

周期関数的形状を有する導体表面の電界解析

木 脇 久 智* ・ 木 川 英 一** ・ 桑 野 朋 彦**

Analysis of Electostatic Field on a Conductor Surface Having Sinusoidal Wave Form

Hisatomo KIWAKI, Eiichi KIGAWA, Tomohiko KUWANO

Electrostatic charge distribution on a conductor surface having sinusoidal wave form is analysed using surface charge method. The calculation has been performed under the condition that the tangential component of the electric field becomes zero at the any point on the surface. As a result for an isolated plate the charge density can be determined with significant figures of 4.

1. まえがき

導体系の表面電界を数値的に解析する方法としては、有限要素法、境界要素法、代用電荷法、表面電荷法等、各種のものが知られているが、⁽¹⁾計算速度と精度という観点から総合的に判定すると、必ずしも満足すべき方法は存在しない。

表面電荷法は、導体表面の代わりに実在の電荷や誘導電荷をその位置において考え、境界条件を満足するように、積分方程式を解く問題に帰着する。従って一般的に広く表面電荷法を適用することには困難を伴うが、たとえば2次元の問題で表面の形状に周期性がある場合などに限定すれば、高精度の数値解が得られる可能性がある。勿論周期関数であっても、高次の高調波までの考慮が必要な複雑な形状の場合には、それに対応して精度の低下、計算時間の増加などの問題を生ずるであろう。しかしこのような具体的な個々の問題に関して、精度や計算時間など実用的なデータを提供することはきわめて有意義であると考えるのである。

ここでは表面が最も簡単な $y = \cos x$ なる正弦波関数の形状を有する波板の表面電界に関して、計算精度に重点をおいて検討を行った結果について述べる。

2. 計算に用いたモデル

図1及び図2は計算に用いた電極配置である。まず図1においては、 z 方向の長さ無限大で $y_1 = \cos x$ なる表面形状を有する孤立した広い波板1を考える。この場合2枚の対電極が遠方であり、電気力線は波板から双方向に分配されている。

次に図2においては $y_1 = \cos x$ なる波板1に対して $y_2 = 2 + d - \cos x$ なる形状で逆極性に帯電した対電極2がある。図から明らかなように1と2の最短距離は d であり、電気力線は

