

学校数学における問題解決のストラテジーの分析について

三 塚 正 臣

On the Analysis of Problem Solving Strategies in School Mathematics

Naomi MITSUTSUKA

It is important for student to obtain mathematical thinking and mathematical ability.

Student will be able to analyze the structure of the conditions of the problem, and examine thoroughly the systematic relation between them, if they understand the mathematical contents and make use of mathematical thinking and strategies which they are expected to acquire in the problem solving process.

In this way they will be able to find out clues to problem solving. They will analyse the structure of the problem solving and examine thoroughly the systematic relation of the conditions as a continuous logical chain. Therefore, this paper is trying to investigate the analyze the structure and general strategies in problem solving.

1. はじめに

数学の学習においては、数学の構造ならびに数学の内容と内容との相互関係は、既知の学習内容との関連、数学的な考え方や問題解決における一般的ストラテジーによってとらえることができる。問題解決における一般的ストラテジーは単に憶えてあてはめるだけでは、数学の構造や内容相互の関係をとらえることは困難である。一般的ストラテジーを構造的に分析することにより思考の観点が見出され、思考が促進される。

ここでは、問題解決における一般的ストラテジーを分析し、その構造を明らかにしようとするものである。

2. 問題解決の意義と問題解決の基礎的能力について

A・Brancaは、学校数学の目標論として、Basic Skillsとしての問題解決について述べている。Basic Skillsとは、学生が学校を卒業し、会社等社会において工学上の問題、経済学上の問題あるいは自然現象上の問題等仕事を進めていくさいには、種々の問題に出あう。これらの問題は、これまでの知識やアルゴリズム、固定化された行動パターンでは解決できない問題である。この

ような問題に直面したとき解決していく基礎的な問題解決能力を育成することを目標としている。

問題についてはS・KrulikやJ・Rudnikも同様の考えをもっている。即ち、「すべて持っている知識だけではうまくいかず、障害があり、または、個人の固定的な行動、習慣的な反応では、解決の障害を除くことができないとき問題解決がおこる」といっている。個人のもっている知識や技能あるいは固定的な行動とは既知の知識や固定的な行動のパターン、アルゴリズムをさしている。また、問題解決とはそれらによって除去しようとしても除去できない問題場面に直面して数学的なアイデアや数学的能力によって解決をはかることを意味する。問題を解決しようとするときは、知的好奇心をもち、課題として解決しようとする意識をもって、主体的に、数学的活動がなされなければならない。

KrulikとRudnikは「その障害をなんとか乗り越えようとして、その問題事態を解決しようとするときには、探究活動がある」と述べ、主体的な数学的活動がなされなければならないことを強調している。したがって、そこではどのように思考が機能したか、また、どのような手段や手法によって問題が解決されるか検討しなければならない。したがって、問題解決は「既知の知識や固定化された行動パターン、アルゴリズムによっては解決できない問題事態に対して、問題意識をもち、主体的に問題解決の手法や手段、ストラテジーによって、条件の内容を解釈したり新しい内容に再構成し、数学的アイデアや数学的能力により解決をはかる過程である」ということができる。

学校教育においては、このような問題場面に対して、問題を解決する能力を育成することを目標としている。問題解決の能力は、一つには、与えられた問題場面において、どのような知識が用いられているかを判断する力、総合的な活動を通して、解決に必要な数学的アイデアを見出し、受けとめた条件を加工する加工能力である。条件に関連している既知のものを条件と結びつけたり、多様なデータを関連づけ、どのように関係しているかをとらえる能力である。さらに、質的に異なる観点に目をむけて多様に考える能力であり、類以の問題の解決の方法を想起しこれをもとにして考える能力である。また、焦点づけようとする能力であり、データを解釈したり、条件と既知の内容とを結びつけて新しい内容に再構成する能力であり、問題の内容と内容との間の相互関係をとらえる能力である。これらの能力が単独あるいは複合されて働き、解決の糸口を見出す。なお、数学的な考え方としての帰納的な考え、類推的な考え、演繹的な考え、統合、発展的な考え、単純化、一般化、特殊化する考えも問題解決能力と考えられる。これらの問題解決能力が有機的に機能して解決の方向が見出される。問題の解決にあたってはその問題の体系的関係をとらえ、その問題の意味、価値、どのように拡張されたかあるいはどのようなアイデアが用いられ、どのような相互関係があるか等とらえておく必要がある。さらに、問題の条件を分析的にさぐり、条件一つ一つについて、条件の内容に関連している既知の概念、性質あるいは、数学的方法、数学的アイデアを選択し結びつけ、そこから再構成される内容と内容との間にどのような関係があるかをとらえ、これらの相互関係を連続的な連鎖としてとらえていくことによって解決の構造が明らかになる。複雑な問題は、その解決の構造と同型な単純化された基本の問題の解

