

問題解決における数学的思考について

三 塚 正 臣*

On the Mathematical Thinking in Problem Solving

Naomi MITSUTSUKA

Students of mathematics must employ various methods of mathematical thinking in the process of problem solving, when they try to solve problems for themselves. they will be able to analyze the structures underlying the problems and examine thoroughly the systematic relation between them, which will also enable them to analyze the logical structure of the problem solving. It is important for students to obtain mathematical thinking and mathematical strategies in problem solving. Therefore, this paper is trying to investigate the characteristics of mathematical thinking and mathematical problem. I have an emphasis on the functional conversion in the structure of mathematical thinking and on the analogical thinking in problem solving.

1. はじめに

問題解決においては、問題事態の全体構造がとらえられ、洞察により解決に最適の既知の概念あるいは手段・方法、数学的な考えや数学的能力ならびに一般的ストラテジーによって、認知的構造がとらえられ、再構成された内容と内容との相互関係が論理的に連鎖としてとらえられる。思考の特徴は構造変換にある。問題事態のメカニズムをさぐり、問題解決においては、再生的思考と生産的思考が機能するが、生産的思考の特質を解明した。生産的思考においては、機能的に構造変換がなされなければならないが思考の構造変換について論じた。さらに、生産的思考には収束的思考と発散的思考があり、創造的思考との関連について追究し、創造的思考の媒介的思考の手段・方法として一つに類推的思考があることをとらえ、創造的思考と類推的思考との関係をも論じた。

2. 問題解決と問題発見について

問題解決における問題は、既知の知識や固定化されたアルゴリズムによっては解決できない事能と考え、問題解決は、このような結果を得る手段・方法が明らかでない事態に直面したとき、

* 教養部

その結果を得る手段・方法を発見して目標に到達し、結果を得ることである。

問題事態に対して Getzels は、提示問題と発見問題に分類し、Bloom の知的能力から類別された知識・理解・分析・総合等に関する問題事態は提示問題と考え、真の問題は自己・他者にとっても知られない問題で、問題事態を発見しなければならないといっている。このとき、問題解決の方法が発見されなければならない。問題事態は問題解決と相互の関連をもち、問題が知られており、解決の方法がわかっている場合を除いて、問題がわかっているが解決の方法がわかっていないときには解決の方法を発見しなければならない。したがって、このような問題事態の分類から、まだ、解決されない問題事態そのものを発見する過程と問題を解決する方法を発見する過程にわけて考察し、その相互関係を考えなければならない。

問題発見は、既知の問題と未知の問題とを比較しながら、新しい問題に対する要求と価値を見出し、論理的に考察し、洞察力をもって多くの曖昧な問題からより明確な高次の価値ある問題を見出さなければならない。

問題解決は、未知の問題の中から1つの問題を選択し、思考実験によって、定義された問題に対して、特定の解決の方法を見出すのであるから、既知の問題をもとに価値ある未知の問題を正確に選択し、新しい問題として提示する。未知の問題は、既知の問題の存在の意義、価値を考え既知の問題所在の過程を解明することによって、未知の問題と比較し、価値のある新しい問題を見出すことができる。

問題解決は、数学的能力が単独あるいは複合されて機能し、問題の内容を再構成し、再構成された内容と内容との相互関係を連続的な、連鎖としてとらえていくことによって解決の構造が明らかになる¹⁾。即ち、条件に関連している既知の知識を条件と結びつけたり、多様な情報やデータを関連づけ数学的な考えや数学的なストラテジーによって内容を再構成し、共通性、類似性、独自性をさぐり部分的結論が得られる²⁾。さらに、質的に異なる観点を設定し、観点を変更し、多様に考え、再構成された内容と内容との相互関係を連続的な連鎖としてとらえる。

問題発見のメカニズムは極めて直観的でかつ複雑な要素をもっている。Berlyne は問題発見は刺激自体をふくむ矛盾、葛藤、変化、複雑性、新奇性などの性格をもっていると述べているが、問題事態への関心、探索行動、知的好奇心、価値的判断等の触発等が前提である。これらの基礎には、数学的な知識や数学的な思考経験がもとになっており、これらから考えて、数学的葛藤、数学的にどのように変化されるか、数学的に新奇性があるか等を考えることが重要である。しかし、固定的に考えたり、流動性を失うとかえって問題発見に障害を与えることになる。したがって、問題発見には、妥当な分化した知識構造が前提になると同時に、一見矛盾とみられる情報も受け入れ、固定的な既知の枠組を取り去り、知的に意味のある変化や逸脱を敏感に感受し、観点を変えて新しい観点からとらえることが必要である。そこに、もとの問題との相異性をとらえ、問題意識をもち、新しい問題の解決の探索または情報を収集しはじめる。

