数学教授内容の精選と縮約

宮　本　一　郎

A Selection and its Reduction of the Teaching Contents in Mathematics

Ichiro MIYAMOTO

A method of selection of teaching contents in mathematics was proposed in the previous paper in detail. Furthermore in this paper, how to reduce the selected contents is dealt with, when the teaching term must be shortened by change of curriculum. Here, the fundamental principle and the objective method of the reduction is proposed, with the concrete examples about infinitesimal calculus and statistics.

まえがき

筆者は先に「数学教材の精選」に関して論述したが[1]，精選された教材内容をさらに短時間に圧縮して教授する必要を生じた場合（教育課程の変更など），ただ単にこれから重点的に pick up して指導するだけでは不十分である。この場合には教材構造を変えた縮約カリキュラムを再構成することが望ましい。本論はそのため構成原理と方法について考究する。

1．数学教授内容の精選

これについては先の論文で詳述してあるが，本論文との関連が深いので，ここにその概要をまとめてかかげることとする。

(1)　数学教材精選の視点

教授内容（教材）を精選するには，次の三つの視点を基礎としなければならない。

教育目標，　学習効果，　教科の構造

これより数学教材精選の基準として次の具体的要件が考えられる。

①　数学的価値

数学の論理体系において，その教材の占める位置，以後の学習への利用性，発展性

② 応用的価値

数学を応用する他の分野，実用面との関連性，応用可能性

③ 陶冶的価値

数理的考察，論理性，創造性などの育成に関する寄与

④ 学習効果

学習者の習得可能性，学習レベル

⑤ 指導能率

他教科に含ませて簡単に扱った方がよいもの

(2) 教材精選の方式

① 削除する。

上記教材価値の少いもの，また価値があっても学習効果が期待できないもの

② 他教科へ移す。

応用的価値はあるが，数学科で時間が十分とれず，関係教科の中で指導可能なもの

③ 新しい観点からいくつかの教材を統合する。

幹となる教材を中心に，小教材をその枝葉として包括する。

④ 教材レベルを軽減する。

ここに「教材レベル」とは次の三つのレベルを意味する。

a：理解してこれを十分使えるまで習熟させるもの
b：概念を理解し，その簡単な適用ができるもの
c：概念にふれる程度（例題，問題，注などに含める程度）

教材レベルの軽減とは，a→b，b→cのように教材のレベルを格下げすることである。

⑤ 取扱う命題数を減少する。

ここで「命題」とは，定義，公理，定理（公式）を含めたもので，可能なものはなるべく直観的に取扱い，厳密に記述するものをなるべく少くする。この場合，命題の演繹関係を十分検討することが必要である。

⑥ 定理の取扱い方を変える。

条件の複雑な定理は，条件をより強めて簡単なものとし取扱い易くする。（必要なら，もっと一般的な弱い条件の場合について注記しておく。）

証明の複雑なものは証明を省略し，実例による検証などにより定理の意味を理解させる。（必要なら，証明を補助教材として付録などに入れてもよい。）

2．数学カリキュラムの縮約原理

短時間の縮約カリキュラムを構成するには，まず前段階として上記の教材の精選について再検

討することが必要である。特に minimal essential を絞り出すことが肝要である。次にさらに指導時間を短縮するためには，基礎的に次の方策が有効であると考えられる。

(1) 重要教材を柱として関係教材をこれに包括する。

絞られた教材をさらに重みづけして教材レベルを再検討し，a レベル教材のうち特に重要なものに b，c レベル教材を包括させ，その重要教材の徹底をめざす。(これは前記精選の条件③，④をさらに強化させることに当る。) たとえば不定積分で，三角関数，無理関数の積分として個別にやっていたものを置換積分法の中に例として包ませてしまうというような取扱いである。

(2) 教材の順序変更による指導の効率化

時間の関係で演習があまりできないので，重要教材をなるべく先に導入しておき，他の教材の学習に overlap させて，その繰り返しの機会を作るようにする。その分析には，Gantt chart が有効である。これに関しては具体例について後に詳述する。

