問題解決における数学的思考と方略との関係について

三　塚　正　臣*

On the Relations between Mathematical Thinking and Mathematical Strategies in Problem Solving

Naomi MITSUTSUKA

In solving mathematical problems, students of mathematics are required to analyze for themselves the structures of conditions in the problem and to learn a variety of methods of mathematical thinking and mathematical strategies. What is more important in mathematical problem solving is that they make some mathematical hypothesis by new logic and new ideas. When the hypothesis is made, the thinking of students will be changed and become more established, first through the structural analysis of the conditions of mathematical problems concerned, secondly through the analysis of general characteristics of the contents of problems and particularly through mathematical thinking and strategies. Therefore, this paper is trying to investigate the relations between mathematical thinking and mathematical strategies, as well as the various methods of making hypothesis in problem solving.

1. はじめに

問題解決においては，問題の条件構造分析によって，問題の内容の相互の関係が構造的にとらえられ，数学的概念や数学的アイデア，数学的ストラテジーによって，内部構造が一層明確になり，論理構造として解明され，全体構造がとらえられる。さらに，問題解決に最適の既知の概念あるいは手段・方略によって構造変換がおこなわれ，思考が促進される。しかし，問題の解決にさいしては，その過程において，新しい論理と新しい着想によって解決の仮説を定立しなければならない。解決の仮説は，数学的能力あるいは問題の内容の一般的特質を把握し，数学的な考えやストラテジーによって知的な思考操作から別の知的思考操作へと新しく思考行動が変換され，内的に新しく構造的にとらえられ，論理的推論によって可能な結論として仮説が定立されることを明らかにした。さらに類推的思考のもつ役割ならびに数学的思考の構造を追究した。数学における問題解決にさいしては，条件の構造分析とストラテジーとの関係も大きい。問題解決における数学的思考とストラテジーとの関係について論じた。

---

*教養部

2. 問題解決における思考について

問題解決においては，思考操作を通して思考活動する。また，条件と関連している既知の内容と結合し，多様なデータと関連づけ，あるいは，解決に必要な数学的アイデア，数学的な考え，方略によって，内容を再構成し，再構成された内容と内容との間の関係をとらえる。さらに，質的に異なる観点によって多様に考え，これらの相互関係を連続的な連鎖としてとらえていくことによって問題の解決の構造が明らかになる。課題が複雑になると，推理は漸進的に拡げられる。解決過程が漸進的なときには思考の初期の段階では，課題は論理の環を媒介として解決され，後期の段階では短縮された過程を媒介として，解決される。この過程においては，論理的に基礎づけられた推理の環として完全な論理構造をもっている。

思考の知的活動の過程は，条件の構造を分析することによって，問題の内容を相互の関係として構造的にとらえるが，既知の内容が媒介となり，問題の不確定の状態から問題の所在が明確になり，問題の条件分析の段階に入る。解決過程において，中心をなすのは，問題の条件の構造分析で，問題の条件と関連している数学的概念や数学的アイデア，ストラテジーによって内部構造をさぐり，それらの特質を解明する。特質の解明にあたっては，論理的な構造について認識の過程を思考経験的な事実にもとづいて，それらの局面段階を論理的に構造として解明していかなければならない。そのためには思考実験がなされなければならない。思考実験は記憶のなかで思考経験をふりかえり新しく組合せを仮構することによって，思考がどの程度正確に表わされるか，思考どうしがどの程度調和しているかを知ることができる。ここでは，論理的に精練する過程ならびに思考において形成された思考経験内容を明らかにすることが重要である。思考経験においては，ある結果をもたらす決定的な要因はどれか，どれとどれとが連関しているか，どれとどれとが無関係であるかを明らかにすることが必要である。要因を変化させそこから推定されるもの，確定的，決定的な結果は何か，決定的な影響を与える要因を見出していくことが重要である。とりわけ，連続的に変化させることによって可能な事象を探ることができ，思考活動に大きな変革をもたらす。思考実験においては，種々の要因を連続的に変化させることによって，その要因と結びついている事象を妥当なものとして一層確実なものにすることができる。思考実験だけで確定した結果が得られない場合つまりある要因の事象に，確定的な確実な期待が結びつかない場合には，思考実験の結果が不確定であればある程思考実験を継続し補足し確定していかなければならない。即ちある結果を試みに想定し，思考実験の結果を前もって推測しておくことが重要で，論理的に連想的に規定されたものが弁別され，推測し得るものと推測し得ないものに識別し，どのようにして意図的，意識的に駆使される方法まで発展し得るのか，思考を変化させて連関を考え新しい結果を考えなければならない。

