大学基礎教育における
離散数学と解析数学の統一カリキュラム

宮　本　一　郎*

A Unified Curriculum of Discrete Mathematics and Analytical Mathematics (for the general education in university)

Ichiro MIYAMOTO

Recently, "discrete mathematics" is becoming noticable in mathematical education, as the computer utilities are increasing more and more. The former "analytical mathematics" is also important, but it must be reduced, so as to construct the unified curriculum of both mathematics. This paper deals with the various problems about the construction, and presents a trial plan for it.

まえがき

近年，コンピュータの発達によって数学教育にも変革が起りつつあることは否定できない流れである。小，中，高の数学科学習指導要領の改定にあたって，このことが大きく盛りこまれているが，大学レベルの数学教授内容についても当然この配慮がなされねばならない。従来，大学の基礎数学としては，微分積分学，解析学（これを「解析数学」とよぶこととする。）が重点であったが，近年，次第に線形代数，組合せ論など，いわゆる「離散数学」が重視されるようになってきている。これは応用的に，解析数学による連続的計算がコンピュータによる離散的計算によりある程度代行されるので，むしろコンピュータを利用する基礎的数学能力が要請されるようになった為であると考えられる。しかし解析数学の基礎的概念の理解はもちろん大切で軽視できないが，教授内容は従来より縮約することは可能である。それで離散数学，解析数学は二つの大きな柱であるが，むしろ前者に力点をおき，両者を合体させてカリキュラムを有機的に構成展開するための基礎的諸問題について論究し，その一試案を提示する。

1．離散数学の重要性

まず「離散数学」の意義とその果す役割について考える。

(1)　離散数学とは

＊教養部

「離散数学(discrete mathematics)」とは，以前に「有限数学(finite mathematics)」ともいわれたもので，コンピュータの発展利用にともなって重視されるようになった数学の諸分野である。その内容としてはいろいろのものが含まれるが[1~3]，主要なものとしては

集合，論理，組合せ論，線形代数，グラフ理論，確率論　など

さらにコンピュータに関連するものとして

ブール代数，その他の代数系，言語理論，計算理論（オートマトンなど）

も含まれる。将来，情報関係をめざす者に対しては必須の教育内容であると考えられる。

(2)　離散と連続

いろいろの現象は連続的な面と離散的な面をもっており，両者は相補的な関係にあると考えられる。社会現象や経済現象は通常，離散的な変化をするものとして差分方程式で表現されることが多い。しかし経済現象には連続的変化として説明されるものもいろいろある。また，物理現象にも両面があり，連続的に見えるものでも量子化によれば離散的な量の集まりと考えられ，突然の不連続的な変化もその過程を精密に観察すると連続的な推移と見ることができる[4]。物理現象は通常，微分方程式で表現されることが多いが，これを数値的にコンピュータで解くときは離数化して取扱うこととなる。従って離散数学が今日大きな役割を演じているといえよう。

2．離散数学と解析数学との関連

ここでは離散数学のうち，数学教育において重要な柱となる線形代数について，解析数学の柱となる微分積分学との関連をしらべ，カリキュラム構成の基礎資料とする。

(1)　行列式

〔例1〕　関数系の1次独立と Wronskian

$$W(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n) \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

が少くとも1点で成立すれば，$\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n\}$は1次独立である。

〔例2〕　重積分の変数変換と Jacobian

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_{D'} f\Big(\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v)\Big)|J|\,dudv$$

$$J = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

〔例3〕　陰関数の微分と Jacobian

$f(x,\ y,\ z)=0$，$g(x,\ y,\ z)=0$で，f，g が連続な偏導関数をもつとき

$J = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0$ の点の近くで，y，z は x の関数として表されて

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}$$

〔例４〕 行列式の微分

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2'(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3'(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1'(x) & h_1(x) \\ f_2(x) & g_2'(x) & h_2(x) \\ f_3(x) & g_3'(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1'(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2'(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

(2) ベクトル，行列

〔例１〕 ベクトルの微分

$\boldsymbol{p} = \Big(x(t),\ y(t),\ z(t)\Big)$ のとき $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{p}/dt = \Big(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\Big)$

〔例２〕 法線と接平面

曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ において，$\mathrm{grad.}f = (f_x, f_y, f_z)_P$

$$\begin{cases} \text{単位法線ベクトル：} \boldsymbol{n} = \mathrm{grad.}\,f/|\mathrm{grad.}\,f| = (l, m, n) \\ \text{接平面：} l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0) = 0 \end{cases}$$