*応用理化学科 **応用理化学科卒研究生

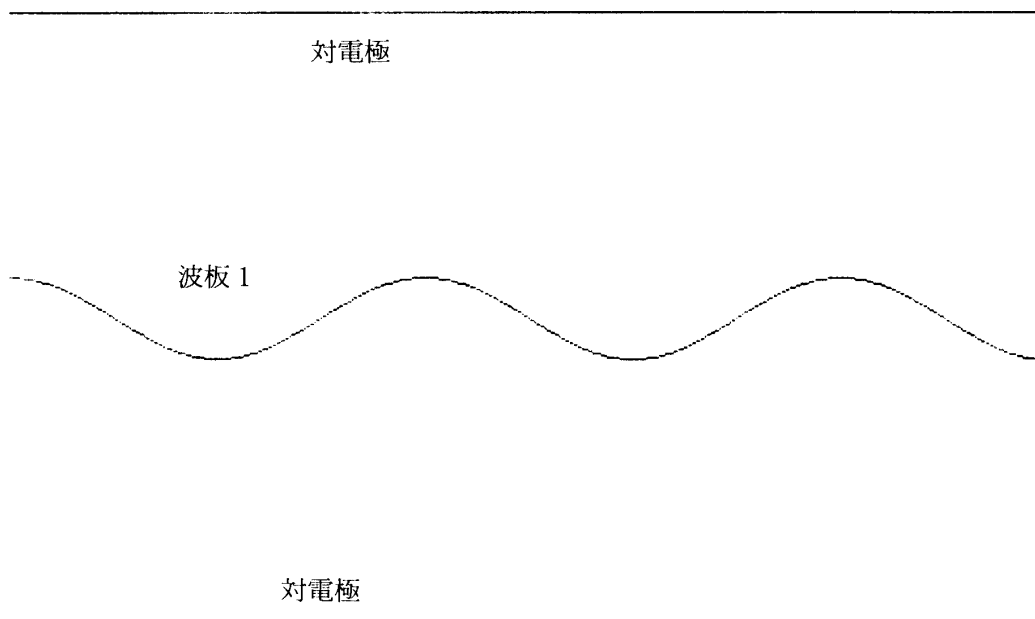


図 1

両電極間で授受されている。なお図 2 の問題が解ければ、影像の考えから、波板と接地平板の電極配置の問題も同時に解けたことになる。(平板の位置は両波板の中央に想定する。)

3. 計算方法と結果

3. 1 孤立した波板の電界

図 1 において波板の周期性から、波板上に現われる電荷もすべて x に関する周期関数 $\rho(x)$ となることが明らかである。またこの電荷によって面上の任意の点 x_0 に生ずる電位はすべて等しい。しかしいま考えている電位は電荷素片たる線電荷にもとづくものであり、積分を行った結果は対数表示となって不都合である。よって本計算では面上の電界の切線方向の成分が 0 という条件を利用した。すなはちこれは導体表面の条件に他ならない。

以上のことを考慮し、実際に図の曲面上の任意の 1 点 x_0 において電界の切線方向成分を計算した結果は (1) 式のとおりである。

$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\rho(x) dx}{\sqrt{(\cos x_0 - \cos x)^2 + (x_0 - x)^2} x \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad (1)$$

$$\text{ただし } \tan \alpha = (\tan \phi - \tan \theta) / (1 + \tan \phi \tan \theta)$$

$$\tan \phi = (\cos x_0 - \cos x) / (x_0 - x)$$

$$\tan \theta = -\sin x_0$$

である。

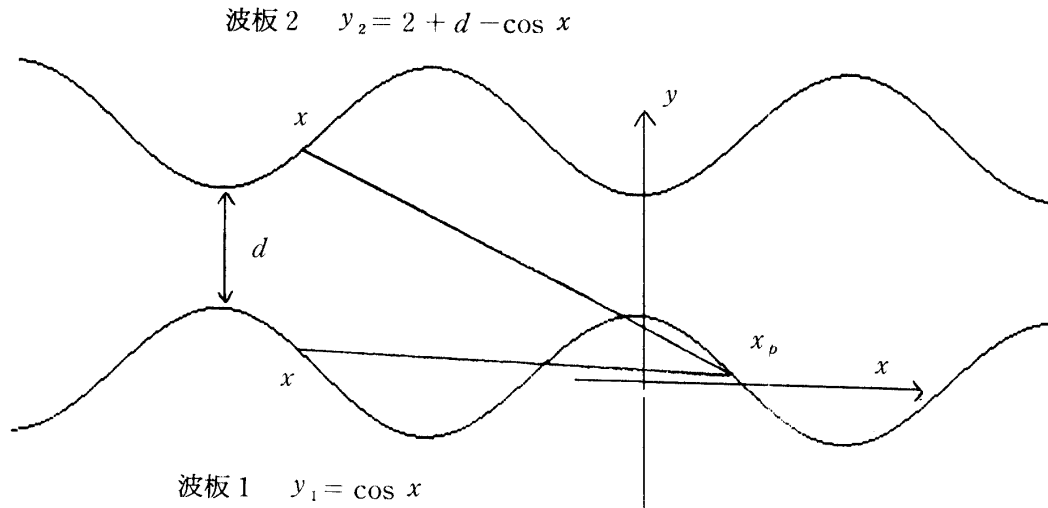


図 2

(1) 式を 0 とおいた積分方程式を解くためには、まず $\rho(x)$ という電荷密度を表す周期関数を、 $\cos x$ の高次高調波 $A_N \cos Nx$ (N は高調波の次数、 A_N は係数) の 1 次結合と考えその各成分に対して、曲面状の任意の 1 点における電界の切線方向の成分を計算しておく必要がある。このとき各調波成分の電荷に対して適当な係数をかけ、その合成された切線方向の電界成分が 0 となるような結果が得られれば、問題が解決したことになる。