Arnold は、問題の認知に関する障害の原因として、「何が問題なのかを知ることの困難さ」「問題を限定することの困難さ」「かけはなれた関係を認めることの困難さ」「表面にあらわれない微

妙な手がかりを発見することの困難さ」「原因と結果をみきわめることの困難さ」をあげている。問題は問題のもつねらい、問題となる中心的関係、因果的關係を内蔵しながら問題の所在を追究し、問題が設定される。問題を学校教育の立場から考えるといくつかの条件がある。問題のねらいが明確であること、数学的な考えやストラテジー³⁾を含んだ問題であること、数学的に重要な意味をもっている問題であること、知的好奇心をもっている問題であること、適度の困難性をもつ問題であり、さらに、多様な考え方のある問題であること、解決のよさを感じさせる問題であり、発展性のある問題であること等である。一方、思考を妨害する心理的な面として、一つは退行、固執する傾向をもつことであり、一つは有利な情報を求めようとする傾向があるといわれているがこのことによって必要な情報を収集することを見落すことになり、問題解決においても、総合的な判断をさまたげることになる。したがって、open に考え、固定化された情報に固執しないで直接的でない情報も収集することが重要である⁴⁾。

問題の選択と問題の発見につづいて、問題解決の方法が選択され、問題解決の行動が喚起されその結果と問題とを対応づけて、次の問題の選択、問題の発見にいたる。したがって、問題発見は、問題の解決の方法の発見に大いなる影響を与える。問題発見は、問題解決の方法と大いに関係しているといえる。問題場面が既知の知識による場合には、殆んど既知の方法によって解決される。しかし、問題場面が少しでも新奇である場合には、その問題状況の中心の変換がおこなわれなければならない。つまり、問題場面において、問題の場面を構造的にとらえ、観点を変えて構造把握において変換をはかることが重要である。

3. 再生的思考と生産的思考について

思考作用は再生的思考と生産的思考とにわけられる。問題事態がこれまでのアルゴリズムや既知の知識や方法によって解決される場合に機能する思考を再生的思考という。再生的思考は、思考の特徴的な場合ではない。問題事態が固定化されたアルゴリズムや既知の知識によって解決できると考えられる問題場面においては、既知の原理・概念、内容や考える方法を条件と結びつけることによって内容が再構成され、再構成された内容と内容との間の関係がとらえられる。したがって再生的思考といわれるが、問題事態が固定化されたアルゴリズムや既知の知識によっては解決できない問題事態は、それまでの問題事態と異なって、新奇な独特の問題場面をもっている。このような問題場面においては、問題の場面の状況の構造変換が要求される。それによって思考の変換がなされなければならない⁵⁾。特徴的には、既知の手段・方法の機能的変換がおこなわれなければならない。手段や思考においては中心転換をはかり、思考の機能的な構造変換がおこなわれるような思考を生産的思考という。生産的思考は、単純な再生的思考では解決が困難なとき、思考の機能的構造変換によってなされる思考である。即ち、生産的思考は、思考の場における整備と思考においては、条件と条件との関係をとらえ、数学的な考えや数学的なストラテジーによって、再構成された内容と内容との間の関係を構造的にとらえ、あるいは、観点を変えて内容が機能的に変換し、変革される思考で、知識体制の思考の方法としての帰納、演繹、単純化、類推的