このように思考実験の過程においては，問題を構成している諸要素を取り出し，それを変えてみたり，置き換えてみたりする。さらにそれらの要素を補ってみたりして解決の方法を見出すのであるが必要な諸要素をすべてあげ，すべての要素を十分に考察し要素間における関係や相互の

関係を明らかにする。さらに，洞察によって見通しをたてるが複雑な条件の場合にはある種の洞察が必要である。複雑な問題においては条件を構造分析し相互関係を洞察し，確実に生起するかどうかをみきわめる必要がある。このように，複雑さや相互関連，思考の方向性を考慮にいれて思考実験を試みなければならない。思考実験においては異質性のものにおいて質的な変化をもたらすことが多い。思考実験は試行錯誤的なものであるがそこには中心転換，視点の転換がおこなわれる。思考がある方向にむけられて課題解決がゆきづまるとき，そこに思考の転換がおこり，思考の方向が転換される。思考の転換によって再構成された内容が既知の知識によってさらにどのような内容に再構成されるか，どのような数学的な考え，数学的アイデア，ストラテジーによって思考が促進されるか解決にむかう思考の方向が見出されるかとらえなければならない。

問題解決の過程において思考が質的に変化し，新しい質の思考の生成を転化というが，そのさい，単純なものから複雑な問題における解決の思考の変化においては迂曲的な変化や一時的な後退の変化を通じてなされる場合もある。しかし，一時的な後退がおこる場合でもそれをもとにして一つの探究がおこなわれる。単純な問題においても内在的な変化によって複雑な問題の解決へと転化する。即ち，この過程においては，一定の諸条件の環が推定され，この論理の環を媒介して転化する。変化とは，あるものから他のものへの移行のことで，あるものとは，何らかの規定されたもののことで，実体が相互の依存関係をとらえながら変化する。

思考の発展は，単純なものから複雑なものに成ることで，新しい規定性が加わり，前の段階の規定を契機として新しい段階が成立することである。このように，新しい段階が形成されることによって，これまでに存在しなかった新しい質が形成されることによって相互関連性を強め反応を高め，高度のものとしていく。したがって，思考の発展は高い基礎の上に直線的でなく，スパイラルな思考の発展，飛躍的な発展あるいは激変的な発展にいたる。思考実験の過程においては内的に作用している能力が有機的に関連しあい，相互に保存性を保ちながら発展していく。この思考の変化過程あるいは発展過程においては，前の段階の条件の構造分析によって，既知の内容と結びついて，数学的な考えや数学的アイデアによって再構成され，また内部変換によって部分的結論が構成される。このことは一般的ストラテジーであって，このようにして前の段階の規定性を契機として新しい質が形成される。

課題における演繹的推論は，論理系における演繹とは異なる。論理系における演繹は前提から推論の規則にしたがって結論を導き出すのであるが，それ以外にさまざまの内示的な知識をもっている。論理的な探究を通じて修正し再構築しなければならない。また演繹的推論は異なった表象を構成する能力によらなければならない。課題における演繹的推論は妥当でない結論をとらえる傾向がある。

問題の解決のためには，条件を分析して，解決の仮説をたてなければならない。仮説の提起にあたっては，数学の問題解決において思考実験を試み，条件の諸事実を分析し，ある種の論理を構成し，完全な明確な論理形式をもって推測し，その過程においては新しい論理を発見し，新しい着想によって解決のための仮説を形成し，定立しなければならない。仮説提起の過程において

は，論理的推論によって可能な結論として仮説を誘発しなければならない。この段階においては論理的に演繹的に推論しなければならない。さらに，提示された仮説から得られた可能な論理的結論によって仮説の妥当性を確証しなければならない。Pierceは演繹的推論，帰納的な推論によって定立された仮説を客観的にするために論理分析がなされなければならないことを要求している。Pierceは仮説提起の段階，仮説からの演繹の段階，帰納の推理の段階に分類し[1]，仮説提起の段階は，経験的な事実を分析し，それらの事実を説明し得る可能性をもつ完全な明確な論理形式により，新しい論理を発見し，新しく着想し，仮説を形成する段階で，種々の側面から分析し，思考することからはじまると述べ，仮説からの演繹の段階においては，論理的推論によって可能な結論を仮説として誘発する過程であり，仮説検証の準備段階である。さらに，帰納の推理の段階として仮説の真実性を確証し，論理的に分析されなければならないと述べている。論理的に追究することによって仮説は，演繹的推論の前提として機能する。

