磁気流体モデルにおける渦の量子化について

伊　藤　　博

Quantization of the Vorticity of the Current in Magnetohydrodynamical Flow

Hiroshi ITÔ

The relation that the average velocity of conducting electrons is proportional to the vector potential called as London equation is introduced in the theory of super conductors to explain "Meisner effect". However, this relation can be obtained by a variational theory for an idealized model of plasmas which is a perfect conductor. Using this relation, it is found that the angular momentum of electrons gyrating inside of the magnetic flux becomes an invariant known as the magnetic moment for the density regin of plasmas. For the density of the solid, this quantity is found to be proportional to Planck constant. Therefore, the quantization of the magnatic flux is reduced to the conservation of the vorticity of the conducting electrons in super conductors with the density of solids.

§1　序論

超伝導の現象論的理論において、ロンドン方程式はもっとも基本的なものと考えられてきた。すなわち、この関係式を使用することにより、超伝導体中で磁界が零となることが容易に導かれる。そしてこのことは実験事実と合致することから、ロンドン方程式の正しさが認められてきた。よく知られているように、電界や磁界は場であり、電子などは当然粒子像て処理される。そこで両方の描像を統一的にあつかうことが困難とされてきた。ところで電流のような物理量は、多数の電子の流れによって作られるため、これを流体力学的にあつかうことにより、場としてあらわすことが可能である。そこで電界、磁界および電流を統一的に場の理論であつかうこころみが当然考えられるわけであり、とくにプラズマを電磁流体と考えることにより、変分原理を確立しようとする研究が見受けられるようになった。それぞれの理論の適否は別として、どの研究においても電流がベクトルポテンシャルに比例するというロンドン方程式らしいものが得られていることは注目に値する。とくに最近、Physical Review－Letter に投稿された一つの論文が話題を呼んだ。つの論文が話題を呼んだ。すなわちFarrel Edwards [1] は、簡単な変分原理を考え、電磁流体のモデルにおいて、ベクトルポテンシャルが電流に比例する関係を導いた。この結果に対する反響は大きく、１～２年にわたり、Phy－sical Review－Letter等をにぎわせた。[2,3,4,5,6] その主な反論は、ロンドン方程式という量子論的結果が、古典論から導かれるのはおかしいということである。このような考え方はそれほど根拠がないと思うけれど、一般に案外根強いのに驚かされることがある。もう一つの反論は、彼のモデルの不安定さにもあるが、次のようなものである。プラズマが超高温になると完全導体になるといわれている。そこで内部に存在するいかなる大きさの磁界も、プラズマに凍りついて永久に存在することになる。その例は天体プラズマ中にそのような磁界が存在するというのである。一方超伝導体は、すでに述べたように内部に磁界は存在せず、それはロンドン方程式をみたしているからであり、従ってプラズマが同じ方程式をみたすというのはおかしいというのである。これらの議論をこえて、従来の超伝導現象論のなかで、もっとも気になることは磁束の量子化の導き方である。[7,8] すなわちロンドン方程式を使用し、ボーアの量子条件を適用することにより、磁束の量子化を行なっている。注意すべきことは、ボーアの量子条件はラグランジュモデル、いいかえると粒子描像てあり、他方電流をになう電子の速度は場の量である。場の理論における量子化は交換関係の設定であり、ボーア条件ではない。著者は２０年近く以前に磁気流体に関する変分原理を導入した。[9] 目標は磁気流体力学の方程式を導き出し、ついで系のハミルトニヤン密度に電界があらわれないようにすることてあった。これらの目的はプラズマがイオン、電子の２成分流体 [9] からなるとしたラグランジアン密度を設定し、変分によって導入された関係の組み合せて達成された。同時にプラズマの密度が一定であれば、ロンドン方程式も導き出されている。以上この論文の結果を使用して、主に磁束の量子化の問題を議論するつもりである。

§2　2流体モデルの変分原理

著者が展開したプラズマを2流体とみたモデルに関する変分原理を簡単に述べておくLをラグランジヤン密度とし、それを以上のように与える。

$$L=\frac{1}{2}\rho_i\vec{v}_i^2+\frac{1}{2}\rho_e\vec{v}_e^2+\vec{A}\cdot\vec{j}-\rho U-\frac{\vec{B}^2}{2\mu} \tag{2.1}$$

ここでρ_i，ρ_e，$\vec{v}_i$，$\vec{v}_e$はイオン，電子の密度と、それぞれの平均速度であり、$\vec{A}$，$\vec{B}$は、ベクトルポテンシャルと磁界である。n_i，n_eをイオン，電子の粒子密度とすると、

