プラズマの電磁流体安定性理論への Mathematica の応用

山岸　留次郎

Application of Mathematica for MHD Stability Theory of Plasma

Tomejiro YAMAGISHI

Abstract　Energy principle of MHD stability theory of plasma in cylindrical geometry is examined making use of the computer manipulation by Mathematica.

1．はじめに　１９６０年代の初頭、数式を機械語に自動的に翻訳するシステムFORTRAN が普及して、複雑な数式の集合とか膨大なデータの処理が飛躍的に進歩した。計算機のハードもその頃真空管から半導体に変わり、ハードの方はそれ以後飛躍的進歩を積み重ねつつある。ソフトの方はFORTRAN のバージョンアップがなされているが、基本的には最初のFORTRAN と機能は変わっていない。１９７０年代後半にパーソナルコンピュータが発展し続けているが、それによりワードプロセッサーの普及には目ざましいものがある。初期の計算機が数値計算が主であったものが、ワープロとフロッピーディスクの普及により言語処理という分野に広く応用されつつある。最近開発が進められている数式処理も数値計算を行なうことよりも数式のまま解析的に級数展開ベクトル・テンソル・マトリックス解析、微分・積分などを実行するものである。工学・物理・化学など自然科学の理論的研究では自然現象のモデルについて、多くの連立した基礎式を扱う必要がある。それら数式の集合を扱いやすい、理解しやすい形に簡単化を行ない、最後に数値計算にかけることが多いが、このプロセスは、理論の本質を見極め、いかに有効な結論を引き出せるかにかかわる重要なものであるが、多大の時間と労力を必要としている。しかし、そのプロセスの大半は、内積・外積の実行、式の展開、代入消去、微分・積分、最大・最小などルーチン的な作業が膨大な労力を費やさざるを得ない状況である。そのようなルーチン的作業の大半は数式処理をうまく利用することにより、パーソナルコンピューターにより処理可能であり、研究者の労力を大幅に軽減させ、真に人間の思考を必要とする本質的問題に専念させることを可能にするものと考えられる。ここでは多くの数式を扱う必要があるプラズマの電磁流体理論へ、この分野では進んでいると思われるMathematica を応用したので、その成果の一部を報告する。

2．Mathematica の数式処理

はじめに簡単な場合にMathematica を応用してみる。円柱座標系 (r,ψ,z) に於いて平衡磁場を$B_0=\{0,B_p[r],B_z[r]\}$ のようにベクトルとして与えると、この磁場による平衡電流はアンペアの法則 [2]より$J_0=\mathrm{rot}B_0$ で与えられる。ここでベクトル量に対し太字とか矢印はとくに使わない。又真空中での透磁率は簡単のために１としている。この電流をMathematica で求めるには次ぎのようにする。まず、ベクトル解析を実行するファイルを　<<VectorAnalysis.m　によって

呼び出す。B_oに外微分を作用させると、その結果の電流J_oベクトルがOut[3]にプリントされる。

```
In[3]:=
  jo=Curl[bo,Cylindrical]

Out[3]=
                       Bp[r] + r Bp'[r]
  {0, -Bz'[r], ----------------}
                              r
```

電流が求まると、平衡プラズマ圧力p。は∇P。＝J。×B。から与えられ、２つのベクトルJ。とB。の外積を実行する必要がある。又プラズマ変位の (m,k)フーリェ成分をξ＝{x[r],y[r],z[r]}exp(imψ+ikz) のように与えると、それに起因する摂動磁場はB_1 =rot($\xi\times B_o$)で与えられる[2] 。もっと一般的な非線形理論の表現もMathematica により得られるが[3] 、ここでは線形理論の範囲で進める。２つのベクトルaとbに対する外積は一般論からすると次ぎのように定義することが出来る。

```
o[a_List,b_List]:=
Do[o[i]=Sum[Signature[{i,j,k}] a[j] b[k],{j,1,3},{k,1,3}]
```