仮説は，思考過程において錯綜する諸条件，内容の特徴が内面的にとらえられ，内的な構造的関係がとらえられ，思考の機能的な変化などの思考操作がおこなわれ，問題事態をあらゆる角度から追究し，過去の思考経験や数学的知識によって洞察される。その過程においては数学的な考えやストラテジーを分析することにもとづいて，数学的能力によって直接的に連合が形成され，問題解決における仮説が設定される。さらにこの過程においては，ある知的な操作から別の知的操作へと新しい観点が設定され，新しい思考行動へと変換され，思考の方向が見出される。課題の解決の仮説が定立されるまでには，何段階もの構造変換が行われ，問題事態の構造変換がおこなわれるたびに事態は一層深く追究され，内的な構造変換がおこなわれる。

問題解決における構造変換においては，洞察と直観を必要とする。それには鋭い推察・創意による。ひらめきがおこる直前には前兆があらわれるが，このためには出来る限り論理的に考えなければならない。その状態においては本質的構造をもとにして，新しい観点が設定され，新しい側面から新しい方向を考えるならば思考の方向が転換され，解決の仮説が見出される。このときには，問題事態の全体構造が再構成され，洞察により認知的構造に変化がおこり，解決に最適の既知の概念あるいは性質，手段がとらえられ，数学的推理によって思考が促進される。

構造的変換は，特徴的には，既知の手段・方法を観点を変えて機能的に変換し変革する。構造変換がおこなわれるたびに，問題自体は一層深くとらえられ，構造的連関が把握され，内的な構造的関係がとらえられ，思考の体系にある一方の関係が他方の関係に変換される。このようにして，もとの問題の本質的状態が新しい内容の状況に対応し，それぞれの観点に固有な関係を構造的にとらえることができる。このようにして，問題の解決の内的変換により問題解決における問題事態の全体的構造が再構成される。

新しく論理を発見し，新しく着想し，問題解決の仮説を形成し，定立するには，条件の構造分析により，どのような内容，概念，属性が連関しているか，また，どのようなストラテジーあるいは数学的能力が関連し，どのような構造変換によって解決の仮説が定立されるかを考えなければならない。数学的能力によって，課題の内容の一般的特質を把握し，条件を分析し，条件に関

連している既知の概念・知識を統合し，多様な情報・アイデア・ストラテジーの中から関連する内容を選択し，条件と結合させ，部分的結論として再構成する。さらに，新しく観点を設定し，数学的方法，あるいはストラテジーによって内容を再構成し，再構成された内容と内容との相互関係を論理的にとらえ，問題解決の全体構造がとらえられる。このような思考過程によって，問題の本質をとらえ，解釈し，単純化したり，帰納的に考えたり，演繹的に考えたり，類推的に考えたり，あるいは累加的に考えることによって，解決の内部構造が機能的に変換され，内部に新しく質的・構造的に考えられた解決の仮説が定立される。ここで獲得された新しい質的内容は，思考過程においては，内部構造としてとらえられ，機能的に変換されたものである。

