

トラスを破壊に導く部材とその部材上の先発降伏断面を求める構造解析法(2)

江 上 外 人*

Structural Analysis to Find out the Yield Position on the Yield Member of the Statically Determinate Truss(2)

Hokato EGAMI

This paper describes on structural analysis to find out the weak section on the member exist in the truss, under static loading.

The weak point on the axis of the bar are determined, so that strain energy V_A saved in the left side bar from the weak point X are much the same as strain energy V_B saved in the right side bar.

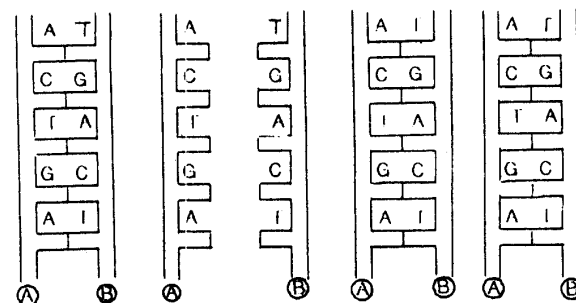
By this theory which applies chromosome division to virtual member, it is possible to find out the weak member exist in the truss, and find out the weak point of this member.

1. 序

鉄筋を引っ張ったとき、最初に降伏に入る断面の位置はほぼ鉄筋の長さの中央部であるが、これを証明することは極めて困難である。そこで本文では、棒又はトラスが切断（破壊）する瞬間に蓄えられたひずみエネルギーが消滅する状態は生命に似ていることに着目した。このひずみエネルギーと生命との関連から、染色体 DNA の複製と構造物の破壊性状とを関連づけることで、トラスの最初に降伏（先発降伏と呼ぶ）する部材及びその部材の先発降伏断面の位置を予想する。

2. 染色体 DNA の複製方則と構造物の破壊性状

細胞分裂の際には、細胞核中に存る染色体 DNA の自己複製がおこなわれて必ず 2 個に分裂するものである。このとき図 1 の如く、分裂した 2 個は共に元のものに等しい 2 個となるのでこの



(a) DNA 2 本鎖 (b) DNA 1 本鎖 2 本鎖 (c) DNA 2 本鎖 2 本鎖

図 1 自己複製

* 建設工学科 建築学専攻

2個は互いに相等しい。このことから次の方則がある。

方則：

物の分裂は必ず2個に分裂し、然も分裂した2個はそれぞれ元のものと同じものとなるので、分裂した2個は互いに相等しい。

これを物体の破壊についていえば、物体の破壊はそれぞれ元のものに等しい2個になるように破壊するので、破壊した2個は互いに相等しい。

この方則を棒又はトラスに準用する。破壊したA部とB部の2個が互いに相等しいことには次のi～ivの場合が考えられる。

- i 両者の形状が相等しい。
- ii 両者の重量が相等しい。
- iii 両者のそれぞれに蓄えられるひずみエネルギーが相等しい。
- iv 両者の光・音・色・磁性・熱・温度・におい等が相等しい。

i及びiiは棒及びトラスの破壊の場合には必ずしも成立しないので矛盾する。ivは矛盾しないが構造力学とは無関係であるのでここでは省略する。

iiiは棒及びトラスの総ての破壊の場合に成立するのでこの方則は成立する。故に棒及びトラスについては次の方則が成立する。

棒及びトラスについての方則：

棒又はトラスが外力を受けてA部とB部の2個に破壊するときは、A部に蓄えられたひずみエネルギーの量とB部の量とは相等しい状態となる。

破壊した2個の④部と⑥部にそれぞれひずみエネルギーを補給すれば、両者は再びそれぞれ相等しい2個となるように破壊する。これらの4個がひずみエネルギーを蓄えることができれば再びこれらは相等しい2個になるように破壊する。このようにトラスの部分がひずみエネルギーを蓄えられるものである限りトラスは第1次破壊第2破壊へと部分的破壊はあっても崩壊しない。

棒及び内的静定トラスは、第1次破壊によりトラスの総てのひずみエネルギーが同時に0となりトラスは崩壊する。内的不静定トラスでは特定の部材が破壊してもトラスは崩壊しない。従って残っている部材がひずみエネルギーを蓄えられるので第2次破壊へと進行する。