決の方法を見直し、その解決の方法とどのような相互関係をもっているかをとらえることによって類推的に追究し解決される。

3. 問題解決の思考行動について

問題解決の過程において、問題を思考するとき、どのような思考が働くか、これを一種の行動とみなし思考行動と名づけた。このような思考行動によって条件の構造を分析する過程がさぐられ、思考行動が条件の内容や数学的な考え方と有機的に結びつき、解決の方向が見出される。これらの思考行動は思考過程において機能する思考因子であり、これらがどのようにかわり、概念形成あるいは関係としてとらえたり、関係づけることができるかを明らかにすることができる。

問題解決における思考行動を類別する多くの方法があるが、ここでは複雑な問題を思考するときの思考行動について述べる。

問題の解決においては、多様な思考が働くがとらえた条件をどのように加工していくか加工過程において機能する思考を説明すれば、思考の構造を分析することができる。

受けとめた条件の加工過程においては、条件に関連している既知の内容を条件と結びつけたり多様なデータを関連づけどのように関係しているかをとらえる。さらに、条件を図と結びつけたり、既知の内容を振り返り、その構造をとらえなおし、数学的アイデアによって、内容と内容との相互関係を連続的な連鎖としてとらえる。問題解決過程においては、数学的な考え方が機能する。思考の対象からみて、類推的な考え、帰納的な考え、演繹的な考え等、思考の方法からみて単純化、抽象化、一般化、特殊化の考え等である。

複雑な問題を解決するにあたっての思考行動の因子は次の通りである。

データをわかりやすく配列する。問題の本質的なことをとらえる。非本質的なことを捨象する。条件と既知の内容とを結びつける。比較する。データを解釈する。データを組みあわせる。データとデータとを関連づける。分析する。図にかく。関係を明らかにする。多様な観点をたてる。観点を変更して考える。再構成する。推理を圧縮短縮する。根拠をもつてのべる。類推的に考える。帰納的に考える。振り返って考える。単純化する。多様に考える。

4. 問題解決におけるストラテジーについて

問題解決過程においては数学的な考え方や一般的ストラテジーによって、内容の相互関係の連鎖としてとらえられ解決がはかられる。この解決過程において学生生徒のおこなう認知パターンをストラテジーとよんでいる。Schoenfeld は「学生生徒が主体的に問題を追究していくなかで、前に試みた方法を意識的につかおうとするとき、その方法をストラテジーとよぶ」と述べその方法が意識化されたとき、その方法をストラテジーと考える。数学の問題を解決していくときに必要なストラテジーは総合的方略 (Global Strategy)、一般的方略 (General Strategy)、補助的方略 (Helping Strategy) である。

Polya は、問題解決の過程として、「問題を理解する — 解決の計画をたてる — 計画を実行す

る「結果を検討する」ことをあげている。この段階は解決の手順を示す方略で総合的方略である。主体的な学習活動がなされるような学習過程を追究していくならば総合的方略が明らかとなる。一般的方略は総合的方略の各段階ならびに問題解決の過程において必要な全般的に用いられる方略である。また、一般的方略を用いるさいに補助的に用いる方略が補助的方略である。

問題解決過程においては数学的な考え方や一般的ストラテジーを用いることによって条件の構造を明らかにすることができ、解決の構造が明らかになる。そのためには、ストラテジーの内容を解釈したりストラテジーを構造的に分析しなければならない。一般的ストラテジーとして考えた内容は次の通りである。「パターンをさぐる」「振り返って考える」「複雑な問題は、単純な小問題の系列に分解して考える」「サブゴールを考える」「類似の問題や関連した問題を考え、その解決の方法をもとにして考える」「Back Wardによって考える」「多様に考える」