これは少々複雑なので直接次ぎのように定義する。

```
o[a_List,b_List]:={a[[2]] b[[3]]-a[[3]] b[[2]],
 a[[3]] b[[1]]-a[[1]] b[[3]],a[[1]] b[[2]]-a[[2]] b[[1]]}
```

この外積を使うと、ベクトルJ_oとB_oからP_oの半径微分は、次ぎのようにすると答えのベクトルはOut[5]に直ちに出力される。

```
In[5]:=
  po'=o[jo,bo]

Out[5]=
     Bp[r] (Bp[r] + r Bp'[r])
  {-(------------------------) - Bz[r] Bz'[r], 0, 0}
                r
```

又この外積を使うと、摂動磁場ベクトルB_1はCurl[o[g_a,B_o],cylindrical]で与えられるが、B_1のフーリェ振幅のみを取り出しそのベクトルをB_{1a}とする。

```
In[7]:=
  b1a=Expand[Exp[-I m phi-I k z] %]

Out[7]=
   I m Bp[r] x[r]
  {-------------- + I k Bz[r] x[r],
         r

                                                                  Bz[r] x[r]
  I k Bz[r] y[r] + -I k Bp[r] z[r] - x[r] Bp'[r] - Bp[r] x'[r], -(----------) +
                                                                      r

  -I m Bz[r] y[r]    I m Bp[r] z[r]
  --------------- + -------------- - x[r] Bz'[r] - Bz[r] x'[r]}
         r                 r
```

ここでg_aとは、プラズマ変位ξの振幅ベクトルを表わす。エネルギー積分へ進める前に、条件をつけて変数を減らす。非圧縮性流体の仮定∇．ξ＝０を課すと、良く知られた式がOut[8]に得られる：

```
In[8]:=
  divg=Expand[Exp[-I m phi-I k z]Div[ga e,Cylindrical]]

Out[8]=
  x[r]   I m y[r]
  ---- + -------- + I k z[r] + x'[r]
   r        r
```

後の計算では $B_z y-B_p z$という量が出てくるので、それを Aとおいて、変数 y,zを xと Aで表すために連立方程式　div ξ＝０，$B_z y-B_p z$=A を次ぎのようにして解く：

```
In[9]:=
  Solve[{divg==0,y[r] Bz[r]-z[r] Bp[r]==A},{y[r],z[r]}]

Out[9]=
                    -I A k r                 Bp[r] (x[r] + r x'[r])
  {{y[r] -> ------------------------- + ---------------------------,
            -I m Bp[r] + -I k r Bz[r]   -I m Bp[r] + -I k r Bz[r]
```

```
                      I A m                      Bz[r] (x[r] + r x'[r])
z[r] -> ------------------------ +  ------------------------}}
         -I m Bp[r] + -I k r Bz[r]     -I m Bp[r] + -I k r Bz[r]
```

このOut[9]で共通分母はベクトル kとB_0の内積であるからそれをkBと表して短くする：

```
In[10]:=                                        In[11]:=
%/.-I m Bp[r]-I k r Bz[r]->-I r kB             yz=%/.x[r]+r x'[r]->(rx[r])'

Out[11]=
       A k   I Bp[r] (rx[r])'                  A m      I Bz[r] (rx[r])'
{{y[r] -> --- + ----------------,   z[r] -> -(----) + ----------------}}
       kB        kB r                          kB r         kB r
```

xは実数であるが Aはあとで判るように純虚数であるから、y と zは純虚数となる。エネルギー積分の計算で必要となるξ_aの共役複素数は従って、ξ_c = {x, -y, -z } のようになる。ここでy, z は上のOut[11] で与えられたものを代入すればよい。次ぎに摂動磁場ベクトル成分を小文字でB_{1a} = {b_r[r], b_p[r], b_z[r]} のように与えておくと、各成分は、Out[7]で得られているものを代入すれば Aとx のみで表せられる。この場合、b_rのみが純虚数で b_p, b_zが実数となるのでB_{1a} の複素共役はB_{1c} = {-b_r[r], b_p[r], b_z[r]}と書ける。このように定義しておけばあとで y, z, b_r, b_p, b_z を代入することにより、ξ, ξ_c, B_{1a}, B_{1c} が同時に求めることが出来る。この代入指定には、次ぎのような変換をあらかじめ定義しておいて、必要に応じて使用する。

```
bt={br[r]->I x[r] kB,bp[r]->I k A-P,bz[r]->-I m A/r-Q/r}

gt={y[r]->(k A+I Bp[r](r x[r])'/r)/kB,
    z[r]->(-m A/r+I Bz[r](r x[r])'/r)/kB}

xt={P->(Bp[r] x[r])',Q->(r Bz[r] x[r])'}
```