(3) 新教材の導入時の抵抗をなるべく少くする。

できれば伏線段階を設けておき，導入をスムースにすることが望ましい。たとえば，統計における仮説検定概念を指導するため，正規分布において $\overline{X}$ 管理図の考えを，また二項分布において抜取検査の生産者危険 (α) と消費者危険 (β) の考えをごく簡単に入れておくと導入が非常にスムースになる。

(4) 導入をある程度演繹的に行なう。

通常，新教材を導入するのに，いろいろの実例から帰納的に行なうのが自然であるが，この部分にいくらかの時間がかかるので，教材によってはいきなり演繹的に定義し，逆にその実例を示す方が能率的な場合もある。たとえば，微分係数の導入の前には速度などをやるが，極限概念さえできておれば，いきなり定義から入り，その実例として速度やその他の変化率にふれるとよい。また区分求積法をやらないで，面積の考えからいきなり定積分を定義してもそれほど不自然ではない。しかしこのような取扱いは教材によるので，よく検討して無理のないようにしなければならない。

(5) 関連教材間の間隔をなるべく小さくする。

この間隔が大きいと，先習教材の復習の時間が必要となるので，なるべく忘れないうちに新教材を導入するのが得策である。たとえば，微積分において，通常一変数の微積分を終えた後偏微分，重積分をやるが，多変数までの概要が必要な場合には，一変数の微分の直後に偏微分を簡単にやり，また単積分の直後にその発展として重積分をやると能率的である[2)]。(その代り反復，復習の時間がとれないことはやむを得ない。)

(6) 定理の証明をできるだけ節約する。

この場合，断片的な定理の羅列にならないように留意することが肝要である。定理相互の間を強い論理の糸でつなぐ代りに，軟かい類推，拡張，一般化などの直観の糸でつなぐことを忘れてはならない。たとえば，平均値の定理を図形的に直観的に理解させておき，これを拡張し

て，類推的に

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(c) \qquad (a<c<b)$$

を説明し，さらに拡張をくり返してテーラーの定理へと導くというような取扱い方である[3]。またロピタルの定理は，$f(x)$，$g(x)$ の導関数の連続性を仮定すれば（実用上それで十分），Lagrange の平均値定理だけで証明でき，Cauchy の平均値定理を必要としないで済む[4]。できればこのような by-path をも検討するとよい。

(7) 今後の学習の発展性を配慮する。

縮約カリキュラムは袋小路になることなく，今後必要に応じて発展できるように適切な注釈，付録（補助教材）などを付加することが望ましい。たとえば定理の条件を強く制限したときはそれがどこまで弱めることができるかにふれておくとよい。

3．縮約カリキュラムの具体例

(1) 微分法

この基礎的な部分の取扱い方には大きく次の三通りの case がみられる。

Case Ⅰ[5]

§1．微分係数と導関数

微分係数，基礎的な関数の導関数　$(x^n)'$，$(\sin x)'$，$(\cos x)'$，$(e^x)'$，$(\log x)'$

接線の方程式，微分

§2．導関数の計算

（i）和差積商の微分法　$(\tan x)'$ ほか

（ii）合成関数の微分法　$(x^\alpha)'$〔α：実数〕

（iii）逆関数の微分法　$(\sin^{-1}x)'$，$(\cos^{-1}x)'$，$(\tan^{-1}x)'$

（iv）媒介変数表示の微分法

Case Ⅱ[6]

§1．微分係数と導関数

微分係数，導関数，接線，微分

§2．微分法の基本法則

和差積商，合成関数，逆関数，媒介変数表示

§3．基本的な関数の微分公式

$(x^n)'$，$(\sin x)'$，$(\cos x)'$，$(\tan x)'$ ほか，$(\log x)'$，$(e^x)'$，$(\sin^{-1}x)'$，$(\cos^{-1}x)'$，$(\tan^{-1}x)'$

§4．微分，微小変化

Case Ⅲ[3]