〔例３〕 方向微分系数

スカラ場 $\boldsymbol{\varphi}(x, y, z)$ の点の単位ベクトル $\boldsymbol{u} = (l, m. n)$ への方向微分係数

$$d\varphi/du = \varDelta\varphi \cdot \boldsymbol{u} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\cdot(l, m, n)$$

〔例４〕 ベクトル場の発散，回転

ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ において

$$\begin{cases} \text{発散} \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} \qquad \text{(内積)} \\ \text{回転} \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v} \qquad \text{(外積)} \end{cases} \qquad \text{ただし } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

〔例５〕 線積分

ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ において，曲線弧 C： $\boldsymbol{r}(t) = \Big(x(t),\ y(t),\ z(t)\Big)$

に沿う線積分は $(a \leqq t \leqq b)$

$$\int_c \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_c \boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}dt = \int_a^b\Big\{v_1(t)x(t)+v_2(t)y(t)+v_3(t)z(t)\Big\}dt \ \text{(内積)}$$

〔例６〕 多変数の微分公式[5)]

$z = f\Big(x(t),\ y(t)\Big)$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}$$

$z = f\Big(x(u, v),\ y(u, v)\Big)$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

これは簡単に次のように行列表現できる。

$$\begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$$

〔例7〕 $z=f(x,\ y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$のときf_x, f_yをf_r, f_θで表せ。

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

これより逆行列を用いて簡単に

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ \dfrac{1}{r} f_\theta \end{pmatrix}$$

(3) 固有値問題，2次形式

〔例1〕 連立線形微分方程式の解法

$$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - 5x_2 \\ dx_2/dt = x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$とすると，上の方程式は$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$

いま$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}$とおいて上式へ代入すると

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

非自明の解をもつためには

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

これは行列Aの固有値問題である。

これを解いて

$$\begin{cases} \lambda = -3\text{のとき} & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 1\text{のとき} & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

注1．初期値問題で直交行列を用いて同様に特殊解を求める方法もあるが，このようにまず一般解を求める方が見通しがきいてわかり易い[6)]。

注2．高階線形微分方程式を連立形に直して，上のように固有値問題として解くこともできるが，これはあまり便利でなく，むしろ直接特性方程式を用いて解く方がよい。

〔例2〕 多変数の極値問題

2変数の場合，次のように2次形式の理論から導くことができる。

$f_x(a, b)=0$，$f_y(a, b)=0$ より

$$f(x, y)-f(a, b)=f_{xx}(a, b)(x-a)^2+2f_{xy}(a, b)(x-a)(x-b)+f_{yy}(a, b)(x-b)^2+R$$

右辺の2次形式は

$$Q=\begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

この対称行列はヘッセ行列(Hessian)といわれるもので，これをHで表す。

Hが定正(負)値のとき，Hの固有値はともに正(負)で，$f(a, b)$は極小(大)値となりHが不定値のときは，$f(a, b)$は極値とならない。

一方，シルベスターの定理より

Hが正定値のとき $\quad f_{xx}>0,\ \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}>0$

Hが負定値のとき $\quad f_{xx}<0,\ \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}>0$

となることから判別定理が導かれる[6,7]。

注．なお，この方法は3変数以上についても同様に適用できるので解析的方法より見通しがよい。

例．$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ の極値を求めよ。

$f_x=2x-y+1=0$，$f_y=2y-x=0$，$f_z=2z-2=0$

これを解いて $\quad (x, y, y)=(-2/3, -1/3, 1)$

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

首座小行列式を求めると

$$a_{11}=2>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3>0,\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6>0$$

よってHは定正値となるから，$f(-2/3, -1/3, 1)=-4/3$は極小値である。

〔例3〕 2次式の条件つき数値

$x^2+y^2=1$ のとき，$f(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$の極値は次の方程式をみたす。

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$$

証明は略するがLagrangeの乗数法に関連して固有値モデルがよく現れる。

3. 解析数学カリキュラムの縮約

離散数学に重点をおくときは，当然解析数学の教授内容を精選縮約し，また離散数学との関連をも配慮することが必要である。

(1)　概念の理解を主として計算を少くする。

コンピュータの発達によって数式計算も自動化され，たとえば“mathematica”により微積計算も容易にできるようになってきたので複雑な手計算はあまり必要でなく，繁雑な高階微分の計算や Leibniz の公式，あるいは複雑な置換を用いる不定積分などは割愛してよい。