思考、観点の変更による思考能力等が不可欠である。

生産的思考過程においては、何段階もの構造変換がおこなわれる。問題事態は、構造変換がおこなわれると問題解決における部分的結論が得られ、構造変換がおこなわれるたびに問題自体は一層深くとらえられ構造的関係がとらえられる。部分的結論が得られる場合においても、そこにおいては内的な構造的連関が把握される。この場合、思考過程は、偶然的なものではなく、論理的な構造をもち、構造的にとらえなおされ、内的に構造的な関係がとらえられる。このさい、構造的に中心転換の思考操作がおこなわれる。その結果、問題解決に最適の手段・方法、思考の方法、数学的なアイデアが見出される。したがって、問題解決においては、問題事態の全体的構造が再構成され、認知的構造に変化が生じ、全体的な内的な構造的関連がとらえられる。そこにおいては、問題解決過程における矛盾の分析、どのような数学的な考えやどのような数学的なストラテジーを用い、どのような数学的能力にもとづいているかの分析、さらに、問題の中心的課題の分析がなされなければならない。このようにして、数学的活動における思考因子の分析がなされ、関係が構造的に把握され、これらの分析をとおして問題解決における構造変換がおこなわれる。

生産的思考のうちでも比較的高次の機能変革あるいは飛躍的な構造変換がなされる思考活動を創造的思考と考えた。生産的思考における生産性のレベルにおいて比較的高次の機能的変革もしくは飛躍的構造変換がおこなわれる思考活動なので生産的思考と区別して創造的思考と考えた。創造的思考と深い関連をもつものは、発散的生産思考と収束的生産思考である。収束的生産思考は、与えられた一定の条件を分析し、論理の連鎖として再構成された内容を一定の方向に収束させ、単一もしくはそれに近い形の解決に到達するような思考である。これに対して、発散的生産思考は、解決の方法を一つに収束せず、多様な解決の方法を見出す思考で、創造性に関する思考である。創造的思考は発散的生産思考を中心として、拡散、直観等をもとに飛躍的構造変換の性格をもつが、その前提過程においては、得られた結果を組織的に体系化する収束的生産思考活動も必要であり、これらが有機的・統合的に相互に作用しあうことによって創造が可能となる。

4. 問題解決における生産的思考の機能的構造変換について

問題を解決する過程は、数学的な考えや数学的なストラテジーによって、知的経験による思考実験をおこなって、探索試行が試みられ、確実な論理的判断によって正しい情報を選択し条件が加工される。また、単独あるいは複合された数学的能力によって、既知の知識をもとに、内的構造変換がはかられ、内的構造変換によって中心転換され、高次に機能的に変換され部分的結論が得られる。これらの部分的結論として再構成された内容と内容との相互関係を連鎖として論理的にとらえることによって、機能的に変革された結果がとらえられる。したがって、これらの思考過程は、論理的な構造をもっており、明確な論理にもとづいた推理の環として完全な論理構造をもっている。思考過程においては、既知の手段方法において機能的な変革がおこなわれ、中心転換がはかられる。機能的な変革がおきる思考過程においては、一つの問題場面または双方の問題場面において、対応している解決の中心となっている本質的な内容において基本的な条件の前提

にたつて、出来るだけ多くの異質的な観点にたつて、新しく観点を設定し、補助的な条件を自由に選択して対象を分析し、問題内容の存在形態を種々な内容に変革する。その結果、それぞれの観点到固有な内容に再構成される。ここにおいては、数学的アイデアや数学的法則・原理・数学的なストラテジーを媒介として加工的に適用し、種別の異なる内容においてとらえられる思考的法則体系にある一方の関係が他方の関係に変換される。このようにして、もとの問題の本質的な状態が新しい内容の状況に対応し、新しい観点を設定し、それぞれの観点到固有な関係を構造的にとらえるならば、機能的に変革された内容を構造的にとらえることができる。この間には普遍的に共有するものが含まれる。

このように、問題事態の内容変換により、問題解決における問題事態の全体的構造が再構成される。したがって、洞察により、認知的構造に変化がおり、解決における思考において機能的な構造変換がなされる。思考においては、問題の本質をとらえ、解釈し、単純化したり、帰納的に考えたり、演繹的、類推的に累加的に考えることによって、解決の内部構造が変換される。問題解決において、問題事態の全体的構造をとらえ、思考の機能的な構造変換がなされることは、思考において内的に新しい質が獲得されることである。ここに獲得された新しい質的内容は、思考過程において、内的構造としてとらえられ、機能的に転換されたもので、思考が独創的内容として把握されたものである。