変換btは上で得られた摂動磁場の各成分を与えるものである。xtは、そこで定義されたP, Q の内容を示すものである。P, Q などを必要に応じて元に戻すには次ぎのような変換を定義しておく：

```
xd={P->Bp'[r]x[r]+Bp[r]x'[r],(r h_[r])'->h[r]+r h'[r],
    Q->(r Bz[r])'x[r]+ r Bz[r] x'[r]}
```

3. エネルギー積分

プラズマ変位ξを源として、摂動エネルギーの積分は次ぎのように与えられる[2]。

$$W_p = \int \{|B|^2 - \xi^* . j_0 \times B_1 + \gamma p_0 | \nabla \xi |^2 + \nabla \xi^* \ \xi \nabla p\} r dr \qquad (1)$$

このW_pの符号により、円柱プラズマの電磁流体的安定性が決められ、大変重要な量である。

非圧縮性流体モデルを仮定するとき、この摂動エネルギーの被積分関数を主とすると、Mathematica では E=B_{1a} ・B_{1c}-ξ_c.O[J_o, B_{1a}]+2x(rx)'p_o'/rのように表される。この Eに前節のy, z, B_p B_zの表現を代入し展開すると、x x' と Aについての 2次形式になる。gt及びbtによる変換をあらかじめE/.bt/.gt により行なっておくと、その具体的形は次ぎのように得られる：

```
In[9]:=                          Out[9]=
E1=Collect[Expand[%],A]                      2    2
                              2    2     2   m     Q       2     2   P x[r] (r Bp[r])'
                             P  + A  (-k  - --) + -- + kB  x[r]  - ----------------- -
                                             2     2                        r
                                            r     r
```

```
Bp[r] x[r] (r Bp[r])' (r x[r])'   Q x[r] Bz'[r]   Bz[r] x[r] (r x[r])' Bz'[r]
------------------------------ - ------------- - --------------------------- +
              2                       r                       r
             r
                  2 I Q m   2 I k x[r] (r Bp[r])'    -2 I m x[r] Bz'[r]
 A (-2 I P k + ------- + --------------------- +  ------------------)
                    2              r                        r
                   r
```

Ａを消去するために、このエネルギーをＡについて極小化する。つまり上のエネルギーE_1をＡで微分し$\partial E_1/\partial A=0$となるＡをもとめる。

```
In[10]:=
sol=Solve[D[E1,A]==0,A]
```

```
Out[10]=
                                  2
{{A -> -((2 I Q m + -2 I P k r  + 2 I k r x[r] (r Bp[r])' +

                                    2      2  2
   -2 I m r x[r] Bz'[r]) / (-2 m  - 2 k  r ))}}
```