(2)　定理を精選し，またその取扱いを工夫して最短パスの命題系を構成する。

平均値の定理は直観的に導入し(ロルの定理は特別な場合として含ませる)，コーシーの平均値定理は割愛する。これは後にロピタルの定理の証明に必要となるが，f(x)，g(x)が連続な導関数をもつことを仮定すれば（実用的にはそれで十分)，これを用いなくてもよい。

関数の展開で剰余項の取扱いが面倒なので，整級数展開の可能性を仮定して展開公式を導き，後にその収束半径について検討することとする。

積分は定積分より入り，後不定積分と平行して進める。置換積分，部分積分の定理は両者まとめて示す。

(3)　偏微分，重積分はそれぞれ一変数の微分，積分の直後その延長上に入れる。

極限値や連続性などをあまりやかましくいわないですぐ偏積分に入り，その微分法則，全微分による近似計算，極値問題などを重点とする。

重積分は一応定義から入るが，累次積分の計算を十分理解させる。積分順序の変更は深入りしない。また体積や表面積は簡単なものに止める。変数変換は極座標変換を主体とする。

(4)　ベクトル解析の基礎の部分を取り入れる。

媒介変数表示の微分で，運動の速度に関連してベクトルの微分を導入し以後随所で用いる。

(5)　微分方程式は重点的に取扱う。

直接微分形，変数分離形までで基礎的取扱いを理解させ，応用として定数係数線形微分方程式（1階，2階，1階連立）を取扱う。Wronskian や固有値問題にふれる。

4. 線形代数教授内容の検討

線形代数自身の内容についてもいろいろの問題があるので，これについて検討する。

(1)　単元の配列方式

これには次のような方式がある。

a. ベクトル —— 行列 —— 行列式 —— 行列（固有値)

b. ベクトル —— 行列式 —— 行列

c. 行列 —— 行列式 —— ベクトル —— 行列（固有値)

d. 行列式 —— 行列 —— ベクトル —— 行列（固有値)

a，b はベクトルを一般化して行列へ導くもの，c，d は逆に行列を特殊化してベクトルをやり，このとき行列式を利用するものである。最近掃き出し法で逆行列を求める a，c が多い。

(2) 行列の階数の取扱い方[8)]

行列の階数の定義に 3 通りある。

①行列式によるもの

②行列を基本変形によって標準形に直すもの

③行(列)ベクトルの 1 次独立なものの最大個数

これは単元の配列方式によって定まる。すなわち

a……②，③，　b……①，②，③，　c……②，　d……①，②

(3) 行列式の定義

通常の一般的定義のほか，2 次，3 次の行列式を中心として直観的に展開しようとする試みがなされている[9)]。行列式の基本性質を導くのに 3 次を中心として進めるとき少し計算を必要とするが，余因数展開に強くなるという副産物もあり，教育上有効であると考えられる。

(4) 固有値問題の最短パス

この部分もやればいろいろと時間がかかるので，これを最小時間でおさえることを試みる。

① 1 次変換，回転公式，直交行列と直交変換

②固有値，固有ベクトル，固有方程式

③対称行列の固有値は実数である。(2 次の場合を証明，一般の場合は証明略)

④対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。

⑤ 2 次の対称行列の異なる固有直 λ_1，λ_2に対する単位固有ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，とし，

$\mathrm{P} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ を作ると　${}^t\mathrm{PAP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$　となる。

このことは 3 次以上の対称行列についても成り立つことは同様に容易にいえる。

注．固有方程式が重解をもつときも対角化可能なことを例によって示す。(深入りしない)

⑥ 2 次形式の行列表現，標準化

⑦ 2 次曲線のグラフ

(5) ベクトル空間

ベクトルは行列の後，数ベクトルとして導入し，後矢線ベクトルとして図形の性質に応用するのが効果的である。ベクトル空間は 1 次独立，1 次従属の概念を明確におさえるのがポイント。

