矩形パルスのウェーブレット変換に関する解析的考察

鈴木　力*・鈴木一成*

Analytical Consideration on the wavelet Transform for the Rectangular Pulse

Chikara SUZUKI and Kazushige SUZUKI

This paper presents the continuous wavelet transform of the rectangular pulse. It means the simplest form of the black-and-white picture. The transform and the inverse transform of the rectangular pulse are calculated by the sum of the positive and negative step functions.

1 序　論

時間周波数解析の手法として，窓関数を用いた短時間フーリェ変換（Short time Fourier transform，STFT）があるが，この方法では，時間一周波数分解能が固定されてしまうので，解析対象信号中に含まれる周波数成分によっては，選定した窓関数が不適切となることがある．そのため，時間分解能と周波数分解能の積が一定の条件のもとに，一方が他方に対して自動的に変化するウェーブレット変換が提案されている[(1)~(6)]．

本論文では，ウェーブレット変換の基本的な性質を把握するため，2値画像を最も単純化した矩形パルスの連続ウェーブレット変換について考察する．

2 基本式

アナライジング　ウェーブレット　$\psi(t)$ について，幾つかの提案があるが[(2), (3)]，ここでは，解析的に取り扱いやすい　French hat　を用いる．

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= 0 & t &< -3 \\
&= -1/(2\cdot 3^{1/2}) & -3 \leqq t &< -1 \\
&= -1/3^{1/2} & -1 \leqq t &< 1 \\
&= -1/(2\cdot 3^{1/2}) & 1 \leqq t &< 3 \\
&= 0 & 3 &\leqq t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

*電気工学科

この場合のウェーブレット基底関数は次式となる.

$$\psi_{ab}(t)=1/(3a)^{1/2}\cdot\psi\{(t-b)/a\} \qquad (2)$$

ここに, a：スケール係数（正の実数）, b：シフト係数（実数）である。

すなわち,

$$\begin{array}{ll} t-b<-3a & \psi_{ab}(t)=0 \\ -3a\leqq t-b<-a & \psi_{ab}(t)=-1/\{2(3a)^{1/2}\} \\ -a\leqq t-b<a & \psi_{ab}(t)=1/(3a)^{1/2} \\ a\leqq t-b<3a & \psi_{ab}(t)=-1/\{2(3a)^{1/2}\} \\ 3a\leqq t-b & \psi_{ab}(t)=0 \end{array} \qquad (3)$$

3　ウェーブレット変換

信号f（t）のウェーブレット変換は次式で定義される[3].

$$W_f(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{\psi}_{ab}(t)\,dt \qquad (4)$$

ここに, $\overline{\psi}_{ab}(t)$は, $\psi_{ab}(t)$の共役複素数を示す（今の場合は, $\psi_{ab}(t)$は実数部のみである）.

4　矩形パルスのウェーブレット変換

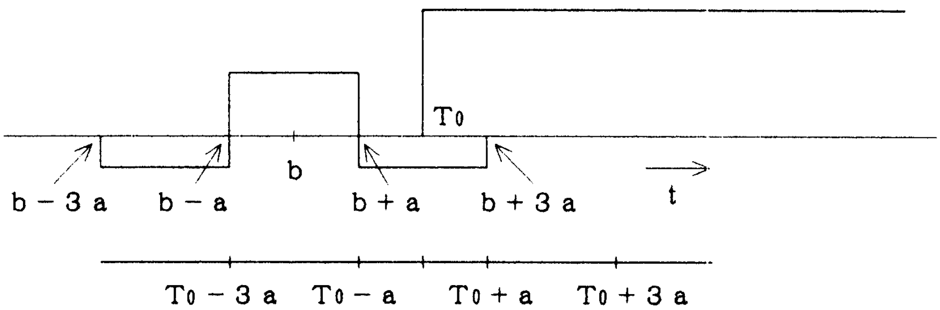
矩形パルスの信号f（t）を$t=T_{01}$で立ち上がる正のステップ関数$f_1(t)$と$t=T_{02}$（$T=T_{02}-T_{01}$）で立ち上がる負のステップ関数の和に分解する（簡単のために, 混乱のおそれがない場合には, T_{01}, T_{02}をT_0と略記する）

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t) \qquad (5)$$

この場合のウェーブレット変換は次式となり, 正のステップ関数のウェーブレット変換と負のステップ関数のウェーブレット変換の和となる.

$$W_f(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\,\overline{\psi}_{ab}(t)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)\,\overline{\psi}_{ab}(t)\,dt \qquad (6)$$

正のステップ関数のウェーブレット変換を概念的に図示すると第1図のようになる.

