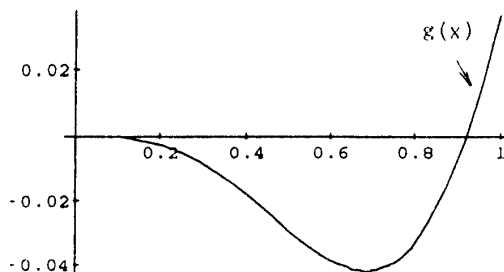
ここで f_2 の寄与は部分積分により残ったものである。プラズマ中に $q=1$ となる有理面が $r=a_*$ にある場合、上の積分範囲は $(0, a_*)$ とする。

4. エネルギーの評価

前節までに導いた表式を用いて、エネルギー W_2, W_4 の数値評価を行なう。線形理論のポテンシャルエネルギーは (5) 式で与えられる。簡単のためトカマクにおける $m=1, n=1$ キンクモードに対して、プラズマ中で $q < 1$ と仮定すると、表面エネルギーとプラズマを取り巻く真空磁場のエネルギーは無視できる [4]。このとき W_2 は (5) 式の積分項で近似されるが、前節同様 $\epsilon = 1$ とすると、第2項で近似できる。つまり係数 g によって線形理論の安定性が決められる。係数 g は $g = k^2 r B_p^2 (3q^2 - 2q - 1) - 2(B_z B_z - B_p B_p)(kr)^2$ のようにかける。この第2項はプラズマ圧力項に対応する。これらの項は $(ka)^2$ のオーダーであり、かなり小さいことが予想される。Mathematica によると g のグラフと数値積分は次のように簡単に行なえる：縦磁場は一定、 $B_z = 0$ 、又ボロイダル磁場を $B_p = B_{p0}x(1-x^2/2)$ と近似し $B_{p0}=1$ とし、主半径を R として $k=1/R$ とおく。 $R/a=3, q_0=0.4$ とするとき

Plot[Eg[x], {x, 0, 1}]

```
In[1]:=
Bp[x_] := x(1-x^2/2); q[x_] := q0(1-a x)/(1-x^2/2);
Eg[x_] := ((Bp[x]/R)^2 x(3 q[x]^2 - 2 q[x] - 1)
- 2 Bp[x](1-3 x^2/2) x^2/R^2);
R=3; q0=0.4; a=0; NIntegrate[Eg[x], {x, 0, 1}]
Out[1]=
-0.0165278
```

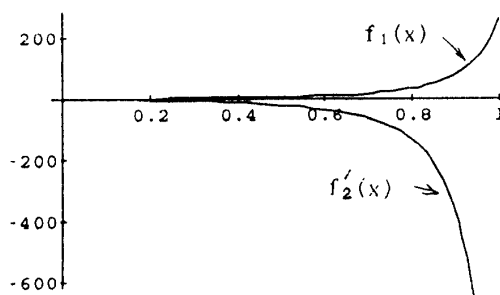


上の結果は極低 q トカマクの場合に相当すると考えられるが、 $\hat{W}_2 = -0.0165 < 0$ となるから、線形理論としてこのキンクモードは不安定であることが判る。非線形理論では W_2 の符号だけでなくその値が必要になる。

次に前節で得られた式を用いて4次のエネルギーの評価を行なう。エネルギーの被積分関数に必要な f_1, f_2, f_2' を定義し、 f_1, f_2 をプロットし、数値積分を実行する：

```
s[x_] := x^2/(1-x^2/2.);
f1[x_] := (4 s[x] (-5+3 q[x]-s[x]+
(3.-q[x]+s[x]+2. q[x] s[x])/(1.-q[x])))/x;
f2[x_] := (6-24 q[x]-6 q[x]^2+s[x]+7 q[x] s[x]+13 s[x]^2
-(6+6 q[x]+8 s[x]+10 q[x] s[x])/(1.-q[x]));
df2[x_] := (-2 (q[x] s[x]/x) (12+6 q[x]-3.5 s[x]+
(3+5 s[x])/(1.-q[x])
+(3+3 q[x]+4 s[x]+5 q[x] s[x])/(1.-q[x])^2));
Ex4[x_] := (Bp[x]/x)^2 (f1[x]/x - df2[x] + 2 s[x] f2[x]/x);
In[6]:=
NIntegrate[Ex4[x], {x, 0.001, 1.}]
Out[6]=
25.6504
```