3. 外力のする仕事と弾性体に蓄えられる

ひずみエネルギー

図2(a)において、Pが弾性範囲内であれば、(b)図のように外力Pは式(1)の仕事をする。

$$W = \frac{P\delta}{2} \dots\dots(1)$$

このとき棒内には(c)図の如く式(2)に示すひずみエネルギーが蓄えられる。棒の単位体積中に蓄

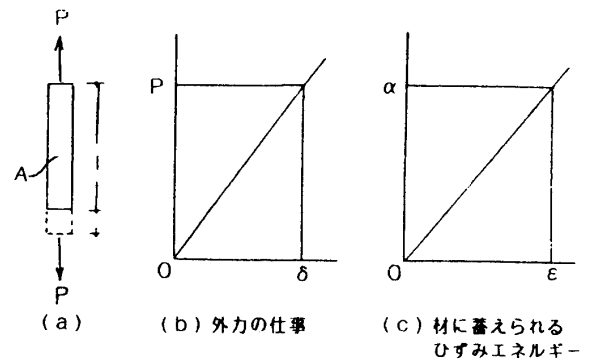


図2 外力の仕事と弾性ひずみエネルギー

えられるひずみエネルギー ΔV は式(3)となる。

$$V = \frac{P^2 l}{2AE} = \frac{\sigma^2 A l}{2E} \dots\dots (2) \quad \Delta V = \frac{\sigma^2}{2E} \dots\dots (3)$$

ここで、荷重 P を静かに除けば、材に蓄えられた式(2)(3)に示すひずみエネルギーは消滅する。これを部材が降伏破壊のために部材力 $S (= P)$ が静かに除かれたと考えても良い。

方則で述べたように、この棒が静定トラスの部材であれば他の総ての部材のひずみエネルギーも同時に消滅してトラスは原形を保たれなく

なりトラスは崩壊する。即ち図3(a)の場合は○印部が破壊すればトラスは崩壊する。

(b)図の○印部が破壊しても建築空間が残れば(b)図のトラスは崩壊しなく、破壊したとは云えない。○印部が破壊すると、トラスの

各部材におけるひずみエネルギーが変化し残りの部材の中で破壊が起きてトラスは2次破壊を起す。高次の内的不静定トラスでは高次の破壊を起して最後にトラスが崩壊(破壊)する。

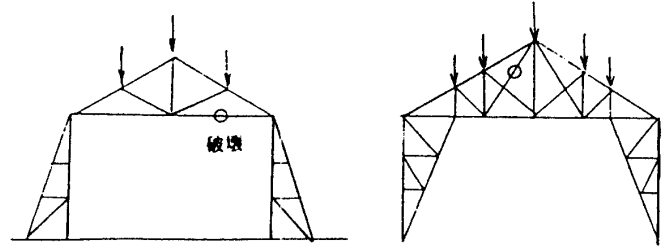


図3 トラスの崩壊・破壊

4. トラスに蓄えられるひずみエネルギー

(1) 棒の場合

図4は同一材料で断面積 $A_1 \cdot A_2$ 及び長さ $l_1 \cdot l_2$ がそれぞれ異なる棒にそれぞれ異なった引張力 $P_1 \cdot P_2$ が作用した状態を示す。それぞれの材に蓄えられるひずみエネルギー V_1 及び V_2 について吟味する。両者のひずみエネルギー V_1 及び V_2 は式(4)となる。式(5)及び式(6)と置けば α_2 は式(7)となる。

$$V_1 = \frac{P_1^2 l_1}{2A_1 E} = \frac{\sigma_1^2 A_1 l_1}{2E} \quad V_2 = \frac{P_2^2 l_2}{2A_2 E} = \frac{\sigma_2^2 A_2 l_2}{2E} \dots\dots (4)$$

$$\sigma_2 = \alpha_2 \sigma_1 \quad \sigma_1 = \alpha_1 \sigma_2 \dots\dots (5) \quad P_2 = \beta_2 P_1 \dots\dots (6) \quad \alpha_2 = \beta_2 \frac{A_1}{A_2} \dots\dots (7)$$

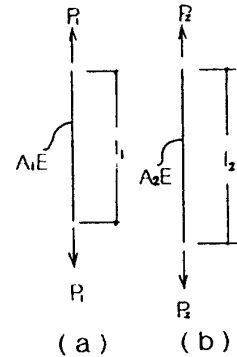


図4 棒のひずみエネルギー

式(4)に式(5)を代入して $\alpha_1 = 1 (\sigma_1 = \sigma_c)$ とすれば式(6)を使って式(8)及び(9)となる。 $V_1 = V_2$ の場合は式(10)となる。

$$V_1 = \frac{\sigma_c^2}{2E} A_1 l_1 = \frac{\sigma_c^2 A_1}{2E} l_1 \quad V_2 = \frac{\sigma_c^2 A_1}{2E} \beta_2^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right) l_2 \dots\dots (8)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \beta_2^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \dots\dots (9) \quad \beta_2^2 = \frac{A_2 l_1}{A_1 l_2} \dots\dots (10)$$