一般的ストラテジーについて追究し、一般的ストラテジーの構造を分析的に明らかにした。

(1) 「パターンをさぐる」ストラテジーの分析

パターンは帰納的に考えることによってさぐることができる。パターンは順序よくつくられた表においてさぐられるだけではない。表だけではなく、その内容を図に示し、表と図とを結びつけて表においてとらえたパターンが図においてどのようなパターンであるかをさぐるが必要であり、さらに、図において、図と図を比較することによって、構造的に相互関係をパターンとしてとらえることができる。

(2) 「本質的なことをとらえる」ストラテジーの分析

問題解決においては、問題の本質的な内容をとらえることが重要である。本質的なことがどのように問題解決に関わっているかを考えなければならない。複雑な問題や複雑な図においてはどのように本質的な場面や内容が問題解決とどのように関わっているかをとらえることは困難である。「本質的なことをとらえる」とは考えている場面で非本質的なことを捨象することである。したがって、換言すれば、考えている本質的な内容や図においては非本質的な場を捨象していくならば、本質的な図の部分の部分図としてとり出すことを意味する。このような部分図は、単純化された図となり、図における内容や場面に関連する既知の性質あるいは既知の方法と結びつけることができ、相互関係がとらえられ、解決の糸口を見出すことができ、思考が促進される。

(3) 「振り返って考える」ストラテジーの分析

振り返って考えるとは、一般的には解決されたとき、解決過程を振り返り、より簡単な方法はないか、あるいは、一般的方法はないか、よりよい方法はないか、多様な考え方はないかと考えると同時に、解決の方法を見直すことにより、解決過程が一層明確にとらえられ、問題を解決する能力を豊かにする。したがって、解決過程においてはこれまで考えなかったことや解決過程の共通性や類似性が再認識され、それによって、解決の構造や解決の方向がとらえなおされ、解決

の方法を見直すのに有効である。

(4) 「条件を簡単にした類似の問題の解決の方法をもとにして本問題を解決する」ストラテジーの分析

類似の問題の解決の方法を本問題に結びつけて考えるとは、問題の内容をとらえ、振り返って類似の問題の解決の方法を見直し、その解決の方法をもとにして、当面している問題の解決の方法との相互関係をさぐり、異同弁別しながら解決していくことである。類似の問題の解決において、類似問題の内容をとらえ、本問題との相互関係をとらえるには、数学的能力やストラテジーによって、条件に関連している既知のものを分析し、条件と結びつけたり、内容を解釈したり、観点を変更して考えたり、数学的なアイデアによって相互の関係を追究する。このようにして、類似問題の解決の方法をさぐり、それをもとにして、類推的な考え方によって、当面している問題の解決の構造との共通性や類似性をさぐり解決する。したがって、単純化した問題の解決の構造を十分にさぐる必要がある。

類似の問題の特質について追究する。類似の問題には、問題場面は原問題とはことなり、条件が原問題と同様に複雑であっても解決の構造が同じで類推的に解決される問題と条件の一部を変えて単純化した簡単な類似の問題とがある。また、問題によっては全く異なると思われる問題も解決の構造を検討してみると同じ構造をもつ場合もあり、このような問題も類似の問題である。図形においては、構成要素を変えて単純化をはかったり、形や位置関係を変えて単純な問題を構成する。

単純な問題は思考が容易である。しかし単純な簡単な問題が容易に解決できただけでは、単純な問題に変える意味は少ない。単純な簡単な問題の構造をさぐることによって、問題の内容の把握がなされるとともに、問題の内容の奥にある数学的な考え方や数学的能力がとらえられる。これらの数学的な考え方やとらえた内容の構造によって、単純化された簡単な問題の解決の構造がとらえられ、これらのことがもとになって、複雑な問題の内部的構造や数学的な考え方、数学的能力がとらえられ、複雑な問題の解決の構造がとらえられる。