3. 問題解決における解決の仮説と類推的思考との関係について

課題が複雑なときには，推理は漸進的に拡張される。はじめの単純化された課題の解決の構造をとらえ，条件の構造分析によって解決され，このことをもとにして，漸進的に拡張して解決する。この過程において類推的思考が働き，解決の方法の仮説を定立することがある。問題解決においては，よりよい解決のためには，証明あるいは解決過程において推論の重要な初期の条件を分析し，それらを一つ一つ個別に分析し，抽象的原則にしたがって配列し，それらの関係をとらえながら固有の結論を展開する。さらに，問題の内容にもとづいて，振り返り，前に導き出した部分的結論を再び結合し，それらが互いにどのように思考が作用しあっているかをとらえ，機能的に構造変換され，論理的な関係を構造としてとらえ，論理的帰結として完全な形にまとめる。このような思考過程において，困難な複雑な問題の解決の仮説の定立の一つに類推的思考がある。問題の条件分析において，他の対象の条件と類似していることから，他の点においても類似していることを結論づけ，解決の方法を類推的に考え，解決の仮説を定立することがある。こういう意味において解決の方法の仮説の発見という視点から，類推的思考のはたす役割は大きい。その役割は当面の類比の中において類似した要素からなる部分が何であるかを正確にとらえることによって解決の方法の仮説が見出される。一見，全く無関係のようにみられる諸事実や諸現象の間には示唆に富んだ類比関係が存在する。このように，類推的思考は，異質の中に思考の類似性・共通性・相異性を見出すことである。そのためには，既知のものを構造的に把握し相異なる二つの事象の一方または双方を新しい観点から見直し，相異なる二つの事象をある種の同型の構造としてとらえる[2]。即ち，ある事象の解決の方法をもとにして，他の事象の解決の方法との共通性，類似性，あるいは相異性をとらえ，その設定条件を媒介として同型の解決構造をもつものとしてとらえていくならば，他の事象の解決の方法の方向性がとらえられ，この結果，はじめに構成された解決の方法が機能的構造変換あるいは飛躍的構造変換がおこなわれ，解決の方法の仮説を定立することが可能となる。既知を媒介として単に結びつけるだけでは未知の内容をとらえることができないから意味のある結合がなされなければならない。既存知を媒介として類推のもつ主体性が検討され，その構造的把握がなされ，新しい内容の質にまで転換された価値のあるものとしなければならない。したがって，思考が類推である限りは，その内部構造が類推的に思考され，

その結果，構成された内容が機能的に変換され客観的価値にまで転化されなければならない。

4. 問題解決における数学的思考と方略との関係について

問題を解決する過程においては，問題の条件の構造分析とともに，数学的な考えや数学的な方略によって，知的経験による思考実験をおこない，探索試行が試みられ，確実な論理的判断によって正しい情報を選択し，条件が加工される。さらに思考過程においては，内部構造の変換がはかられ，高次な機能的に変換された部分的結論が得られ，このことがもとになって，解決の全体的構造が再構成され仮説が提示され，解決にいたる。ストラテジーは解決過程における認知パターンといわれているが数学の問題の解決においては，その過程において方法を意識的に用いようとするとき，その思考の方法をストラテジーというが，解決過程において，ストラテジーを意図的に用いないとするならば，機能的な構造変換もおこなわれない。そのためにはストラテジーを単に用いるということでは意味がない[3]。ストラテジーの内容を構造的に分析しなければならない。「パターンをさぐる」ストラテジーを例として考察してみると，パターンは数学的な考えの中の帰納的考えにもとづいてある種の関係の傾向性をさぐることになる。パターンは，順序よくつくられた表においてパターンをさぐるだけではない。もしも，図に示されるならば，表と図，あるいは図と図とを結合させて，その間に構造的にどのような関係があるかを追究することによって，機能的な構造変換がおこなわれることがわかる。したがって，帰納的な考えも数学的なストラテジーの一つと考えられる。

また，「Back ward によって考える」ストラテジー[4]があるがこのことを思考との関連において追究する。推論の方法として，Forward Reasoning, Bi-directional Reasoning, Back ward Reasoning がある。Forward Reasoning は条件の一つ一つを分析し，既知の内容と結びつけ，観点を変えて思考し，内容を再構成して論理の連鎖として結論を導く推論である。しかし，このような推論が障害に出あって思考が停滞することがある。このような困難に出あったとき，この結論がいえるためには何がとらえられればよいかと考え，これらの考えと条件の構造分析とをもとにして，内容の相互関係を思考するならば，内的変換がおこり，はじめに考えた条件の構造分析の内容あるいは再構成された内容と結びつけたりあるいははじめに考えた観点を変更して，新しい観点を設定し，思考を進める場合がある。このようにして，機能的に思考に内的変換がおこり，解決にいたる場合が多い。

また，「振り返って考える」ストラテジーがある。このストラテジーは解決の構造を質的にとらえることに役立つ。解決の方法を見直すことにより，解決過程が一層明確にとらえられ，過程における内容の相互関係が構造的にとらえられ，あるいはこれまで考えなかったことや解決過程の共通性・類似性が再認識され，解決の構造や解決の方向がとらえられ，思考を促進したり，思考の内的変換をもたらすことが多い。さらに，「複雑な問題は条件を単純化した類似の問題の解決の方法をもとにして本問題を解決する」ストラテジーがある。このストラテジーを分析することによって，解決が困難な場合にも思考の機能的な変換により解決される場合が多い。複雑な問題で