$\rho_i=n_iM$　，　$\rho_e=n_em$　　（M，mはイオン，電子の質量）

という関係がある。ここでプラズマの電荷中性条件を考え

$n_e=n_i=n$

としておく。（2．1）を変分する時の附加条件として、イオン，電子の質量保存則

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho_i\vec{v}_i=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho_e\vec{v}_e=0 \tag{2.3}$$

および

$$\frac{\partial\rho S}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho S\vec{V})=0 \tag{2.4}$$

というエントロピー保存則を考えることにする。ここでρ，$\vec{V}$は

$$\rho\vec{V}=\rho_i\vec{v}_i+\rho_e\vec{v}_e \tag{2.5}$$

で定義される平均密度、平均速度である。（2．5）は

$$\vec{V}=\frac{\rho_i}{\rho}\vec{v}_i+\frac{\rho_e}{\rho}\vec{v}_e$$
$$=x\vec{v}_i+(1-x)\vec{v}_e \qquad \left(x=\frac{M}{M+m}\sim 1\right)$$

とかくことができる。また電流は

$$j=ne(\vec{v}_i-\vec{v}_e)$$
$$=ne\vec{v}$$

となって相対速度$\vec{v}$であらわすことができる。ラグランジアン（2．1）を重心速度$\vec{v}$でかきかえ、副条件（2．2）（2．3）（2．4）に未定係数ϕ_1，ϕ_2，λをそれぞれ乗じて変分をおこなう。ただし

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A},\qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\dot{\vec{A}}=-\vec{E}\qquad(\vec{E}\text{は電界}) \tag{2.6}$$

は仮定するものとする。$\vec{A}$，ρ，$\vec{V}$，$\vec{v}$，Sについて変分して以下の結果を得る。

$$\mathrm{rot}\vec{B}=\mu\vec{j} \tag{2.7}$$

$$x\dot{\phi}_1+(1-x)\dot{\phi}_2+S\dot{\lambda}-\frac{1}{2}V^2-\frac{1}{2}x(1-x)v^2=U+\frac{P}{\rho} \tag{2.8}$$

$$V=-x\nabla\phi_1-(1-x)\nabla\phi_2-S\nabla\lambda \tag{2.9}$$

$$v=-\nabla\phi_1+\nabla\phi_2-e\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\vec{A} \tag{2.10}$$

$$\dot{\lambda}+\vec{V}\cdot\nabla\lambda=\frac{\partial U}{\partial S}=T \tag{2.11}$$

ここでUは内部エネルギーであり、

$$\frac{\partial U}{\partial\rho}=\frac{P}{\rho^2}\quad,\qquad \frac{\partial U}{\partial S}=T$$

という熱力学的関係を使っている。（2．7）から（2．11）までを組み合わせて

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}=\frac{1}{\rho}(\vec{j}\times\vec{B}-\nabla P) \tag{2.12}$$

というEulerの方程式が得られる。なお正準変換により、

$$H=\Sigma P_i\dot{Q}_i-L=\frac{1}{2}\rho_i\vec{v}_i^{\,2}+\frac{1}{2}\rho_e\vec{v}_e^{\,2}+\frac{\vec{B}^2}{2\mu}+\rho U$$

という電界エネルギーを含まないハミルトニヤン密度が得られる。

§３ロンドン方程式と電流渦について

前節で導かれた（２．１０）式から、まさにロンドン方程式と呼ばれるものが条件つきで導かれる。マクスウエルの方程式（２．７）から

$$\mu\vec{j}=\mu ne\vec{v}=\mathrm{rot}\vec{B} \qquad (3.1)$$

ここでnが一定であり、電流をになうものは電子のみとして、上式の両辺の回転を作る。

$$\mu ne\ \mathrm{rot}\vec{v}=\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{B}=-\Delta\vec{B}$$

（２．１０）から

$$\Delta\vec{B}=\frac{ne^2\mu}{m}\mathrm{rot}\vec{A}=\frac{ne^2\mu}{m}\vec{B}=\frac{1}{\Lambda_L^2}\vec{B} \qquad (3.2)$$

となり、磁界の変化する方向をZのみとすると

$$\frac{d^2B}{dZ^2}=\frac{1}{\Lambda_L^2}B, \qquad \therefore B=B_0e^{-\frac{Z}{\Lambda_L}} \qquad (3.3)$$