(2) 直線連鎖の場合

図5 (a) は同質材からできていて断面積及び長さが相違する $A_1 \cdot l_1$ 及び $A_2 \cdot l_2$ の棒 AB 材と BC 材が一直線状に結合された直線連鎖を示す。これは (b) 図の如く、AB 及び BC の棒が同じ外力 P を受けた状態を重ね合わせばよいので直線連鎖 ABC に蓄えられる全ひずみエネルギー V は AB 材及び BC 材に蓄えられるひずみエネルギー V_1 及び V_2 を重ね合わせばよい。式 (8) を使って V は式 (11) となる。

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\sigma_e^2 A_1}{2E} \left\{ l_1 + \beta^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right) l_2 \right\} \dots (11)$$

図6 (a) は図5 に示す直線連鎖の両端に相異なる2力 P_1 及び P_2 が作用し同時に両材の接合部に P が図の方向に作用している ($P = P_2 - P_1 > 0$)。 (b) 図のように、AC 材及び BC 材はそれぞれ P_1 及び P_2 の引張力を受ける状態となり、 $V = V_1 + V_2$ となる。

考察1：両端に相異なる2力 P_1 及び P_2 が作用し接合部C点に力 P が作用することにより各材がそれぞれ単独に引っ張った状態となるので、この直線連鎖全体に蓄えられるひずみエネルギー V はそれぞれの材に蓄えられるひずみエネルギー V_1 と V_2 の合計である。故に節点に外力を受ける直線連鎖は相異なる引張力を受ける2材からなる直線連鎖として取りあつかえばよい。

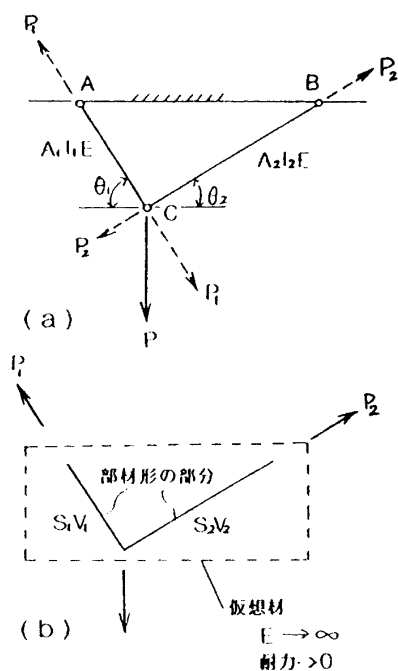


図7 折線連鎖

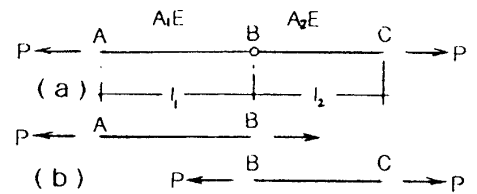


図5 直線連鎖（両端に等大力を受ける場合のひずみエネルギー）

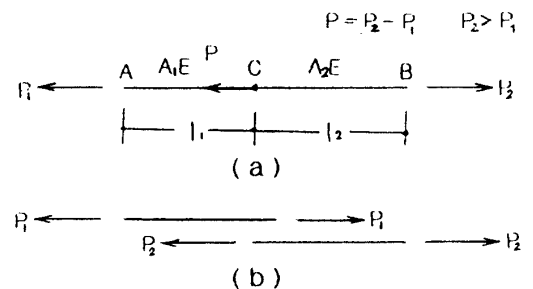


図6 直線連鎖（両端及び接合部に力を受ける場合）のひずみエネルギー

そこで図6 (a) の直線連鎖をC点で図7の如く折り曲げて折線連鎖にした場合について考える。

(3) 折線連鎖の場合

図7 (a) はAC 材とBC 材がC点で折線状に結合し、C点に外力 P が作用した状態を示す。AC・CB 材には図のように部材力 $P_1 \cdot P_2$ がそれぞれ作用する。従って降伏時に折線連鎖 ACB に蓄えられる全ひずみエネルギー V はAC 及びCB 材に蓄えられるひずみエネルギー V_1 及び V_2 の和となるので $V = V_1 + V_2$ が成立する。

