

学生実験用教育教材の製作 (1 自由度ばね質量系の強制振動)

大 矢 卓^{**}, 中 山 智 了^{*}, 山 下 清 隆^{*}

The design and manufacture of experimental apparatus for students (Forced excitation of one degree of freedom spring-mass system)

Takashi Oya, Tomoaki Nakayama and Kiyotaka Yamashita

We report the design and manufacture of experimental apparatus for students. This experimental apparatus is aimed to be used in the experiments of forced excitation of one degree freedom spring-mass system. After a theoretical examination, experiments are made for confirmation. First, the frequency response curves are obtained theoretically. Second, the experiments are conducted with the new experimental apparatus. The experiment gives a good account of its nature not only qualitatively but quantitatively. It will be possible to obtain a value close to the theoretical result, if our students carry out their experiments carefully.

Keywords: Forced oscillation, Free oscillation, Linear oscillation

1. はじめに

工学部あるいは理工学部の機械工学科において、機械工学実験などの講義名で機械工学に関する実験が行われている。その項目は多岐に渡るが、材料力学に関する丸棒の引張試験、流体力学に関するレイノルズの実験・管摩擦係数の測定、振動工学に関するばね質量系の強制振動などが含まれている。本学の機械工学科でも、多くの実験・実習項目がカリキュラムに盛り込まれており、概ね実験に対する学生の評価は高い。

今回、新たに製作した実験装置は、1 自由度ばね質量系の強制振動実験に関するものであり、前述の振動工学の実験に相当する。著者らが知る範囲で本機械工学科で行われていた実験科目において、振動工学が関連する分野の実験項目は

- ・単振子の自由振動(1年生を対象とする単振り子の固有周期から重力加速度を算出する実験)
 - ・水平加振による単振子の強制振動および鉛直加振による単振子の係数励振振動
 - ・上端を水平加振された片持ち梁の強制振動
- がある。

* 機械工学科 **機械工学専攻院生

従来行われていた水平加振による単振り子の強制振動や上端を水平加振された片持ち梁の強制振動を整理統合する形で、来年度からの実験テーマとして今回取り上げる「1 自由度ばね質量系の強制振動実験」が行われることになった。振動工学は、大学の3年生程度で履修されることが多くそれに伴い本実験テーマに類する課題は3年生を対象に実験が行われることが多い。1,2 学年で実験が行われる場合には、物理学実験の1テーマとして「共振回路」などが項目に挙がることもあるようである。

著者らの経験では、3年生を対象とする振動工学実験において学生に期待される最低限度の予備知識は振動工学の授業が実験科目と並行して行われている事を考慮して

- ・解析モデルから運動方程式を誘導する
- ・2 階の非同次線形微分方程式の解法

などに重点がおかれ

- ・運動方程式の自由振動の解と固有振動数
- ・固有振動数と共振点の関係

などは実験の中で再度詳しく述べられるようである。著者の記憶では、この予備知識に相当する講義は1 学年で「物理学 I」の講義名で行われた力学[1]の授業や2 学年で学んだ応用力学[2]および1 学年を通じて行われた数学があった。本学では、微分積分学 I, II, III および力学などの科目がそれに対応するものである。

本実験を学生実験のテーマとするにあたり、以下の2つの大きな教育上の目的

- (1)眼で見て現象の定性的な変化を体験できる
- (2)実験における強制加振と質点の位相差から運動方程式を用いた解の物理的考察を行なう

がある。本論文では、新規に実験装置の製作・学生実験用資料の執筆にあたり行なった理論解析および実験結果とともに位相差と解の物理的考察について述べる。

2. 解析モデルおよび運動方程式

2.1 解析モデル

図1に今回取り上げるばね質量系の強制振動のモデルを示す。同図中央にある質量 m の質点は y 方向のみに運動が拘束されている。同図に示すように質点は左右2本のばねにより支持されており、ばねの他端は y 方向に調和振動する枠に取り付けられている。2本のばね定数 k のばねの自然長を l 、質点と枠との水平方向距離を L および L と l との差すなわち静止時におけるばねの伸びを L_1 とする。質点および枠の y 方向の変位をそれぞれ y および Y とする。