ここでD[E_1,A]とは、E_1という式をＡで偏微分するという意味である。このOut[10] に得られた解Ａを元のエネルギーに代入する前に、P,Qを元の変数B_p,B_zなどになおしておく。また多項式の変数とするために磁場 B_p[r],B_z[r]の変数r を除いておく。これらを連続的に実行するには、Out[10]//.xd, %[[1,2]]//.{B_p[r] →B_p,B_z[r]→B_z}, Together[Expand[%]]を行なわせればよい。最後に solm={A→%}としておけば、solmでＡの変換が行なわれる。つまり E_1/.solm によりEに解を代入し、その表現にx_dの変換をして展開するには、Expand[%//xd] によって得られるが、この出力は、あまり式が長くなるので、省略する。この結果をx とx'についての2 次形式にまとめるには次ぎのようにする：

```
In[21]:=
E3=Collect[%,{x[r],x'[r]}]
```

```
Out[21]=
                         2      2        2  2  2         2  2  2
             2    2    Bp     Bz       Bp  k  m        Bz  k  m
        x[r]  (kB  - --- + --- + -------------- + -------------- +
                         2      2          2    2 2         2    2 2
                        r      r       (-m  - k  r )   (-m  - k  r )

     2  4                   3               3           2  4  2          2  2
   Bz  m          2 Bp Bz k m     2 Bp Bz k  m r      Bp  k  r       2 Bp  k
 ---------------- + --------------- + -------------- + -------------- + ----------- +
  2    2    2 2      2    2 2           2    2 2         2    2 2         2    2
 r  (-m  - k  r )  r (-m  - k  r )   (-m  - k  r )   (-m  - k  r )     -m  - k  r

      2  2
  2 Bz  m            4 Bp Bz k m     2 Bp Bp'[r]
 ---------------- + --------------- - -----------) +
  2    2    2 2         2    2 2          r
 r  (-m  - k  r )   r (-m  - k  r )

      2       2          2  4           2  2  2          2  2  2
  -2 Bp    2 Bz      2 Bz  m        2 Bp  k  m  r    2 Bz  k  m  r
 (------ + ----- + --------------- - -------------- + -------------- -
     r       r        2    2 2        2    2 2        2    2 2
                    r (-m  - k  r )   (-m  - k  r )   (-m  - k  r )

      2  4  3        2  2            2  2
  2 Bp  k  r      4 Bz  m        4 Bp  k  r
 -------------- + --------------- - -----------) x[r] x'[r] +
   2    2 2         2    2 2          2    2
 (-m  - k  r )   r (-m  - k  r )    -m  - k  r

                  2  4                 3          2  2  2  2       2  2  2  2
     2     2    Bz  m        2 Bp Bz k m  r     Bp  k  m  r      Bz  k  m  r
 (Bp  + Bz  + -------------- - -------------- + -------------- + -------------- -
                  2    2 2       2    2 2         2    2 2        2    2 2
              (-m  - k  r )   (-m  - k  r )   (-m  - k  r )   (-m  - k  r )
```

```
       3   3          2 4 4           2 2                      2 2 2
2 Bp Bz k  m r     Bp  k  r       2 Bz  m    4 Bp Bz k m r   2 Bp  k  r          2
--------------- + -------------- + ----------- - ------------- + ------------) x'[r]
  2    2 2 2       2    2 2 2     2    2 2     2    2 2      2    2 2
(-m  - k  r )    (-m  - k  r )   -m  - k  r    -m  - k  r    -m  - k  r
```

In[21]では、Collect という作用素により %の前のステップで得られた多項式を x と x' についてまとめさせるものであり、その結果がOut[21] にプリントされているが確かにx^2, xx', x'^2の3 項からなっていることが判るであろう。

この2 次形式の各係数を因数分解などにより簡単化させるために、各係数を取り出すためにCoefficientList により係数のテーブルを次ぎのように作るcl=CoefficientList[%,{x[r],x'[r]}] これにより係数テンソルがclに入る。このテンソルの1 行目(x'^2の係数) を因数分解して簡単化を行なうには次ぎのようにする：

In[23]:=

```
cl1=Factor[cl[[1]]]
```

Out[23]=

```
                         2
           (Bp m + Bz k r)
{0, 0, ----------------}
             2    2 2
            m  + k  r
```

同様に、xx', x^2の係数を因数分解して簡単にする：

In[25]:=

```
Factor[cl[[2]]]
```

Out[25]=

```
     -2 (Bp m - Bz k r) (Bp m + Bz k r)
{0, ---------------------------------, 0}
                  2    2 2
               r (m  + k  r )
```

In[26]:=

```
Factor[cl[[3]]]
```

Out[26]=

```
       2  2                             2  2 2      2  2 2
{(-(Bp   m ) - 2 Bp Bz k m r - 2 Bp   k   r  + Bz   k  r  +

  2 2 2     2   2  4              2                 2 3                  2     2   2 2
kB  m  r + k  kB  r  - 2 Bp m  r Bp'[r] - 2 Bp k  r  Bp'[r]) / (r  (m  + k  r )), 0, 0}
```