もちろん数値解法であるから完全に 0 となるわけではないが、十分に小さな値にすることが出来れば、実用上目的が達成されたことになる。図 3 は波板上にそれぞれ単位の一電荷密度 1、 $\cos x$ 、 $\cos 2x$ 、 $\cos 4x$ 等の電荷を想定したとき、任意の点 x_0 において現われる、電界の切線方向の成分を計算した結果を示す。従って各成分の電荷密度に適当な係数を掛け、これらの電界水平成分を合成した結果が、0 に近づくようにできればよい。

いま便宜上一定電荷密度分を 1 とし、試算を行うと近似解として

$$\rho = 1 + 0.043961 \cos 2x$$

を得る。高次の項を追加すれば、さらに精度は高まるはずであるが、上記の結果だけでも有効数字で 4 桁の精度は十分にあるものと考えられる。

この計算は視察によって求めたものであるが、さらに精密な方法として各電界成分をフーリエ級数に展開し、最小自乗処理で係数を求める方法を検討中である。なお $\cos x$ の項に付いては参考までに示しただけであって、図 1 のように上下に対電極がある配置では結果に現われない。

ところで、図 3 の結果を得るためには -無限大から +無限大の x に亘って数値積分を行う必要があり、有限の x で打ち切ると誤差を生ずる。

本計算ではガウス積分の 1024 点法を用い、かつ打ちきり誤差を推定補正して、電界値について約 7 桁の有効数字を得ている。上に得られた波板の電荷密度 (x 方向 z 方向単位長当りの値、

単位表面積当りではないことに注意)と、両側に想定した対電極の表面電荷(この場合表面電荷密度0.5)による電界を積分すれば、任意の空間点の電界を求めることができる。

3. 2 対置された2枚の波板間の電界

図2において波板1上の電荷密度を周期関数 $\rho(x)$ とすれば対電極たる波板2では $-\rho(x)$ の密度を有することになる。そうしてこれらの電荷によって生ずる各面上の任意の点(たとえば x_0)における電界の切線方向成分の総和はすべて0にならなければならない。

実際に x_0 における電界の電界の切線方向成分を計算した結果は(2)式のとおりである。

$$\begin{aligned}
 E_T &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\rho(x)}{\sqrt{(\cos x_0 - \cos x)^2 + (x_0 - x)^2}} x \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\rho(x)}{\sqrt{(\cos x_0 - 2 - d + \cos x)^2 + (x_0 - x)^2}} x \sqrt{1 + \tan^2 \alpha z} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (E_{T1} - E_{T2}) \quad (2)
 \end{aligned}$$

ただし $\tan \alpha = (\tan \phi - \tan \theta) / (1 + \tan \phi \tan \theta)$

$\tan \phi = (\cos x_0 - \cos x) / (x_0 - x)$

$\tan \theta = -\sin x_0$

$\tan \alpha z = (\tan \phi z - \tan \theta) / (1 + \tan \phi z \tan \theta)$

$\tan \phi z = (\cos x_0 - 2 - d + \cos x) / (x_0 - x)$

である。従って任意の x_0 にたいして

$$E_{T1} - E_{T2} = 0 \quad (3)$$

となるような $\rho(x)$ を求めることができればよい。なお図より明らかなように、波板1上の電荷分布が分かれば、対称の考えから、波板2上の電荷分布は直ちに求められる。