(5) 「複雑な問題を単純な問題の系列に分解する」ストラテジーの分析

Ballem は、「複雑な問題を単純な問題の系列に帰着する」ことに注目し、複雑な問題を解決するのに小問題を考え、その小問題が解決されたならば、小問題に分類するときの手順を逆にたどることによって、本問題が解決できることを指摘した¹⁾。「複雑な問題を単純な問題の系列に帰着させる」ことは複雑な問題を解決するさいの一つの方法であり、問題解決の一般的方略と考えられる。しかし、複雑な問題を解くための小問題の系列はこのようなものだけではない。本問題の内容によっていくつかの小問題の系列があると考えられる。複雑な問題の解決の構造を考えたとき、本問題の解決と小問題の解決とのかかわり方によっていくつかの小問題の系列が考えられる。一つは、本問題の条件の一部を変えて単純化した小問題の系列で、系列化された小問題の解

決の構造を十分に解明する。即ち小問題の解決の内容的な構造あるいはそこに考えられる数学的な考え方ならびに関連する数学的能力、ストラテジーがどのように機能しているかをとらえることによって小問題の解決の構造をさぐり、複雑な本問題の解決の構造とどのような相互関係があるかをさぐることによって解決できる。また、小問題の系列の間の相互関係は、問題の内容や解決するさいの思考の共通性、類似性と考えられる。また、系列化された小問題の間の共通性をとらえることが本問題の解決の構造をさぐるもとになる。

さらに、複雑な本問題の解決の過程においては、解決の要となっている本質的な場がいくつかある。複雑な問題を解決するときは、解決の過程においていくつかの本質的な部分的な場において考えられる解決の方法をもとにして小問題をつくることができる。このような小問題の系列をつくり、これらの系列化された小問題が解決されるならば、系列化された小問題の解決の方法が本問題の解決における本質的な問題場面の思考と結びつき、本問題が解決される。つまり、このように本問題の解決の構造の本質的な場の解決に寄与するのが小問題の解決の構造である。したがって、部分的な小問題を考えるときには、この本問題の解決の本質的な場がどのような解決の構造をもっているかをさぐらなければならない。この意味においても本問題の解決の構造を解明しなければならない。

本問題の解決と部分的な小問題の解決の方法との関係は多様であり、多岐にわたっている。小問題の解決の方法が本問題の本質的な部分的な場の解決と結びつくほか、小問題の解決におけるアイデアが直接本問題に結びつく場合もあり、問題解決の思考からみて、小問題の解決におけるアイデアが本問題の解決の契機となる場合もある。

小問題の系列は、本問題の考え方や全体の解決構造と同じような解決の構造をもった関連している下位レベルの小問題を考える場合もある。つまり、本問題の解決の構造において、最も本質的なものは全体構造からみて何かをとらえ、それに即して下位レベルの小問題がつくらなければならない。関連する問題の解決の構造は、本質的に本問題の解決の構造と同じであるが下位問題なので、関連する小問題が解決されたといって本問題が直ちに解決されるとは限らない。小問題の解決の構造との有機的な関係を追究していかななければならない。

(6) 「思考内容の相互関係をとらえ、多様に考える」ストラテジーの分析

多様に考えるとは、解決にさいして、種々の観点を設け、観点をえていく通りの解決の方法を考えることである。学校教育の目標から考えるならば、いくつかの異なる観点によって解決にせまるので柔軟性が育成される。

視野のせまい固定的な考えによっては出あう問題を解決することにはならない。それには自由に考えることでなければならない。自由に考えることによって、解決過程においてはとらえられなかった観点を見出すことができるようになり、内容と内容との相互関係をもとらえられるようになる。

「自由に考える」ことを open thinking と名づけた。「自由に」とは open (開いた) でなければ

ばならない。open thinking とは、ある一面の見方という閉鎖的な態度を排除して、自分が最初に考えたことにこだわらず、さらに、観点を変えて考え、どのような結果になるのかという結果にこだわらず問わないという広い開いた考えによって推論する。このように、自由に考えていくなれば、次々と示唆が与えられ、解釈が暗示される。つまり、open thinking とは、問題場面に当面したとき、自分が考えたことに固執せず、閉鎖的な態度を排除し、考えた視点についてだけでなく、視点を変えて考える。また当面直接役に立たないと思われる思考内容や不十分かも知れない内容や一見とるにたらない内容について否定せず、自由に考えることである。このように自由に考えていくことによって考えを進めていくなれば、次々とアイデアが示唆され、新しい内容を考えることができ、内容と内容との相互関係がとらえられる。このようにして、未知の結果を発見することができ、このことがもとになって、次の結果を生み出す示唆を与えることが多い。このことによって、多様な考えができるようになる。