解決が困難なときには，条件を単純化した類似の問題の解決の構造をさぐり，どのような相互関係があるか，既知の知識と結びつけたり，あるいは，再構成された内容と内容との間の関係をとらえる。この問題と複雑な本問題との条件の類似性，共通性，相異性をさぐることによって，単純化された問題の解決の方法をもとに，類推的に考え当面している複雑な問題の解決の構造をさぐることができる。

さらに，「複雑な問題を単純な問題の系列に分解し，その解決の方法をもとにして解決する」ストラテジー[5]がある。複雑な本問題の解決の過程においては，解決の要となっている本質的な場がいくつかある。このいくつかの本質的な部分的な場においてつくられた系列化された小問題の解決の方法を本問題の解決における本質的な場と結びつけて解決の構造をさぐるならば，本問題の思考に内的変換がおこり解決にいたる。本問題の解決と部分的な小問題の解決の方法との関係は多様である。小問題の解決の方法が本問題の本質的な部分的な場の解決と結びつく場合もあり，小問題の解決におけるアイデアが直接本問題に結びつき本問題の解決の契機となる。

類推的思考は思考の一つの方法であるから数学的なストラテジーと考えられる。類比による推論は一つの対象がなんらかの点で他の対象と類似していることから他の点において類似している。したがって類似した要素から形成される部分は何で類似していない要素から形成される部分は何であるかを正確にとらえることが必要である。数学の命題の中には，ある点での類似性から他の多くの点における類似性が必然的に導かれることが示されている。このことは，二つの数学的な概念，問題あるいは理論において類似性が何らかの形で拡張されていることを示唆している。また，一つの命題から類推によって変換された命題は論理的に対等である。類推的思考は既知の問題と未知の問題とを結合させる思考手段の一つである。既知の内容や思考実験における思考の仮説を類似の未知の問題と結びつけ，それらを媒介として類推のもつ主体性を探究し構造分析によって認知され新しい内容の質にまで転換される。つまり内部的構造が類推的にとらえられ機能的変換がおこなわれる。このようにして，既知を媒介として単に結びつけるだけではなく，意味のある結合がなされなければならない。既知の内容を媒介として，類推のもつ特性をとらえ内部構造を類推的に思考し構造変換がなされ転化されなければならない。これらの類推的思考によって，はじめに考えた解決の方法が機能的構造変換あるいは飛躍的構造変換をもたらす。このような意味において，類推の考えは数学的なストラテジーと考えられる。

条件の構造を分析的にとらえ，既知の内容と結びつけ，数学的な考えや数学的アイデア，一般的ストラテジーによって，内的変換がおこり高度の思考となり，導かれた部分的結論やその部分的結論から生み出された新しい部分的結論や条件を結びつけて再構成し，それらの間の相互関係を把握する。このようにして思考が誘発されたり，思考が助長され，全体構造を洞察することができる。

5. おわりに

問題解決における数学的思考と方略との関係を論じた。問題解決においては，問題の条件構造

分析によって問題の内容を相互の関係として構造的にとらえるが数学的概念や数学的アイデア，方略が有機的に関連し，関係が把握され，それによって内的構造が一層明確になり論理構造として解明される。しかし，問題解決における洞察においては，その過程において問題解決の仮説を定立しなければならない。問題解決における仮説の定立の方法について追究し，問題解決の仮説は数学的能力，問題の内容の構造分析，数学的考えや方略によって知的な思考操作から思考行動が変換され，内的に新しく構造的にとらえられ解決の仮説が定立される。さらに，問題解決における仮説の定立と方略との関係を追究し，問題解決における数学的思考と方略とは密接な関係にあることを論じた。

参　考　文　献

1) 三塚正臣：問題解決における数学的思考能力について　福井工業大学研究紀要第24号　1994　P.P.240
2) 三塚正臣：問題解決における数学的思考について　福井工業大学研究紀要第25号　1995　P.P.288
3) H. Schoenfeld : Heuristics in the classroom, National council of Teachers of Mathematics 1980 P.P.9－10
4) 三塚正臣：学校数学における問題解決のストラテジーの分析について　福井工業大学研究紀要第21号　1991　P.P.211－212
5) H. Ballew : Identification and Analysis of Specific Problem-solving strategies, National Council of Teachers of Mathematics 1983 P.P.79－80

（平成７年10月26日受理）