§1．微分係数と導関数

微分係数，導関数，速度，接線，$(x^n)'$，$(1/x)'$，$(\sqrt{x})'$

§ 2．微分法

和差積商の微分法，$(x^n)'$〔n：整数〕，合成関数の微分法，$(x^r)'$〔r：有理数〕

§ 3．導関数の簡単な応用

変化率（合成関数の微分法応用），接線・法線（陰関数の微分法）

§ 4．三角関数の導関数

$(\sin x)'$，$(\cos x)'$，$(\tan x)'$ ほか，媒介変数表示の微分法

§ 5．指数関数，対数関数の導関数

$(e^x)'$，逆関数の微分法，$(\log x)'$，対数微分法

§ 6．いろいろの導関数

$(x^\alpha)'$〔α：実数〕，$(\sin^{-1} x)'$，$(\cos^{-1} x)'$，$(\tan^{-1} x)'$

§ 7．微分と近似計算

これらの教育効率を比較評価するため，次のページに示す図表（Gantt chart）による分析を試みる。左欄の教材項目は三つの case に共通して，その導入順序が問題となるもので上欄の数字はその順序を示している。また表中の実線（——）は以後導入される項目に関連して用いられること，また点線（……）はその項目の基礎的な問題に利用される可能性のあることを意味し，右端の数字はこれらの線の個数で，たとえば 3＋(2) は，（——）が 3 個，（……）が 2 個あることを示し，この数が大きいほど，その項目が以後の項目の学習に有効に利用されることを意味する。

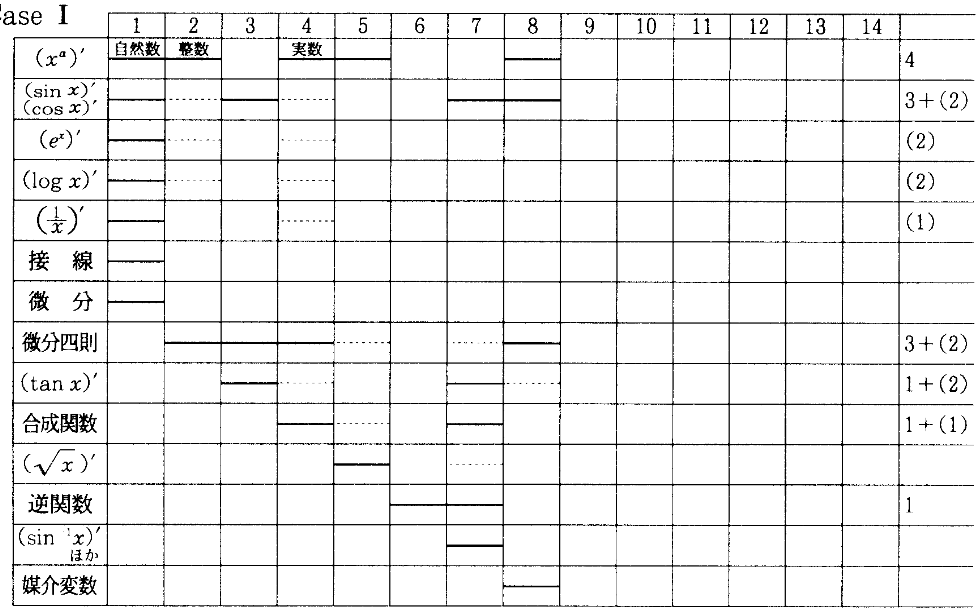
これによって見ると，case Ⅱ はこのような利用頻度が最も少く，教材構造が孤立的である。この点 case Ⅲ が教育的に最もよいことがわかる。ただし case Ⅱ は数学的にすっきりしており講義時間は最も少くてすむ。たとえば $(x^n)'$〔n：自然数〕の証明は，積の微分法則であっさりできるし，$(x^\alpha)'$〔α：実数〕の証明は $(\log x)'$ のところですぐできるので，$(x^n)'$〔n：整数〕の証明を必要としない。ただこの方式では，個々の微分公式が後で出てくるので，これらの利用が十分なされない欠点がある。この点では case Ⅰ は主要な微分公式を先に出しているので実用性がある。これらを総合して次のようにまとめることができよう。