2.2 運動方程式

質点および枠が変位した際のばねの伸びは、図2より $\sqrt{(l+L_1)^2 + (Y-y)^2}$ となる。よってばねに生じるばね力 F は

$$F = k \left\{ \sqrt{(l+L_1)^2 + (Y-y)^2} - l \right\} \quad (1)$$

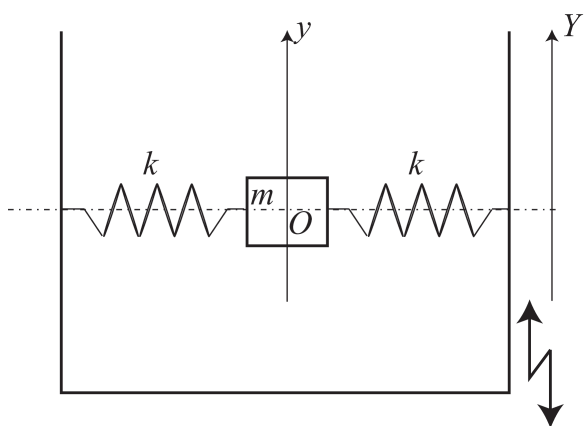


図1 解析モデル

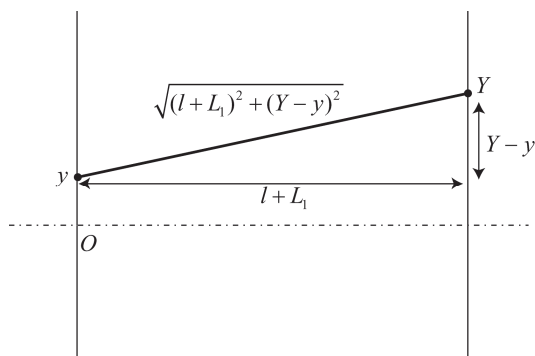


図2 ばねの伸び

であり、質点に作用するばね力の y 方向成分 F_y は

$$F_y = k \left\{ \sqrt{(l + L_1)^2 + (Y - y)^2} - l \right\} \frac{Y - y}{\sqrt{(l + L_1)^2 + (Y - y)^2}} \quad (2)$$

となる． l が L, L_1, Y および y に比べ十分大きいと仮定すると

$$F_y = k \frac{L_1}{L} Y - k \frac{L_1}{L} y \quad (3)$$

を得る．すなわち図1のように初期張力を与えたばねを配置すると y 方向に復元力を発生させることが分かる．質点に作用する空気抵抗等を粘性減衰力と仮定しその減衰係数を c とするとニュートンの第2法則より運動方程式が以下のように求まる．

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + 2k \frac{L_1}{L} y = 2k \frac{L_1}{L} Y \quad (4)$$

ここで左辺第1項は慣性力、第2項は粘性減衰力、第3項はばねによる復元力および右辺第1項は強制加振力を意味する．また本論文では Y を以下に示すように加振振動数 N および振動振幅 A の調和振動と仮定する．

$$Y = A \cos Nt \quad (5)$$

式(4)を無次元化するにあたり代表時間を定める考え方を示す．代表時間 T 、代表長さ \bar{y} を用いて慣性力とばね力が釣り合うと考えると

$$\frac{m\bar{y}}{T^2} = 2k \frac{L_1}{L} \bar{y} \quad (6)$$

となり、代表時間 T は

$$T = \sqrt{\frac{mL}{2kL_1}} \quad (7)$$

となる．さらに代表長さとして加振振幅 A を用いて $y = Ay^*$ および $t = Tt^*$ として式(4)を無次元化した．以下に無次元化された運動方程式を記す．また式(8)およびこれ以降無次元量を表す*は省略する．

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + y = \cos \Omega t \quad (8)$$

式(8)には 2 つの無次元パラメータ γ および Ω が存在しここで $\gamma = c\sqrt{L}/\sqrt{2mkL_1}$ および $\Omega = N\sqrt{mL}/\sqrt{2kL_1}$ である.