(3)の積分方程式を解くためには前記と同様にまず $\rho(x)$ という電荷密度を表す周期関数を、一定電荷分1、 $A_1 \cos x$ 、およびその高次高調波 $A_N \cos Nx$ (N は高調波の次数、 A_N は係数)の1次結合と考え、その各成分に対して曲面状の任意の1点における電界の切線方向の成分を計算しておく。このとき各調波成分の電荷に対して適当な係数をかけ、その合成された切線方向の電界成分が0となるような結果をもとめればよい。また任意の空間点の電界は上記と同様に、得られた極板上のすべての電荷による電界を積分することによって求められる。

しかし上記の配置で視察による電荷分布の決定は非常な困難をとまなう。従ってこの場合の実用的計算法については、検討の余地がある。

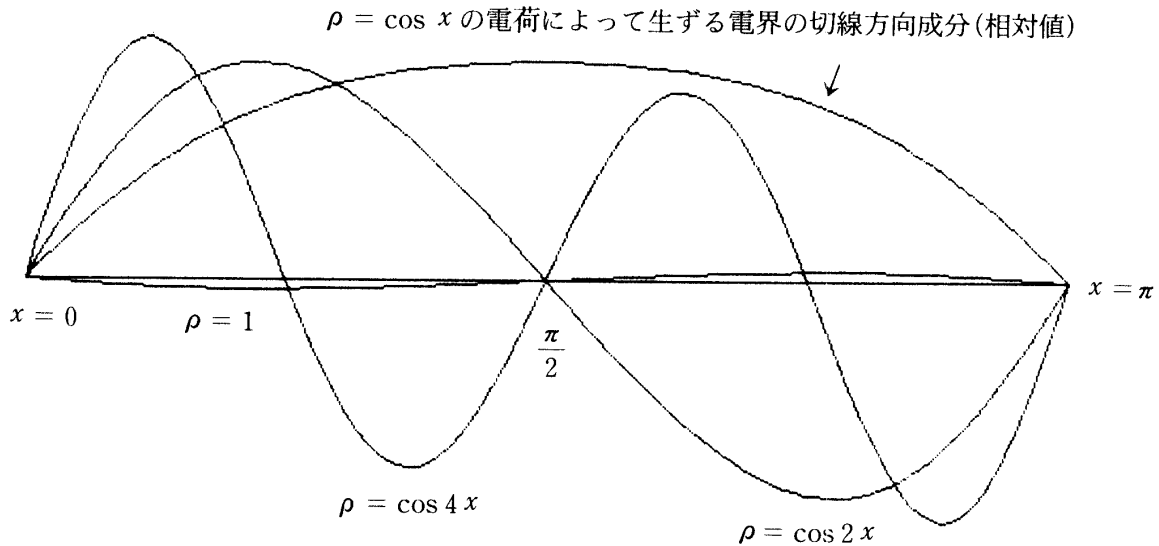


図3 各電荷によって生ずる電界の切線方向成分

(2) 式は d の中間的な値に対して数値積分の精度が低下するという問題点が残っている。しかし十分大きな d に対しては対電極を一樣な平均電荷密度を有する平板とみなして計算することが許される。このときは対電極によって波板上の切線方向に生ずる電界成分を考慮しこれが波板上の電荷によって生ずる水平方向成分を打ち消すと考える。次式はこのようにして得られた計算結果を示す。

$$\rho = 1 + 0.825 \cos x + 0.0440 \cos 2x - 0.00560 \cos 3x$$

4 まとめ

以上のごとく表面電荷法により、特定の場合に対し、相当な精度で電荷分布を求めることができた。しかし表面電荷の最終決定に関しては、フーリエ級数による展開や、最小自乗法による精密な処理を検討すべきであろう。また、波板を単純に $\cos x$ としたが、さらに一般に $\cos nx$ と考えたときののびちの影響や、あるいはもっと複雑な形状の波板の問題など、困難な課題も残されており、今後検討を進めたいと考える。

参考文献

- (1) 河野照哉, 宅間 重: 数値電界計算法, コロナ社

(平成6年12月17日受理)