Plot[{f1[x], df2[x]}, {x, 0.001, 1.}]



f_1, f_2' がプラズマ周辺で立ち上がるのは共鳴項のためである。 W_4 の (11) 式の第2項はこの場合無視できず、第2項 $= -22.90$ なるから、 $\hat{W}_4 = 25.65 - 22.90 = 2.75 > 0$ となり非線形的に安定であることが判る。これは2節の (3) の場合に対応し、 $\lambda = 0$ の振幅0の不安定な円柱状平衡状態から振幅 $\lambda_* = 0.077$ のヘリカル平衡状態へ遷移することを意味している。これは逆転磁場配位における現象 [6] に類似している。

5. まとめと考察

$m = 1$ キンクモードの複素共役結合による4次のポテンシャルエネルギーの表式を数式処理により導き評価を行なった。3次のエネルギーまでは比較的容易に一般的な変位と磁場の分布に対して表式の導出が可能であるが、4次エネルギーの数式処理は、しばしば4MBの記憶容量をオーバーし不能となった。これは複雑な複合関数の微分演算が項の数を爆発的に増加させるためと思われる。従って4次エネルギーの数式処理に当たってモデルを思い切って簡単にせざるをえなかった。変位 ξ 、磁場 B_z, B_p は任意の関数として進めたが、途中から $\xi'' = 0, B_z' = 0, B_p'' = 0$ と置き、また ka の2次以上も無視した。非線形エネルギーの一つの特色は共鳴項 $1/kB$ が陽に表れることである。簡単のためこの共鳴分母 $kB = (1-q)B_p/r$ も定数とした。又プラズマ圧力の摂動 $p_i (i \geq 2)$ も無視した。安全係数 $q < 1$ としてプラズマをとりまく真空磁場のエネルギーも充分小さいとして無視した。このような仮定のもとで $W_2 < 0, W_4 > 0$,つまり線形理論的に不安定で非線形的に安定なヘリカル平衡状態へ遷移する、という結果を得た。これは逆転磁場におけるプラズマ現象[6]に似ているが現実の状態へ適用するにはモデルの検討を要する。ここではこれまで人手で扱うことが不可能であった4次のエネルギーを数式処理によって扱い得ることを示したものであり、まだ完成されたものではない。

4次エネルギーの数式処理は $B_p = B_{p0}r(1-r^2)$ のようにあらかじめ簡単な分布を与えて代入する方法によっても行なった。この場合シアパラメータ s によってまとめることが出来ずあまり簡単な表式にならなかった。 $m = 0$ のソウセイジモードについても4次エネルギーの数式処理をおこなったが詳細は別の機会に譲りたい。

線形理論の安定性は非線形エネルギー項で全く変わってしまう。絶対的、大域的安定性は非線形エネルギーで決ることから、非線形理論がいかに重要であるかが、理解される。プラズマの線形理論の問題は非常に多いが、非線形の問題はそれと比較出来ない程多い。それらのほとんどはいまだ手がつけられず残されており将来の発展性は無限と思われる。

参考文献

- [1] 山岸留次郎、福井工業大学紀要、No.21,217 (1991).
- [2] S.Wolfram, Mathematica, A system for Doing Mathematics by Computer, Addison-Wesely Publishing Co., New York, 1988.
- R.E.Maeder, Programming in Mathematica, Addison-Wesly Publishing Co., California, 1990
- [3] T.Yamagishi, Second Toki International Conference on Nonlinear Phenomena in Fusion Plasmas, VII-5, p.102, NIFS-PROC-6 April, 1991.
- [4] 宮本健郎「核融合のためのプラズマ物理」岩波書店(1976).
- [5] H. ハーケン、「シナイジェティクスの基礎」東海大学出版会(1986).
- [6] J.B.Taylor, Pulsed High Beta Plasmas, p.59, Pergamon Press, Oxford, England (1976).

(平成4年12月15日受理)