3. 理論解析

式(8)の運動方程式は非同次線形常微分方程式であり解は、次の方程式の同次解 y_h

$$\frac{d^2 y_h}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy_h}{dt} + y_h = 0 \quad (9)$$

と次の方程式を満足する特解 y_p の重ね合わせ $y=y_h+y_p$ で定まる.

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy_p}{dt} + y_p = \cos \Omega t \quad (10)$$

3.1 自由振動

棒が強制加振されない場合の自由振動解は式(9)で与えられる. ここではその解を述べる. 式(9)の解を $y_h=Ae^{\lambda t}$ と仮定し式(9)に代入すると以下の固有方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + 1 = 0 \quad (11)$$

より固有値 λ が $\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{1-\gamma^2}$ と求まる. 本研究では, 無次元の外部減衰係数 γ が 1 より小さい場合のみを取り扱う. 以上より, 自由振動解は以下ようになる.

$$y_h = ae^{-\gamma t} \cos(\sqrt{1-\gamma^2}t + \psi) \quad (12)$$

ここで a および ψ は初期条件より定まる定数である. 図 3 に $a=1$, $\psi=0$ のもと, $\gamma=0.1$ および 0.3 の場合について減衰振動をする様子を示す.

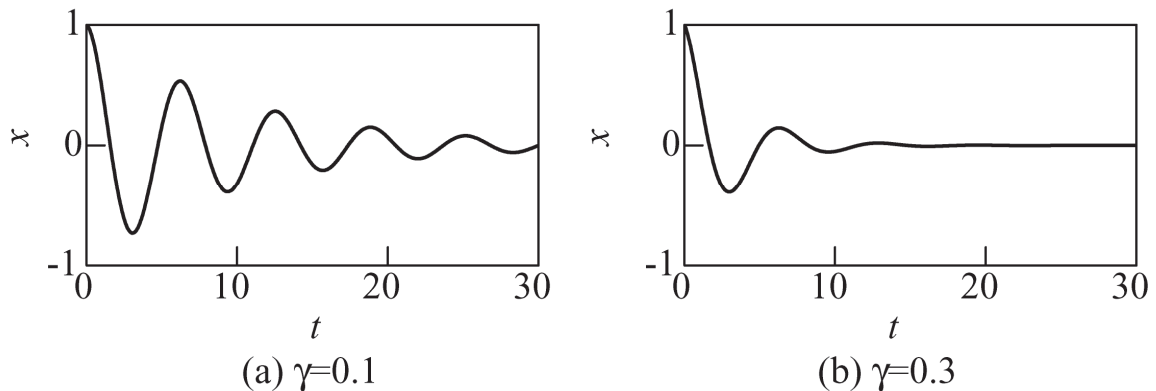


図 3 減衰振動の様子

同図(a)より $\gamma=0.1$ の場合には(b)の $\gamma=0.3$ の場合に比べゆっくりと振動振幅が減衰していく様子が分かる. 減衰振動を考える際に, 振動がなくなるまでの時間の目安として時定数が用いられることがある. 時定数の数学的意味は図 4 に示すように振幅 $ae^{-\gamma t}$ を時刻 $t=0$ 時近傍で t について 1 次までテーラー展開しそれがゼロとなる時間である. 実際にはこの時振動振幅は $ae^{-\gamma/\gamma} = a/e$ となっており $t=0$ の時の振幅の 63.2%が失われたことを意味している.