5．線形代数，微積分の統一カリキュラム試案

I．線 形 代 数

1．行列

(1)行列の定義と演算

(2)演算の法則

(3)数の演算との比較（零因子，逆行列）

(4)指数法則，転置行列，対称行列

2．連立１次方程式の解法

(1)行基本操作，掃き出し法

(2)解の検討，行列の階数

(3)逆行列，同次方程式の解

3．行　列　式

(1)行列式の定義

(2)行列式の基本性質

(3)余因数展開

(4)逆行列の公式，クラーメルの公式

(5)積の行列式，同次方程式の解

4．ベ ク ト ル

(1)数ベクトルの演算，ベクトル空間

(2)１次結合，１次従属，１次独立

(3)部分空間と次元

(4)矢線ベクトルによる表現

(5)内積，ベクトルの長さ，矢線ベクトルによる表現，平行条件，垂直条件

(6)正規直交基底と成分ベクトル

(7)直線，平面の方程式と法線ベクトル

(8)外積

5．固有値問題

(1)１次変換，回転公式，直交行列と直交変換

(2)固有値，固有ベクトル

(3)対称行列の対角化

(4)２次形式の標準化，定正（負）値条件

(5)一般２次曲線のグラフ

II．微　分　学

1．関数の極限と連続

(1)関数の極限

(2)関数の連続，連続関数の性質

(3)逆関数の連続，逆三角関数

2．微　分　法

(1)微分係数，導関数，$(x^n)'$

(2)微分法，演算法則（四則，合成関数），$(x^r)'$

(3)簡単な応用（変化率，接線，微分と微小変化）

(4)三角関数の導関数，媒介変数表示，ベクトルの微分法

(5)逆関数の微分法，対数関数，指数関数，逆三角関数の導関数

3．微分法の応用

(1)高階導関数，平均値の定理，関数の展開

(2)関数の増減と極大極小，最大最小問題

(3)曲線の概形（凹凸，漸近線）

4．偏微分とその応用

(1)偏微分係数，偏導関数，全微分と微小変化

(2)方向微分係数，勾配，接平面と法線

(3)合成関数の微分公式，陰関数の微分法

(4)高階微分，関数の展開

(5)多変数関数の極値，ラグランジュの乗数法

III. 積　分　学

1．積　分　法

(1)積分概念，定積分，原始関数，不定積分

(2)積分の基本性質

(3)不定積分の基本公式，簡単な部分分数分解

(4)置換積分法，偶関数と奇関数の積分公式

(5)部分積分法，補助公式

(6)広義積分

(7)数値積分法(台形公式，シンプソン公式)

2．積分の応用

(1)面積(媒介変数，極座標を含む)

(2)曲線の長さ(同上)

(3)回転体の体積と表面積

(4)その他の計量的応用

3．微分方程式

(1)微分方程式の意義，立式，一般解，特殊解

(2)変数分離形

(3)定数係数線形（1階，2階，1階連立）

4．重積分とその応用

(1) 2重積分の意義とその性質

(2)累次積分

(3)変数変換

(4) 3重積分，変数変換

(5)体積（柱状立体，簡単な相貫体）

(6)表面積（同上）

おわりに

離散数学の柱である線形代数に微積分を縮約して接続させ，直進的に展開させるように配慮したが，試案ではまだ教授時間が不足するように思われる。しかし要は各教材の取扱い方と例題の選択にあると思われるのでさらに具体的に検討していきたい。なお離散数学の他の部分である組合せ論，その他の代数系，グラフ理論などをどの程度取り入れていくべきかは今後の課題として検討していきたいと考えている。

参　考　文　献

1) Seymour Lipschutz(成嶋弘 監訳)：離散数学〔マグロヒル大学演習シリーズ〕マグロヒルブック㈱，1984.
2) 赤攝也，伊理正夫，後藤英一，広瀬健：情報処理のための数学，共立出版，1975.
3) 伊理正夫，野崎昭弘，一松信：コンピュータのための数学〔コンピュータと数学 2〕，別冊数学セミナー，日本評論社，1985.
4) 近藤次郎：数学モデル，丸善，1976，(pp.243－276).
5) 中島惇，石川洋文，梶原毅：応用科学のための数学の基礎，共立出版，1993.
6) C.R. Wylie, L.C. Barrett : Advanced Engineering Mathematics, 5th ed. McGRAW-Hill, 1992. (pp.232－246).
7) 町田東一，駒崎友和，松浦武信：マトリクスの固有値と対角化，東海大学出版，1990.
8) 宮本一郎：数学教材配列の比較研究，富山工業高等専門学校紀要，Vol.13，No.1，1979.（pp.107－108).
9) 宮本一郎：高専における数学教育の現代化（第4報)，富山工業高等専門学校紀要，Vol.8，No.1，1974，(pp.152－153).

(平成6年10月25日受理)