上のOut[23],[25],[26] で第 1 桁目が x^2 の係数、2 桁目が xx'の係数、3 桁目が x'^2の係数に対応している。それぞれが x'^2, xx', x^2の簡単化された係数であり、Out[21] と比較してFactorによっていかに短く簡単化されたが判るであろう。Factorはテンソルcl全体に作用させたら一度に結果が得られようが、上では判りやすいように各行毎にFactorを作用させた。Out[26] の x^2 の係数は $B_p'[r]$ を記号化して多項式とすれば、Factorの作用素によってより簡単化出来るであろうが、ここまでくればすぐに $(mB_p-krB_z)^2/(m^2+(kr)^2)-2B_p(rB_p)'/r$ のように表せることが判るので、充分であろう。又以上の計算に於いて、最初にあげたエネルギーの p_0'を含む第3項は変換を要さないので、除いてある。この項は最後に加えておけばよい。

これらの結果を元の式に代入すると、プラズマエネルギーE が x と x'の2 次形式で表されたことになる。それを(1) の積分に代入し、xx' の項については、部分積分を行なうと、x^2の項に繰り込むことが出来て、プラズマのエネルギーは次ぎのように書ける：

$$W_p = \int [f|x'|^2+gx^2]dr+((krB_z)^2-(mB_p)^2)/((m^2+(kr)^2))_a \qquad (2)$$

ここでa はプラズマ半径を表し又係数f,g は次ぎのようになる：

$$f = r^3kB^2/(m^2+(kr)^2),$$

$$g = kB^2-2B_p(rB_p)'/r+(mB_p-krB_z)^2/(m^2+(kr)^2)-(((mB_p)^2-(krB_z)^2)/(m^2+(kr)^2))'$$

このエネルギーのxについての変分$\delta W_p=0$ よりよく知られたオイラーの2階微分方程式が次ぎのように得られる[2]

$$(fx')'-gx = 0.$$

この微分方程式は、従来通り種々の境界条件に応じてシューティング法などにより数値計算により解けばよい。

4．まとめ

プラズマの電磁流体的エネルギー積分からのオイラーの微分方程式の導出は、かなりな手間と労力を要するが、上で示したようにMathematica の数式処理により線形理論の結果が完全に得られることが判った。この研究の過程で何通りもの方法で同じ結果に到達したが、上で示した方法が最良のものとは言い難く、他にもいろいろな方法は可能である。Mathematica についてはある程度理解していることを仮定し、ひとつひとつのコマンドについての説明ははぶいた。Mathematica の詳細については文献[1] を参考されたい。今回の研究目標は、既知の線形理論の結果をMathematica により得られることを示すことであったが、最終目標は、人手で扱いきれないような長くて複雑な問題の処理へ応用することである。どんなに長い式の代入、消去、微・積分などの実行も疲れを知らず極めて正確に行なうので、困難な問題の解決に役立てられるように思われる。一見してすぐに判るような簡単なことをMathematica にやらせると、想像以上に手間どることが多いのですべての詳細な点を含めて全部Mathematica にやらせるのでなくて、人手に負えないような部分に応用を限定した方が効率が良いと思われる。プラズマ閉じ込め理論では３次元の問題とか、非線形の問題に将来真価を発揮するかもしれない。非線形の高次項では100 頁を越える長い式になることは珍しくないが、そのような長い式をいかに簡単に短くまとめるかが今後の課題となろう。

参考文献

[1] S.Wolfram,Mathematica,A system for Doing Mathematics by Computer,Addison-Wesely Publishing Co.,New York,1988.

[2] 宮本健郎「核融合のためのプラズマ物理」岩波書店(1976).

[3] T.Yamagishi,Second Toki International Conference on Nonlinear Phenomena in Fusion Plasmas,Ⅶ-6,27-30,Nov.1990.

（平成２年12月11日　受理）