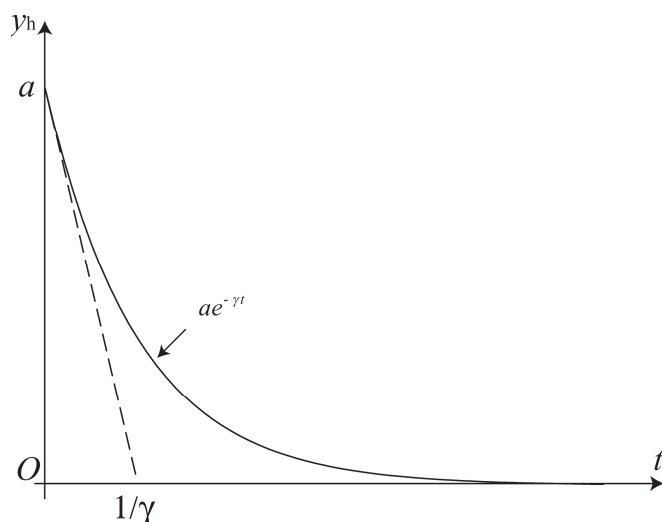


図4 時定数

本論文での時定数は $1/\gamma$ であるから図3の(a)および(b)ではそれぞれ10, 3.3になる. 実際には, 時定数よりも長く減衰振動が観察されることが分かる.

3.2 強制振動

式(10)を満足する解として右边が調和関数で表わされる事を考慮して

$$y_p = C \cos \Omega t + D \sin \Omega t \quad (13)$$

と仮定したのち式(10)に代入しその式が任意の時間 t で成り立つ条件より

$$(1 - \Omega^2)C + 2\gamma\Omega D = 1 \quad (14)$$

$$-2\gamma\Omega C + (1 - \Omega^2)D = 0 \quad (15)$$

式(14)および式(15)を定数 C および D について解くと

$$C = \frac{1 - \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}, D = \frac{2\gamma\Omega}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \quad (16)$$

となる. 以上より特解 y_p は

$$y_p = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \phi) \quad (17)$$

ここで $\tan \phi = 2\gamma\Omega / (1 - \Omega^2)$ である. 図5に振動振幅と位相の周波数応答(共振曲線)を示す.

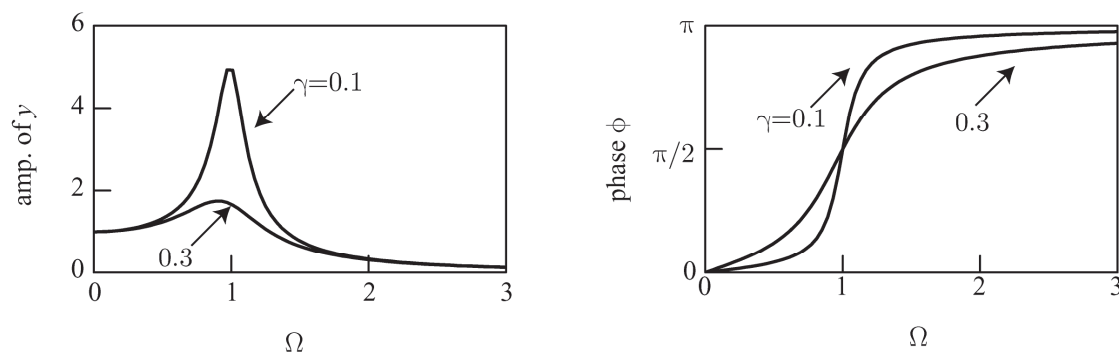


図5 共振曲線

図 5 より，加振振動数が固有振動数とほぼ一致する共振状態では振動振幅が増大し，共振点を挟んで加振振動と質点の振動の位相差 ϕ が 0 から π へと急激に変化している．

3.3 強制振動について運動方程式を用いた解の物理的考察

3.2では $\gamma=0.1$ および 0.3 の場合について，振動振幅および加振変位と質点の変位の位相差の周波数応答を求めた．ここでは，(1)加振振動数が固有振動数に比べ十分小さい場合($\Omega \ll 1$)，(2)加振振動数が固有振動数とほぼ等しい場合($\Omega \approx 1$)および(3)加振振動数が固有振動数に比べ非常に大きい場合($\Omega \gg 1$)について，強制外力が何の力と釣り合い定常状態が定まっているのかを運動方程式をもとに考察する．

3.3.1 加振振動数が固有振動数に比べ十分小さい場合($\Omega \ll 1$)