というよく知られた解が得られる。ここでΛ_Lはロンドン定数というもので、nを固体密度にえらぶと、きわめて小さな長さになることは知られている。一方プラズマの場合、密度は固体より８桁以上小さい上に、それが一定であるという議論はできない。nが一定でないとすると（３．２）のかわりに

$$\Delta\vec{B}=\frac{ne^2\mu}{m}\vec{B}+\frac{1}{n}\nabla n\times\mathrm{rot}\vec{B} \qquad (3.4)$$

を得る。nの変化が一次元的な場合、（３．４）は積分方程式となり解を求めることができる。詳しい議論は別にゆずるとしても、前述の超高温の天体プラズマ中の磁界の存在は、（３．４）の関係をといて十分説明できる。

次に磁気流体中に存在する渦について考える。議論を簡単にするため、巨視的な流れは零で、相対速度$\vec{v}$、すなわち電子流のみが存在すると考える。渦ベクトルは

$$\vec{w}=\mathrm{rot}\vec{v}=-\frac{e}{m}\vec{B}$$

となり、その時間変化は

$$\frac{D\vec{w}}{Dt}=\frac{e}{m}\mathrm{rot}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

が得られる。そこで

$$\mathrm{rot}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=0 \qquad (3.5)$$

であれば、渦ベクトルは保存する。（３．５）は

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\mathrm{rot}(\vec{B}\times\vec{v})=0 \qquad (3.6)$$

ともかける。この式の左辺の第２項は

$$\mathrm{rot}(\vec{B}\times\vec{v})=m\,\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{B}\times\vec{j}}{\rho}\right)$$

もしプラズマが平衡であり、系のエントロピーが保存すれば

$$\mathrm{rot}(\vec{B}\times\vec{v})=m\ \mathrm{rot}\left(\frac{\nabla P}{\rho}\right)$$

となり、（３．６）は

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \qquad (3.7)$$

となり、磁界は永久に保存する。条件（３．５）は磁束Φの保存の条件

$$\frac{D}{Dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int\mathrm{rot}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\,d\tau=0$$

をみたすから、渦の保存則と磁束保存則は両立する。しかしながら、以下の議論では完全導体内に存在する磁界は凍りついて変らないということであり、その値が零であるという超伝導性とはつながらない。超伝導というのは印加された磁界を電子が反磁性的運動をし、完全に打消すことによるものである。そこで超伝導体内に存在する磁力管について、次節で考えてゆくことにする。

§4　完全反磁性

磁力管の太さSの大きさを、ロンドン定数を半径とする円とし、その外側で磁界が零てあるとする。すなわち

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{s}=\pi|B|\frac{m}{n\mu e^2}=\Phi_0 \tag{4.1}$$

とする。いうまでもなく

$$\frac{d\Phi_0}{dt}=0$$

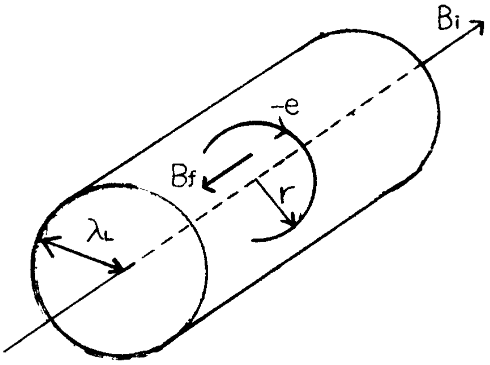
であるから、（4．1）より　B／nが保存することになる。磁力管のふとさ

$$S_0=\pi\frac{m}{ne^2\mu}$$

に含まれる電子の総数は

$$N=n\times S_0=\frac{\pi m}{e^2\mu}\sim 10^{14}/\mathrm{m}^3 \tag{4.2}$$

となり、この値が物質に関係なく一定であることは注目に値する。いま長さL（十分に長い）、ロンドン定数Λ_Lである磁力管内にある単位長当りn個の電子が、初期に印加された磁界B_iにより、ラーマー回転を行ない、B_fという反磁界を作ると考える。



$$B_f L=\mu n e r\left(\frac{eB_i}{m}\right)L\Lambda_L$$

$$\therefore\quad B_f=\frac{\mu ne^2}{m}r\Lambda_L B_i$$

$$=B_i\frac{r}{\Lambda_L} \tag{4.3}$$

そこでこのような電子群が初期磁界を完全に打消すか部分的であるかにより

$$r\leqq\Lambda_L \tag{4.4}$$

となる。さて不変量（B／n）は（4．3）式導入の過程を使い

$$B/n=\mu e r^2\omega=\frac{\mu e}{m}(mr^2\omega)\qquad(\omega\text{はラーマー角周波数}) \tag{4.5}$$