図6 の直線連鎖と図7 の折線連鎖を比較すれば、 β の値が式 (12) に示すように相異なるだけである。

$$(図6) \quad \beta = \frac{P_2}{P_1}$$

$$(図7) \quad \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \dots\dots (12)$$

考察 2：折線連鎖の部材力及び β が算定できるので折線連鎖に蓄えられるひずみエネルギー V は折線部材に蓄えられるひずみエネルギー V_1 と V_2 の和となる。故に折線連鎖は直線連鎖の理論をそのまま使うことができる。

このことは(b)図に示すようにヤング係数 E が無限大であり無耐力であって然も折線連鎖に等しい部材形の部分にのみ、ひずみエネルギーを蓄え得る部分が内部に存る仮想材（図中の点線で囲まれた部を指す）を考えて直線・折線両連鎖とも、この仮想材中の部材形の中の特定部分に蓄えられたひずみエネルギーを取扱えばよい。

考察 3：直線連鎖・折線連鎖とも仮想として取扱えばよい。部材力 $S_1 (= P)$, $S_2 (= P_2)$ を求めれば式(13)となり、 β_2 は式(14)となって、これらを式(11)に代入すればよい。

$$S_1 = \frac{P \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1} \quad S_2 = \frac{P \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1} \dots (13) \quad \beta_2 = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \dots (14)$$

(4) トラスの場合

図 8 はトラスの場合の連鎖の構成を示す。(a)図は 2 本の直線連鎖と 1 本の折線連鎖で構成され、(b)図は 3 本の直線連鎖と 1 本の折線連鎖及び 1 本の棒で構成されている。各部材力が算定できれば、連鎖全体に蓄えられるひずみエネルギー V を総て部材に蓄えられるひずみエネルギー V_i の和として算定することができる ($V = \sum_i V_i$)。

図 9 (a) は均等質の棒の体積中に式(3)に示す単位体積エネルギー ΔV が均等に蓄えられる。

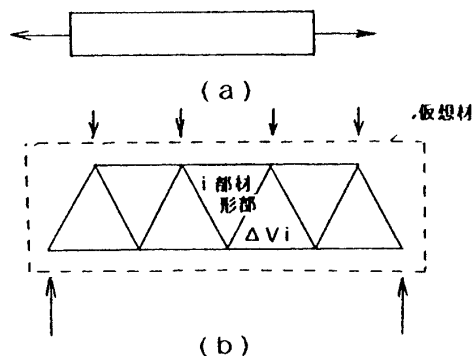


図 9 トラスに蓄えられるひずみエネルギーの機構

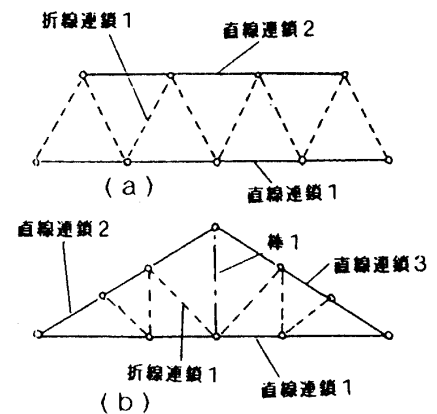


図 8 連鎖で構成されたトラス

(b)図に示すトラスの場合は考察 2 により点線で囲んだ仮想材の中でトラスの各部材形に等しい部分の中の i 部材形部に ΔV_i が均等に蓄えられるが、トラスの各部材形以外の点線に囲まれた部分は剛性が無限大であって、ひずみエネルギーは生じないので蓄えられないと考えればよい。

5. 先発降伏断面

(1) 棒の場合

図10は断面積A及びヤング係数Eが一樣で長さlの棒がその両端でPの大きさで引っ張られている状態を示す。

A端からxの距離の断面Xが先発降伏断面となり、その瞬間にAX・XB部分のひずみエネルギーは消滅する。このとき、AX及びXB部分に蓄えられるひずみエネルギー V_1 及び V_2 は方則により $V_1 = V_2$ であり式(15)となる。

$$\frac{\sigma_e^2 \alpha_1 A_1 x}{2E} = \frac{\sigma_e^2 A_1 \beta_2^2}{2E} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) (l - x) \cdots \cdots (15)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_2 = 1, \frac{A_1}{A_2} = 1 \text{ であるので } x = \frac{l}{2} \text{ となる。}$$