case Ⅰ は微分公式先習型で，実用的であり，ある程度時間が節約できる。

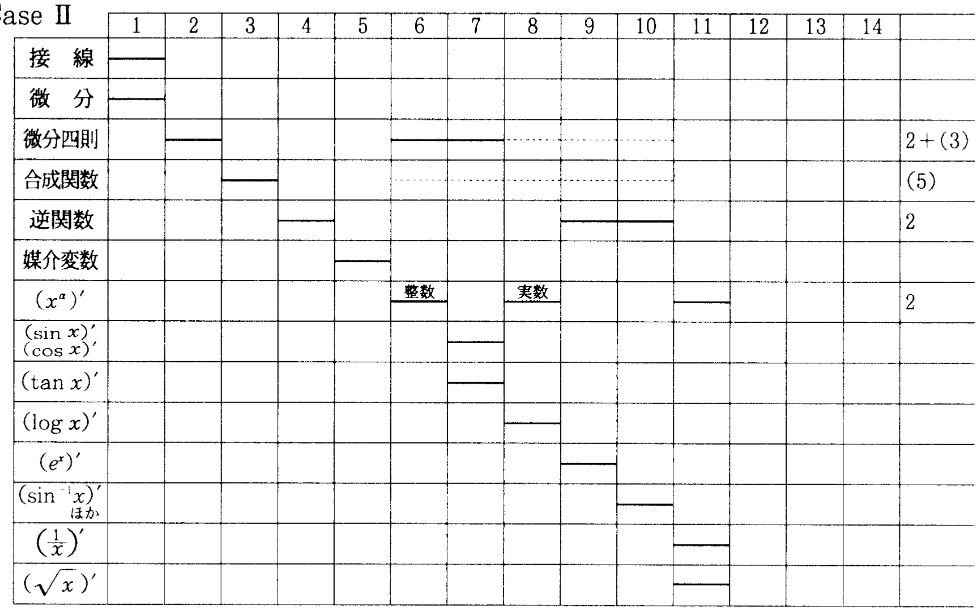
case Ⅱ は微分法則先習型で，演繹的で，時間が少くてすむが，学習上の問題がある。

case Ⅲ は両者の折衷型で，漸進的であり，教育的には最もよいが，時間がかかる嫌いがある。従って縮約カリキュラムとしては，case Ⅰ の方が無難であると考えられる。