一般に独創の成立は、独創までにいたる転換の行為であるといわれ、構成している素材あるいは思考経験によってなされたもので、これらの構成の素材あるいは思考経験が独創そのものにいかなる規定を与えているかということである。独創の特徴はそのまま持っている素材あるいは思考の結合の状態、統一の方法が独自の様相をもっていることで、要素の結合が独自であるということであり、構成要素がある特定の関係を満足しなければならない。したがって、数学的思考において、独創が成立するということは、必然的にその前提となる既存の考えが否定され、変革され、転換されなければならない。また、結果として、新しい質として独創が成立するためには、既存の考えが否定され、何段階もの探索がおこなわれ、変革され、転換されなければならない。このことは既知と未知、既存在と未存在とを結合する媒介方法を考えることによって生ずる。数学的思考においては、媒介の方法として、数学的アイデア、数学的な考え、数学的なストラテジーによって、これが媒介となり独創的に発見にいたると考えられる。そこでは、思考の場が整備されることから始まる。思考の場の整備水準は、知識体制の整備で、原因と結果、相似と対立等の観点から追究されなければならない。思考の方法として、帰納、演繹等の論理ならびに手段である連想、類推等が考えられ、しかも論理や類推等の思考がどの程度組織されているかということである。

5. 創造的思考と類推的思考との関係について

問題解決の方法の発見は、知的経験によって思考実験をおこない、確実な判断力によって迅速に、正確に、正しい情報を選択し、探索を試み、中心転換によって精度の高い新しい質をもった

内容を見出し解決にいたる。しかし、その思考実験もしくは直接の思考操作によって結合された条件が探索されるとき、そこにあらわれる新しい質がどのような思考形態をもっているかということである。新しい質をもった内容は既存のものではないから、既知と未知あるいは既存在と未存在とを結合する媒介方法として特定の既存在のものをもとに、未知の問題と結びつけ、その結果として未知のものが既知のものと同じかあるいは相似か、未知の問題を主観的な認識として受けとめ、加工する思考を考えなければならない。既知のものをもとに未知の問題を解決する場合、その解決の媒介的手段・方法としての一つに類推的思考がある。既知の知識を単に結びつけるだけでは未知の内容をとらえることができないから意味のある結合がなされなければならない。それには既存知を媒介として類推のもつ主観性が検討され、その構造的把握がなされなければならない。その過程においては客観的に価値のあるものかどうかをとらえなければならない。客観的な実在を創造する過程においてとりいれる思考が類推であるときには、新しい内容の質までに転換された価値のあるものとなる。このように考えると独創によって新しい質が作り出されるということは、独創の内容が創造されたものというよりは媒介を経て発見され探索されるという性格をもっている。したがって、客観的な実在を創造する過程においてとりいれられる思考が類推である限りは、内部構造が類推的に思考され、その結果、構成された内容が機能的構造変換あるいは飛躍的構造変換がおこなわれ、客観的価値にまで転化される。このようにして類推は独創であるといってよいと考えられる。

類推の本質は、既知の内容や思考をもとに、未知の問題を主観的な思考の形態をとりながら、自己の思考認識にとりいれる思考方法である。類推は、既知の内容をもとに、客観的に構造的にとらえ、類推のもつ主観性をとらえ、その内にある構造的にみて価値のあるものをとらえなければならない。しかして、類推的思考は、異質の中に思考の類似性、共通性を見出すことであるから、それらを発見する能力を強固にしなければならない。その為には既知のものを構造的に把握しなければならない。したがって、本質的には、相異なる二つの事象の一方または双方を新しい観点から見直し、相異なる二つの事象をある種の同型の構造としてとらえることにほかならない。

ある事象の解決の方法をもとにして、他の事象の解決の方法との共通性・類似性あるいは相異性をとらえ、その設定条件を媒介として同型の解決構造をもつものとしてとらえ、他の事象を解明することにある。したがって両者を同型の解決構造をもつものとして、等しい関係にあるものとする思考である。

類推的思考の役割は、未知の対象を既知の対象の加工過程において把握する思考手段であるが相異なる二つの対象を新しい観点から見直し、ある種の同型の構造をもつものとしてとらえることであるから、これを条件づける設定の確立にかかっている。この条件の設定においては、可能な限り、異質的な観点にたつて、対象を類似性、共通性にたつて分析し、その観点にたつて、変革された機能的な内容に再構成しなければならない。