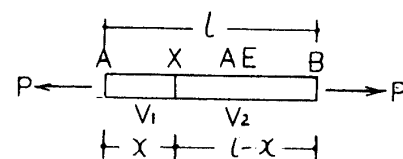


図10 棒の先発降伏断面

(2) 直線連鎖の場合

図11は断面積及び長さが異なるAB・BC棒が直線連鎖され両者共等しい引張力Pを受けている状態を示す。

A端からxの距離の断面Xが先発降伏断面とすると、AX部分内と(BX部分+BC部分)内に蓄えられたひずみエネルギーは方則により等しくならねばならないので式(16)となる。

$$\frac{\sigma_e^2 A_1}{2E} x = \frac{\sigma_e^2 A_1}{2E} \left\{ l_1 - x + \beta_2^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right) l_2 \right\} \cdots \cdots (16)$$

$$\text{ここで, } \beta_2 = \frac{P_2}{P_1} = 1, l_1 = l, l_2 = \sqrt{3}l, A_1 = A, A_2 = \sqrt{3}A, P_1 = P_2 = P \text{ であるので } x = \frac{2 + \sqrt{3}l}{4}$$

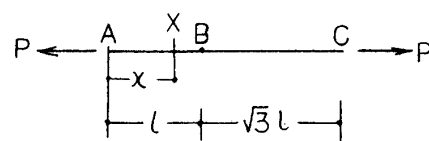


図11 直線連鎖の先発降伏断面

(3) 折線連鎖の場合

図12は折線連鎖ABCが外力Pを受けて、部材AB・BCに部材力 S_1 ・ S_2 が生じている状態を示す。

A点からxの距離の断面Xが先発降伏断面とする。これは(b)図に示す仮想材のABに垂直でX点を通るX-X断面が先発降伏断面になり、X-Xによって仮想材はIとIIに分割される。

方則により、仮想材のI部に含まれるひずみエネルギー V_1

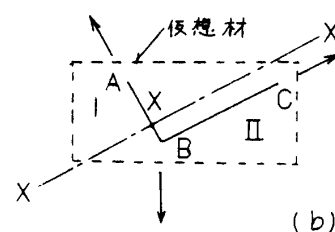
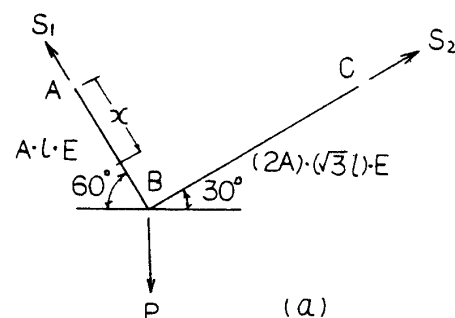


図12 折線連鎖の先発降伏断面

とII部の V_2 は等しくなければならない。また考察2によりこれは折線連鎖AX部に蓄えられるひずみエネルギーとXBCに蓄えられるひずみエネルギーとは、相等しくなければならないので式(17)となる。

$$\frac{\sigma_e^2 A_1}{2E} x = \frac{\sigma_e^2 A_1}{2E} \left\{ l_1 - x + \beta_2^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right) l_2 \right\} \cdots \cdots (17) \quad S_2 = \frac{P}{2} \quad S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} P \cdots \cdots (18)$$

(a)図について部材力 S_1 及び S_2 を求めると式(18)となり、 $\beta_2 = \sqrt{3}$, $l_1 = l$, $l_2 = \sqrt{3}l$, $A_1 = A$, $A_2 = 2A$ を式(17)に代入して $x = \frac{(2+3\sqrt{3})l}{4}$ となる。

(14) トラスの場合

図13(a)はヤング係数E及び部材断面Aがともに等しい15個の部材から成る、同図の平面トラスが図の荷重Pを受ける状態を示す。この先発降伏断面を求めるには考察3により(b)図の仮想材が同図の外力を受けるとして取扱えばよい。

トラスの部材力 S_i を求め、これを使って β_i を求める。部材 i に蓄えられるひずみエネルギー V_i は式(8)を準用し、式(19)により求めて図13(c)に示す。

$$V_i = \frac{\sigma_e^2 A_i}{2E} \beta_i^2 \left(\frac{A_1}{A_i} \right) l_i \cdots \cdots (19)$$

$$V_i = \frac{\sigma_e^2 A l}{2E} \beta_i^2 \cdots \cdots (20)$$

総ての部材が同じ断面の場合は式(19)に $\alpha_i = 1 = \frac{P_2 A_1}{P_1 A_2}$, $A_i = A$, $l_i = l$ を代入して式(20)となる。