とかける。すなわち（B／n）は電子一個あたりの角運動量に比例し、（4．5）が保存するということは角運動量が保存することになる。ここで電子の回転半径rをΛ_Lとすると

$$mr^2\omega=\frac{m}{ne\mu}B \tag{4.6}$$

となり、この値は　$n\sim 5\times 10^{28}/\mathrm{m}^3$とすると、1ウェーバーあたり、プランク定数$\hbar\sim 10^{-34}$J・Sにほぼ一致する。そこで考えている磁力管に含まれる全磁束は（4．5），（4．6），（4．7）から

$$\Phi=N\Phi_0=N\frac{\mu e}{m}\hbar B=\left(\frac{\pi m}{e^2\mu}\right)\frac{\mu e}{m}\hbar B=\frac{\pi}{e}\hbar B \tag{4.7}$$

というよく知られた結果を得る。その際、プランクの定数の導入には磁束の量子化という仮定は使用せず、角運動量の保存と密度を固体のそれに選ぶことで達成した。もし密度が気体の程度なら、角運動量は

$$\frac{1}{2}mr^2\omega=\frac{\frac{1}{2}mr^2\omega^2}{\omega}=\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{\frac{eB}{m}}=\frac{m}{e}\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} \tag{4.8}$$

となり、プラズマ物理学でよく知られた不変量になることがわかる。

ここで再び電子の速度場とベクトルポテンシャルの間に成立する（2．10）式において、イオンが静止しているとする関係式

$$\vec{v}=-\nabla\phi-\frac{e}{m}\vec{A} \tag{4.9}$$

をとり上げる。両辺の回転をとり、面積分を作ると

$$\int \mathrm{rot}\,\vec{v}\cdot d\vec{s}=\int\vec{\omega}\cdot d\vec{s}$$

$$=-\frac{e}{m}\int\vec{B}\cdot d\vec{s} \tag{4.10}$$

となる。積分（4．10）はストークスの定理により

$$\int_s \mathrm{rot}\,\vec{v}\cdot d\vec{s} = \oint \vec{v}_{\ell}\cdot d\vec{l} \qquad (4.11)$$

となり、電子の質量を乗じ、ボーアの量子条件を適用すると、まさに磁束の量子化ということになる。しかしすでに述べたように速度場はオイラー表現であり、ラグランジュ表現であるボーア条件を使用するのは問題である。従って磁束の量子化という言葉より、渦場の量子化という方が適切であろう。

§5結言

以上の議論のなかで、もっとも興味のあることは磁束または渦の量子化の過程において、物質の密度の果す役割である。すなわち固体密度の値に対し、はじめてプランク定数の導入が可能となり、プラズマ密度に対しては、角運動量は不変であってもそのようなことにはならない、そこで次のような興味のある推論がでてくる。現在ハイテクにおいて高温超伝導体の開発がいそがれている。注意すべきはセラミックや半導体系では、伝導電子の数は金属のそれにくらべて何桁も小さいことである。したがって保存される磁界の強さもそれに比例して小さくなってしまうことが予想される。次に密度が通常の固体の値をこえたとすると、磁界の値がもっと増大することも想像される。そのような高密度の物質は、天体ならば存在することがわかっているし、今後超高圧の研究が進めば地上でも実現するにちがいない。

本研究においては、ロンドン方程式を中心として議論を展開した。この様な関係式がプラズマのみならず、もっと広い領域で成立するかどうかは今後の研究にまたねばならない。

参考文献

1) W.F.Edwards ; 1981 Phys,Rev,Lett, 47 P1863.
2) S.Putterman ; 1982 Phys,Rev,Lett, 49 P146.
3) F.S.Henyey ; 1982 Phys,Rev,Lett, 49 P416.
4) B.Segal,L.L.Foldy and R.W.Brown ; 1982 Phys,Rev,Lett, 49 P417.
5) P.G.N.de Vegvar ; 1982 Phys,Rev,Lett, 49 P418.
6) J.B.Jaylor ; 1982 Nature 299 P681.
7) F.London ; Superfluids, Vol,1 (Dover Press,1960) P29.
8) S.Nakajima, Intraduction of Superconductor (in Japanese), (Baiqukan 1971) P49.
9) H.Ito ; 1953 Progr,Theor,Phys,P117.
10) L.Spitzer,Physics of Fully Ionized Gases (Interscence Publishers,Inc,New York, 1959) P10

(平成3年12月19日受理)