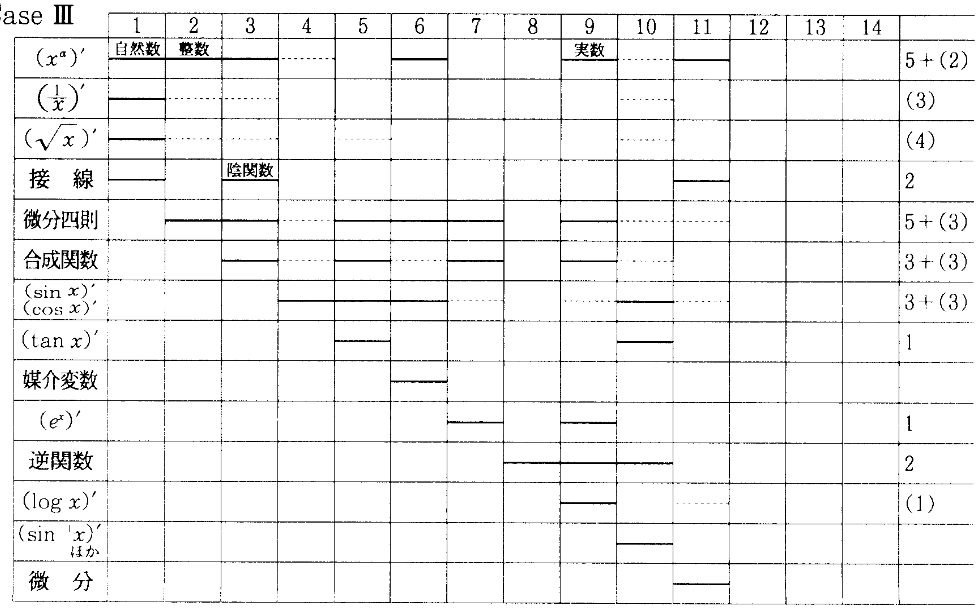
Case Ⅰ



Case Ⅱ



Case Ⅲ



(2) 積分法

積分法の取扱い方には二通りのいき方がみられる。

Case I（不定積分から入る方式）

1) 不定積分

§1. 不定積分　　定義，基本公式，基本性質

§2. 置換積分法

基本定理，$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$，$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$，$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$

§3. 部分積分法

基本定理，$\int \sqrt{x^2+A}\,dx$，$\int e^{ax} \underset{(\cos)}{\sin}\, bx\,dx$

§4. 有理関数の積分

例題，$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$，$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

§5. いろいろの積分

三角関数：$\int f(\underset{(\cos)}{\sin}\, x)dx$，$\int f(\sin^2 x,\ \cos^2 x)dx$，$\int f(\sin x,\ \cos x)dx$

無理関数：$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$，$\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$，$\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx$，etc.

指数・対数：$\int f(e^x)dx$，$\int f(\log x)\frac{1}{x}\,dx$

§6. 簡単な微分方程式　　直接積分，変数分離形，（定係数2階線形）

2) 定積分

§1. 定積分

§2. 置換積分法，部分積分法

置換積分の定理，$\int_{-a}^{a} f(x)dx$ ；部分積分の定理，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{(\cos)}{\sin^n}\, x\,dx$

§3. 広義積分

§4. 定積分の応用

(i) 面積　　直交座標，媒介変数表示，極座標

(ii) 曲線の長さ　　直交座標，媒介変数表示，極座標

(iii) 回転体の体積と表面積

(iv) いろいろの応用　　速度と距離，平均値，重心，近似積分

Case II（定積分から入る方式）[7]

1) 積分法

§1．定積分

定積分の概念と定義，連続関数の定積分，微分積分法の定理，原始関数と不定積分，定積分の基本性質，定積分の簡単な計算，応用例（面積，速度と距離など）

§2．不定積分　　基本方式，例題

§3．置換積分法

基本定理，$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$，$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$，$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$，$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$，$\int_{-a}^a f(x)dx$

§4．部分積分法

基本定理，$\int\sqrt{x^2+A}\,dx$，$\int e^{ax}\underset{(\cos)}{\sin}bx\,dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underset{(\cos)}{\sin^n}x\,dx$

§5．有理関数の積分

例題，$\int\frac{dx}{x^2-a^2}$，$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

§6．いろいろの積分　　積分表

§7．広義積分

2)　積分の応用

§1．微分方程式

§2．面積

§3．数値積分

§4．回転体の体積と表面積

§5．曲線の長さ

§6．平均値，重心

不定積分から入るか，定積分から入るかについては，いろいろ論議されるところであるが[8)]，現在のテキストでは前者が主流となっている。しかしこの方式は導入時における積分記号の不自然さがあり，また不定積分の必要性，学習目的が終りまでわからないという欠点がある。目的は定積分にあるのだから，最初に積分概念を導入し，これを中心として進めるのが自然であろう。特に縮約カリキュラムにおいてはcase Ⅱ の方が適している。この場合前段階として区分求積法を入れるとわかり易いが，時間がないのでこれを割愛して，面積の考えをもとにいきなり定積分の定義に入り，連続関数の積分可能性をあっさり取扱ってすぐに微分積分法の定理を導き，ここで不定積分と結びつける。定積分の計算はごく簡単な関数についてやり，面積のほか速度と距離などの応用にふれておく。以後しばらく不定積分を中心として進めるが，所々に定積分の問題を入れるとよい。置換積分法，部分積分法は定積分と一緒にやり，必要な補助公式もここに入れてしまう。またいろいろの積分（三角関数，無理関数など）は既述のように置換積分法に包括させる。積分の応用では，まず微分方程式，次に面積に続いて数値積分を早く入れる。これは以後の場面でも利用するためである。以後の項目は時間により，適宜短縮して取扱うこととする。