この場合の仮想材をA・B部に分割して両部内に蓄えられるひずみエネルギーの合計が最も近いのは X_0-X_0 断面であることを(c)図により探し出すことができる。分割される条体は、トラスの不安定を探せばよい。これには図(d)・(e)・(f)の3個の場合が考えられる。3個の場合について、A部とB部に蓄えられるひずみエネルギーを次に示す。ここに() は式(20)の状態を示す。

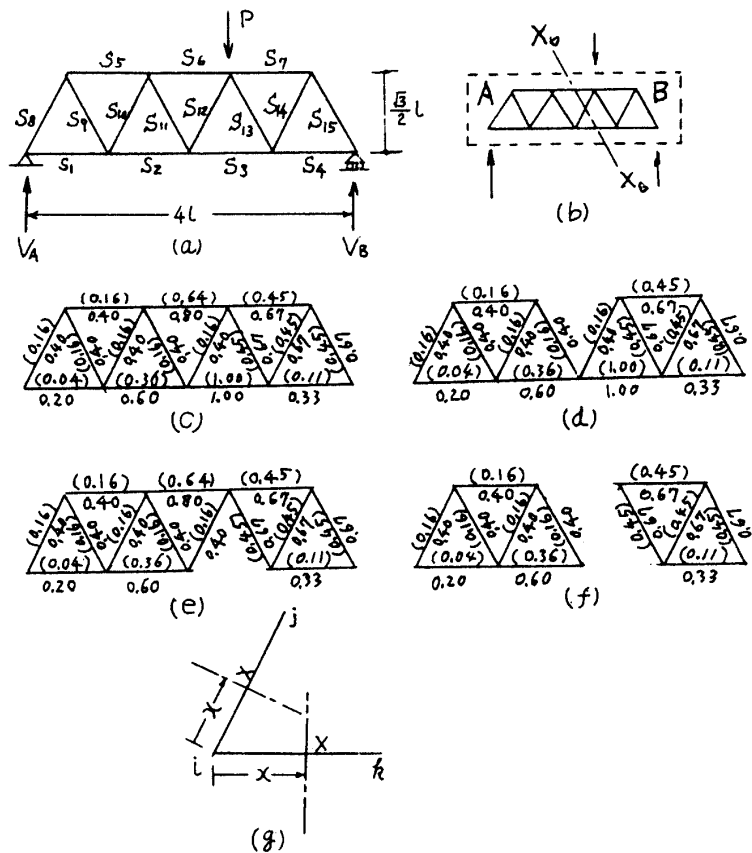


図13 トラスの先発降伏断面

	A 部	B 部	差	
(d)図の場合	(2.800) 1.200	(4.401) 3.057	(1.601) 1.857	
(e)図の場合	(4.000) 2.000	(3.001) 1.897	(0.999) 0.103	単位： $\frac{\sigma_e^2 Al}{2E}$
(f)図の場合	(2.800) 1.200	(3.000) 1.897	(0.201) 0.697	

これによれば(e)図の場合が両者の差が最も小さいので(e)図の断面が先発降伏断面であることがわかる。そこで(g)図のように ik 材について切断し、A部とB部の蓄えられたひずみエネルギーを等しくおいて i 点から $x=0.178l$ となり、() 内の場合は(f)図の状態となり、 ij 材の i 点から $x=0.75l$ の位置となる。

6. 結 論

筆者は多くの鉄筋の引張実験をおこなった結果、殆んどが長さの中央付近に先発降伏断面が生じその断面で切断することを確認めた。これを解明することは、現在の材料力学体系によっては困難である。そこでトラスの一部材が切断されるとトラスの全部材に蓄えられるひずみエネルギーが同時に消滅することを生命に類似すると考えて、染色体DNAの複製方則をトラスに応用できることを提案し、これを使って、総てのトラス部材の断面と長さが定まっているトラスが特定の荷重状態に応じて、トラスの先発降伏部とその部材の先発降伏断面の位置を算出できることを提案した。

本理論は次の場合に適用できる。

- i 部材力に応じて許容応力度から断面積を算定して設計されたトラスについて、そのトラスの先発降伏断面及びその先発降伏部材とその部材の先発降伏断面を算定できる。
- ii 従来の設計法によらず、先発降伏部材を先に定めておき、総ての部材について蓄えられるひずみエネルギーの比を任意に定めておき、許容応力度と部材断面の大きさが施工可能なものとなるように部材断面を調整する。

(平成4年10月2日受理)