定常状態の質点の変位が以下のように記述された場合を考える．

$$y = A \cos \Omega t \quad (18)$$

また式(18)は，式(10)の無次元化されたばね力と等しい．速度および加速度は式(18)を時間 t で微分すると容易に求まり，式(10)の左辺第 1 項および第 2 項の慣性力および減衰力はそれぞれ以下のようになる．

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A \Omega^2 \cos \Omega t \quad (19)$$

$$2\gamma \frac{dy}{dt} = -2\gamma A \sin \Omega t \quad (20)$$

$\Omega \ll 1$ の場合では，式(18)～式(20)より，ばね力の大きさが減衰力や慣性力に比べ大きい．以上より運動方程式で慣性力とばね力を無視すれば $y = \cos \Omega t$ となり，振動振幅が1で，位相差が0となることが分かる．この結果は，図5に示した共振曲線と一致している．すなわち $\Omega \ll 1$ では，準静的な力の釣り合いが成り立っている．

式(17)の振動振幅を Ω を微小として0近傍でテーラー展開すると振動振幅は $1 + \Omega^2$ ($\Omega \ll 1$)となり図5に示す共振曲線において振動振幅は $\Omega=0$ の時の値1から Ω の2次曲線的に増加していることがわかる．

3.3.2 加振振動数が固有振動数とほぼ等しい場合($\Omega \approx 1$)

3.3.1と同様にして，ここでは加振振動数が固有振動数とほぼ等しい場合($\Omega \approx 1$)を考える． $\Omega=1$ の時，式(18)で表わされるばね力と式(19)で表わされる慣性力は異符号で大きさが等しくなる．すなわち式(10)の慣性力とばね力がお互いを打ち消し合う状況にある．通常 $\gamma \ll 1$ であることを考えると，普段は小さな減衰力が慣性力とばね力が打ち消し合う状況において強制外力と釣り合う役割を演じることが分かる．外部減衰を考慮しない場合，共振点で振動振幅が発散するが釣り合う力が存在しないことが要因である．式(20)で表わされる減衰力と式(10)の強制外力の大きさを評価すると $2\gamma A = 1$ より $A = 1/2\gamma$ となり図5の共振曲線において共振点の振動振幅もそのようになっている．すなわち，自由振動で無次元の外部減衰係数が求まれば共振状態における振動振幅がおおよそ見積もることが可能である．

3.3.3 加振振動数が固有振動数に比べ非常に大きい場合($\Omega \gg 1$)

3.3.1および3.3.2で議論したように、ここでは加振振動数が固有振動数に比べ非常に大きい場合($\Omega \gg 1$)について考える。式(18)～式(20)において慣性力がばね力および減衰力よりも大きいことが分かる。式(10)においてばね力および減衰力を無視すれば、 $-A\Omega^2=1$ となり $A=-1/\Omega^2$ となる。ここでマイナス符号は加振変位と質点の変位が反相であることを意味する。すなわち質点と加振変位は反対の向きになり、質点の変位の大きさは Ω が大きくなるにつれて急速にゼロに近づくことが分かる。

以上の結果を、図6にまとめる。 Ω の変化に伴い強制外力と釣り合う力が変化し定常状態が定まっている。

	Inertia Force	Damping Force	Restoring Force	External Force
$\Omega \ll 1$	$-\Omega^2 A$ Negligible	$-2\gamma\Omega A$ Negligible	A Balance	1
$\Omega \approx 1$	$-\Omega^2 A$ Cancel	$-2\gamma\Omega A$	A Cancel	1
$\Omega \gg 1$	$-\Omega^2 A$	$-2\gamma\Omega A$ Negligible	A Negligible	1

図6 周波数の変化に伴う外力と釣り合う力の変遷

4. 実験

理論解析で示した内容を実現しうる学生実験用の強制振動実験装置を新規に制作し、実験を行ない理論解析と比較した。

4.1 実験装置

図7に今回新規作成した実験装置の外観写真を示す。実験装置は重力の影響を受けないように水平面内に設置されている。質点の運動を1自由に拘束する目的からスライドベアリングを用いている。質点は、アルミニウムの直方体を用いた。