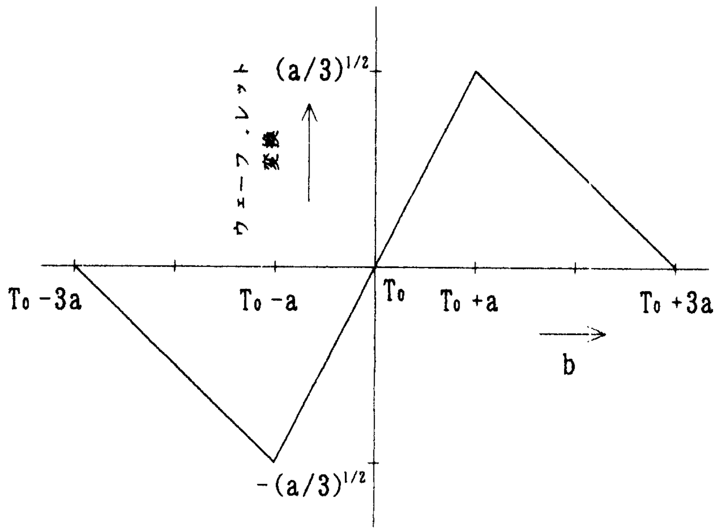


第１図　正のステップ関数のウェーブレット変換の概念図

この図では，T_0〜$b+3a$ の基底関数の面積がウェーブレット変換の値となる．

負のステップ関数の場合は符号が逆になる（矩形パルス，ステップ関数は，単位の大きさとする）．

正のステップのウェーブレット変換は，a を一定として基底関数の b を $-\infty \to T_0-3a \to T_0 \to T_0+3a \to \infty$ と動かすと第２図のようになる．



第２図　正のステップ関数のウェーブレット変換

また，式で表すと次のようになる．

$$
\begin{aligned}
& b < T_0-3a \\
& \quad W_f = 0 \\
& T_0-3a \leqq b < T_0-a \\
& \quad W_f = -(b-T_0)/\{2(3a)^{1/2}\} - (3a)^{1/2}/2 \\
& T_0-a \leqq b < T_0+a \\
& \quad W_f = (b-T_0)/(3a)^{1/2} \\
& T_0+a \leqq b < T_0+3a \\
& \quad W_f = -(b-T_0)/\{2(3a)^{1/2}\} + (3a)^{1/2}/2 \\
& T_0+3a \leqq b \\
& \quad W_f = 0
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

矩形パルス（$-T/2 \sim T/2$）のウェーブレット変換は，$-T/2$の正のステップ関数と$T/2$の負のステップ関数の和となる．

5　ウェーブレット逆変換

ウェーブレット逆変換は，次式で定義される[2]．

$$f(t) = (1/C_\psi) \int_0^\infty \{ \int_{-\infty}^\infty W_f(a, b)\, \psi_{ab}(t)\, db \}\, da/a^2 \quad (8)$$

ここに，係数C_ψは，次式で与えられる．

$$C_\psi = \int_{-\infty}^\infty \{ \Psi^2(\omega) / |\omega| \}\, d\omega \quad (9)$$

ただし，$\Psi(\omega)$は，アナライジング　ウェーブレット　$\psi(t)$のフーリェ変換で，次式となる．

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty \psi(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \{ 4 / (3^{1/2} \omega) \} \sin^3 \omega \end{aligned} \quad (9a)$$

したがって，この場合の係数C_ψは次のようになる．

$$\begin{aligned} C_\psi &= (16/3) \int_{-\infty}^\infty \{ \sin^6 \omega / (\omega^2 |\omega|) \}\, d\omega \\ &= 2.249 \end{aligned} \quad (9b)$$

6　ステップ関数の逆変換

正のステップ関数　$t > T_0$の場合：
逆変換の定義式の｛　｝の中のbに関する積分

$$I_b = \int_{-\infty}^\infty W_f(a, b)\, \psi_{ab}(t)\, db \quad (10)$$

は次のようになる．

$a > (t - T_0)/2$

$$I_{b1} = -5(t - T_0)^2/(12a) + (t - T_0) \tag{10a}$$

$(t - T_0)/2 \geqq a > (t - T_0)/4$

$$I_{b2} = 5(t - T_0)^2/(24a) - 3(t - T_0)/2 + 5a/2 \tag{10b}$$

$(t - T_0)/4 \geqq a > (t - T_0)/6$

$$I_{b3} = -(t - T_0)^2/(24a) + (t - T_0)/2 - 3a/2 \tag{10c}$$

$(t - T_0)/6 \geqq a > 0$

$$I_{b4} = 0 \tag{10d}$$

したがって，この場合の逆変換の積分

$$I_a = \int_0^{\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b)\, \phi_{ab}(t)\, db \}\, da/a^2 \tag{11}$$