6. 数学的思考の累加性について

複雑な思考を要する問題解決の過程においては、条件の構造を分析し、条件に関連している既知の内容や数学的な考え、数学的なストラテジーによって、補助的な条件を附加し、新しい観点を設定し、それぞれの観点到固有な関係が構造的にとらえられる。この過程において中心となる数学的な考えや数学的なストラテジーが機能するがそれを機能させたり、さらに高次の思考となるには、いくつかの思考因子が複合的に機能したり累加される。思考因子が累加されたり、相補されることによって、異なる思考作用が誘発されたり助長される効果をもつ。さらに他の思考因子との関係がとらえなおされ、思考の転換をもたらし、解決の構造が一層明らかになる。思考活動において、それぞれの諸機能が適当な媒介によって場を形成するときには相互に思考が助長される。この思考作用を思考の累加性という。これらの諸機能は事象と事象との関係における秩序性、順序性、法則性、結合性、関連性、多様性ならびに数学的な考え、数学的なストラテジー等であるが、これらの諸機能は互いに累加され助長され相乗の効果をもたらす。

問題解決における解決の加工過程においては、条件に関連している既知の内容を条件と結びつけたり、多様なデータを関連づけ再構成する。さらに、条件を図に結びつけたり、既知の内容を振り返り、その構造をとらえなおし、数学的アイデアや数学的な考えや数学的なストラテジーによって問題を解決する。問題を解決するにあたっての思考因子は「データをわかりやすく配列する、問題の本質をとらえる、非本質的なことを捨象する、条件と既知の内容とを結びつける、比較する、データを解釈する、データを組みあわせる、データとデータを関連づける、分析する、図にかく、関係を明らかにする、多様な観点を設定する、観点を変更して考える、再構成する、推理を圧縮短縮する、根拠をもつてのべる、類推的に考える、帰納的に考える、振り返って考える、単純化する、多様に考える、一般化する」等の思考因子がある。

類似性はその事象と事象との相互関係において論理的な結合即ち対応性をもち、一方の事象の解決の構造をもとに他方の解決の構造をとらえるので、秩序性を付与する復元性をもつ。思考活動における類推的思考は、問題事態を諸思考因子をもとに関連づけ全体的構造を洞察する。単純化された問題の条件を分析的に構造分析し、その本質をとらえ、その解決構造をもとに帰納的に考えたり、演繹的に考えたりあるいは関連づけ、結合づけ、他の思考因子が累加され、思考の場が精密になり、内部構造がとらえられ思考が転換し、問題の解決の構造が明らかになる。

7. おわりに

問題の選択と問題発見のメカニズムについて追究するとともに、数学的思考の中心である再生的思考と生産的思考の性格について追究した。生産的思考においては、問題場面の状況の構造変換、数学的な条件の整備、数学的な考えや数学的なストラテジー、数学的能力によって、再構成された内容と内容との間の関係を構造的にとらえること、また、観点を変えて内容を機能的に変換することによって、思考の構造変換がなされることを解明した。さらに、創造的思考について

も追究し、生産的思考のなかでも高次の機能変革あるいは飛躍的な構造変換がなされる思考活動であると考えた。とくに、発散的生産思考が創造的思考と深い関係をもっていることならびに創造的思考と類推的思考との関係について追究した。創造的思考のなかには、既知のものをもとに未知の問題を解決する場合、その解決の媒介的手段方法によって創造される場合があり、その一つに類推的思考があることを解明し、創造的思考と類推的思考との関係について追究した。さらに解明すべきこともあるが今後の研究に俟つとする。

参 考 文 献

- 1) 三塚正臣；学校数学における問題解決の構造について。金沢大学教育学部教科教育研究第22号 1986 P.P.36－37.
- 2) H. Schoenfeld ; Heuristics in the classroom, National Council of Teachers of Mathematics 1980 P.P.9－10.
- 3) 三塚正臣；学校数学における問題解決のストラテジーの分析について。福井工業大学研究紀要第21号 1991 P. P.211－212.
- 4) 三塚正臣；学校数学における問題解決と数学的能力との関係について 福井工業大学研究紀要第23号 1993 P.P.286－287.
- 5) 三塚正臣；問題解決における数学的思考能力について 福井工業大学研究紀要第24号 1994 P.P.242－243.

(平成6年10月28日受理)