質点の左右に取り付けられているばねは、他端をアングルにより作成した枠に取り付けてある。この枠は、加振器に取り付けられており質点に取り付けられたスライドベアリングの運動方向と平行な変位を枠に与えている。加振器には、写真左側に示す波形発信機からのデータを送り加振振動数を変化させることが可能である。本論文では、固有振動数を低く設定したため加振振動数は2Hz から10Hz までほぼ 1Hz きざみで実験をおこなった。



図7 実験装置外観写真

また質点の変位および加振変位は固定アングルに取り付けた2台の渦電流変位センサを用いることにより測定した。

4.2 自由振動実験

加振器を作動させず、質点に初期変位を与えて自由振動させた。結果に対して式(9)の無次元外部減衰係数 γ を求めると、 $\gamma=0.10$ となった。また有次元の固有振動数は同図の周期から算出しおよそ2.9Hzであった。

4.3 強制振動実験

加振器の振動数を1.8Hzから10Hzまで変動させながら加振変位と質点の変位を同時計測する実験を行なった。

図8は、加振振動数 $N/2\pi=1.8\text{Hz}$ の場合の質点の変位および加振変位の時刻歴である。 $N/2\pi$ が固有振動数に比べ小さい時には、理論解析と同様に質点の変位と加振変位が同相であることが分かる。

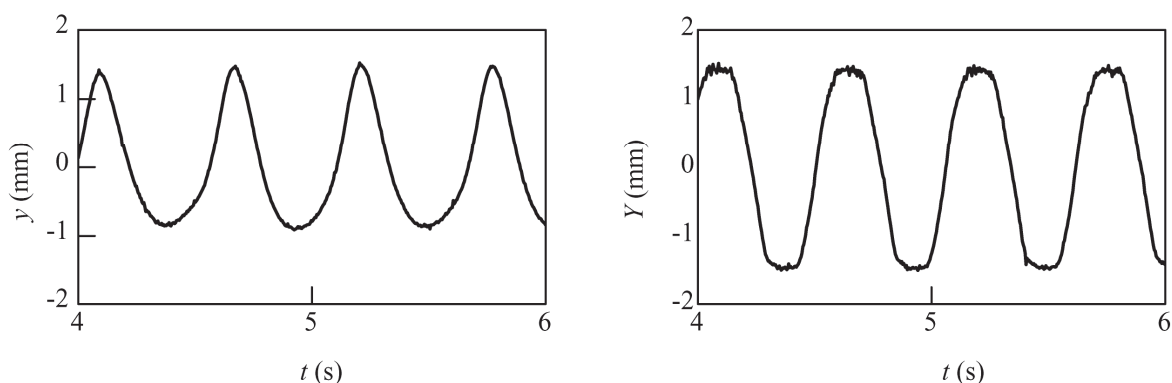


図8 y および Y の時刻歴($N/2\pi=1.8\text{Hz}$)