は次のようになる．

$$I_{a1} = \int_{(T_0-t)/2}^{\infty} I_{b1}\, da/a^2 = 7/6 \tag{11a}$$

$$I_{a2} = \int_{(T_0-t)/4}^{(T_0-t)/2} I_{b2}\, da/a^2 = -7/4 + (5\ln 2)/2 \tag{11b}$$

$$I_{a3} = \int_{(T_0-t)/6}^{(T_0-t)/4} I_{b3}\, da/a^2 = 7/12 - \{3\ln(3/2)\}/2 \tag{11c}$$

したがって，式（11）をI_{aA}と書くと，

$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_{a1} + I_{a2} + I_{a3} \\ &= (5\ln 2)/2 - \{3\ln(3/2)\}/2 \end{aligned} \tag{12}$$

となり，tに無関係な値となる．

正のステップ関数　$t < T_0$の場合：
同様に，式（11）をI_{aB}と書くと，

$$I_{aB} = -(5\ln 2)/2 + \{3\ln(3/2)\}/2 \tag{13}$$

となる．

式（12），（13）は，ステップ関数のウェーブレット変換の逆変換は、もとのステップ関数にならないことを示している．

7　矩形パルスの逆変換

矩形パルス（T_{01}〜T_{02}）を，T_{01}で立ち上がる正のステップ関数と，T_{02}で立ち上がる負のステップ関数の和で考えると，積分式（11）はtの位置によって次のようになる．

Case　A1：　正のステップ関数，　$t > T_{01}$

$$I_{aA1} = (5\ln 2)/2 - \{3\ln(3/2)\}/2 \qquad (14a)$$

Case　A2：　負のステップ関数，　$t > T_{02}$

$$I_{aA2} = -[(5\ln 2)/2 - \{3\ln(3/2)\}/2] \qquad (14b)$$

Case　B1：　正のステップ関数，　$t < T_{01}$

$$I_{aB1} = -[(5\ln 2)/2 - \{3\ln(3/2)\}/2] \qquad (14c)$$

Case　B2：　負のステップ関数，　$t < T_{02}$

$$I_{aB2} = (5\ln 2)/2 - \{3\ln(3/2)\}/2 \qquad (14d)$$

したがって，矩形パルスの場合，逆変換の定義式（8）の積分，式（11）

$$I_a = \int_0^{\infty} \{\int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b)\,\psi_{ab}(t)\,db\}\,da/a^2 \qquad (15)$$

は次のようになる．

$t < T_{01}$　の場合

$$I_a = I_{aB1} + I_{aB2} = 0 \qquad (16a)$$

$T_{01} < t < T_{02}$　の場合

$$\begin{aligned} I_a &= I_{aA1} + I_{aB2} \\ &= 5\ln 2 - 3\ln(3/2) \\ &= 2.249 \end{aligned} \qquad (16b)$$

$T_{02} < t$　の場合

$$I_a = I_{aA1} + I_{aA2} = 0 \qquad (16c)$$

式（9b）により，$C_\psi = 2.249$であるから，矩形パルスの逆変換は，次式となり，矩形パルスが復元された．

$$t < T_{01} \qquad f(t) = 0 \qquad (17a)$$

$$T_{01} < t < T_{02} \qquad f(t) = 1 \qquad (17b)$$

$$T_{02} < t \qquad f(t) = 0 \qquad (17c)$$

8　結　　論

矩形パルスのウェーブレット変換と逆変換の計算を解析的に行った結果，次のことが明らかになった．

（1）　矩形パルスのウェーブレット変換は，正のステップ関数と負のステップ関数のウェーブレット変換の和となる．

（2）　矩形パルスのウェーブレット変換の逆変換は，正のステップ関数と負のステップ関数の和の逆変換となる．

（3）　しかし，ステップ関数のウェーブレット変換の逆変換は，もとのステップ関数にならない．

参考文献

（1）斉藤　隆弘：”ウェーブレットへの道　－　総説（Introdnction to the Wavelet Analysis － Overview）”，1994年電子情報通信学会秋季大会，TA-1-1，(1994).

（2）相沢　清晴，鄭　旦根：”ウェーブレット変換と信号解析”，電子情報通信学会，1994年春季大会併催事業予稿集　PP73～87，(1994).

（3）山口　晶哉，山田　道夫：”ウェーブレット解析”，科学，Vol 60，No 6，PP398～405，(1990).

（4）寅市　和男，堀内　隆彦：”ウェーブレットと情報処理”，情報処理，Vol 35，No 3，PP235～242，(1994).

（5）佐藤　雅昭：”ウェーブレット理論の数学的基礎　第1部（非直交ウェーブレット）”，日本音響学誌，Vol 47，No 6，PP405～415，(1991).

（6）佐藤　雅昭：”ウェーブレット理論の数学的基礎　第2部（直交ウェーブレット）”，日本音響学誌，Vol 47，No 6，PP416～423，(1991).

（平成6年11月28日受理）