⑶ 統計学（推定検定）

推定検定は通常次のように展開される。

Case Ⅰ

1） 推定

§1．点推定

不偏推定量，有効推定量，一致推定量，最尤推定量

§2．区間推定

（ⅰ） 平均値の推定

① σ既知の場合　② σ未知の場合　③ 平均値の差

（ⅱ） 比率の推定

① 大標本の場合　② 小標本の場合　③ 有限母集団の場合

（ⅲ） 分散の推定

2） 検定

§1．統計的仮説の検定（考え方）

§2．母数の検定

（ⅰ） 平均値の検定　① σ既知の場合　② σ未知の場合

（ⅱ） 比率の推定

（ⅲ） 分散の検定

§3．比較検定

（ⅰ） 分散比の検定

（ⅱ） 平均値の差の検定

① σ_1，σ_2既知　② $\sigma_1=\sigma_2$（未知）　③ $\sigma_1\fallingdotseq\sigma_2$（未知）　④ 対応のある場合

（ⅲ） 比率の差の検定

§4．適合度の検定

（ⅰ） 分布の適合度の検定

（ⅱ） 分割表の検定（独立性の検定）

これらを縮約したものとして次の案が考えられる。

Case Ⅱ

1） 母数の推測

§1．検定の考え方と方式（σ既知の正規母集団）

§2．区間推定（σ既知の正規母集団）

§3．σ未知の場合の平均値の推測（大標本の場合，小標本の場合）

§4．比率の推測（大標本の場合）

§5．分散の推測

2） 有意差の検出

§1．分散の有意差

§2．平均値の有意差

（i）σ_1，σ_2既知　（ii）$\sigma_1=\sigma_2$（未知）（iii）$\sigma_1\neq\sigma_2$（未知）（iv）対応がある場合

§3．比率の有意差（大標本の場合）

3）適合度の検定

§1．分布の適合性

§2．分割表の検定

Case I では推定で行った場合分けを，検定においてまた繰返しているが，case II では推測（検定，推定）を中心概念として，同時に場合分けして有効に展開される。これは単に時間の節約のみならず，実際に品質管理などでこのように同時に適用されることが多い[9]。また統計学として全体構造がつかみ易いし，標本分布が基礎であることが明瞭に認識され，将来新しい分布がわかれば，これに対する検定・推定が同時に行われるという発展性をもつ。なお点推定論は，不偏推定量については分布論のところでふれておき，その他の十分性，一致性や最尤推定は統計学の専門的な内容なので，縮約カリキュラムでは割愛し，できれば付録（補助教材）に入れるとよい。

おわりに

「時間がない」ということは教授者からよく聞かれる嘆きであるが，これはカリキュラムに無理があるからである。これを解決するためには，まず教材の精選を行ない，さらにこれを縮約することが必要である。この際，教材の構造と数学教育の有効性が真剣に問われることとなる。本論がそのための方法論として一助となれば幸である。

参考文献

1）宮本一郎：数学教材の精選――視点とその方法，富山工業高等専門学校紀要 Vol. 12, No. 1 (pp. 99－106), 1978.

2）水本久夫：微分積分学の基礎，培風館，1983 など.

3）宮本一郎：工科系のための微積分学教程（pp. 58－59)，学術図書出版，1989.

4）竹内端三：高等微分学（p. 88)，裳華房，1937.

5）矢野健太郎・石原繁：科学技術者のための基礎数学（pp. 30－37)，裳華房，1968.

6）高橋進一：工業技術数学（pp. 72－86)，三省堂，1942.

7）高橋陸男・古後楠徳：理工系　教養の微積分，学術図書出版，1985 など.

8）新海寛：高等学校の教科書に見られる「積分導入法」の問題について，数学教育学会研究紀要 Vol. 22, No. 12 (pp. 54－66), 1981.

9）森口繁一：初等数理統計学（改訂版)，培風館，1957 など.

（平成3年10月29日受理）