図9は加振振動数 $N/2\pi=5\text{Hz}$ の場合の質点の変位および加振変位の時刻歴である。 $N/2\pi$ が固有

振動数に比べ大きい時には、理論解析と同様に質点の変位と加振変位が反相であることが分かる。

図10は、実験結果をまとめた周波数応答である。加振振動数が固有振動数近辺において共振が起きている。実験結果と理論解析結果は良好に一致している。

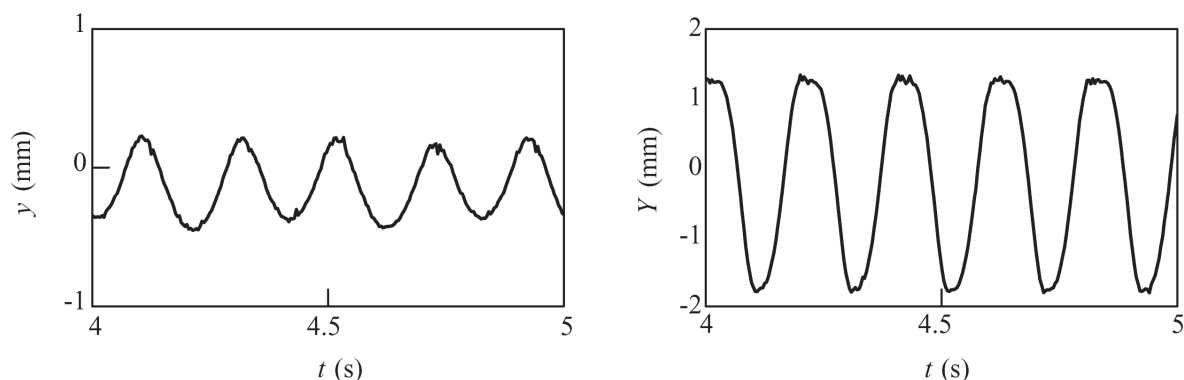


図9 y および Y の時刻歴 ($N/2\pi=4.9\text{Hz}$)

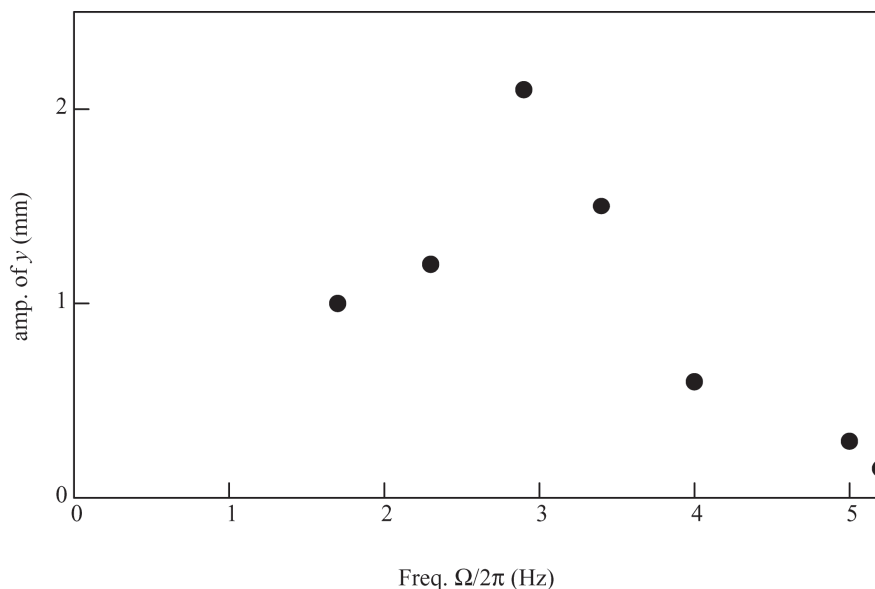


図10 周波数応答

5. おわりに

機械工学科3学年創造工学実験における学生実験用教育教材の開発を目的として1自由度ばね質点系の強制振動実験装置を製作した。眼で見て共振点前後における質点変位と加振変位の位相差の変化や共振点前後における質点の振幅の変化が読み取れるように、(1)固有振動数を低く設定する、(2)振動振幅が大きくなるように工夫した。また実験をしながら理論解析との比較が容易になるよう工夫した図表を用意した。以上をまとめると以下のようになる。

- (1) 解析モデルに基づき運動方程式を誘導し理論解析した。また加振振動数の変化に伴い調和外力と釣り合う力の役割の変化を分かりやすく説明した。
- (2) 固有振動数が低く、振動振幅が比較的大きな共振実験装置を制作し学生が眼で見て共振現象を体験できる装置が完成した。

最後に、実験装置の製作にあたり加振器の提供および有益な議論を頂きました機械工学科藤井博知教授，実験装置制作にあたりご協力いただいた大学院機械工学専攻修士 2 年丸山君，瀬古君に感謝いたします．

参考文献

- (1) 山本邦夫, 1987, 力学, 学術図書出版, 41-44.
- (2) ティモシェンコ, 1999, 応用力学<動力学偏>, 好学社.

(平成 24 年 3 月 31 日受理)