多様に考え、種々の考えが得られたとしても、それらの考え方はそれぞれ無関係な別個の考えのようにとらえている。しかし、多様な考え方には、相互に関係があると考えられる。はじめの考え方1を振り返ってみたときに、設定した観点を見直していくならば、その思考過程において、追究していく思考の異なった観点を見出すことができる。その思考の観点は、独立したものではない。その思考の過程において、本質的な部分の思考の観点を変更することによって、新しく見出した観点によって考えていくなれば、新しいアイデアが生み出され、新しい考え方2が得られる。必要なことは自由に考えることであり、さきに考えた考え方1や考え方2をもとにしながら思考を深め、同様に考え方3を生み出すことができる。

(7) 「Back Ward によって考える」ストラテジーの分析

推論の方法においてForward Reasoning, Back Ward Reasoning と Bi-directional Reasoning がある。Forward Reasoning は条件の一つ一つを分析して、既知の内容と条件とを結びつけ、観点を変えて考え、データを解釈し、内容を再構成して、論理の連鎖として結論を導く推論である。Back Ward Reasoning は、結論が導かれるためには、どのようなことがとらえられたらよいか。また、そのためには、どのようなことがとらえられたならばよいかと考え、はじめの条件に帰着する考えである。Back Ward の考えは、しばしば用いられる一般的ストラテジーである。

これに対して、Bi-directional Reasoning がある。この考えは、Back Ward の考えと Forward の考えとを両方用いる考えで、双方向推論法といわれる。結論が導かれるためには、どんなことがとらえられ、そのためには、どのようなことが明らかになったらよいか、そのことと条件から導き出されることや再構成されたこととを結びつけて結論づける方法である。

証明においては、条件をもとにして、結論を導く Forward Reasoning による推論方法において思考が進展しない場合がある。このような困難に出あったとき、この結論がいえるためには何がとらえられればよいかと考え、これらの考えと条件をもとに、数学的な考え方や一般的ストラテジーを用いて、条件の構造を分析し、内容の相互関係と結びつけて思考し結論を導く。この考

えが Back Ward の第一の立場である。

次に、条件をもとにして、条件と条件との間の相互関係をとらえようとしても、見通しがたたない場合がある。この場合、結論は高度の結論で、結論の条件が強い。この場合、Back Ward の考えによって、結論の内容を弱めるならば、問題は一層単純化される。この結論がわかるためには、何がわかればよいかと繰り返すことによって、問題は単純化された簡単なレベルの問題に再構成される。このようにして条件の内容に帰着し、証明の見通しがたてられる。これが Back Ward の考えの第二の立場である。

さらに、Back Ward の考えの第三の立場が考えられる。条件をもとにして、ある過程まではとらえたが、困難に出あい、見通しがたたない場合、Back Ward の考えを用いようとする。しかし、Back Ward のはじめの考えで、考えたことが条件をもとにして考えた内容と結びつかず推論が進まない場合がある。そこで、Back Ward の考えではじめに考えた観点を変更し、新しい観点を設定し思考を進めるならば、条件をもとにして考えた内容と結びつき、証明の見通しがたてられる。このような考えが Back Ward の考えの第三の立場である。もちろん、思考過程において、既知の内容との関連づけあるいは内容の再構成、数学的な考え方や数学的能力、ストラテジーによって推論を進めていかなければならない。

おわりに

問題解決において、内容の構造分析とともに数学的な考え方や数学的能力、ストラテジーの三者が有機的に結合し、機能しあって問題解決の構造が明らかになる。この意味において、一般的ストラテジーの構造を分析しなければならない。このことによって問題の解決が一層促進される。これまで一般的ストラテジーの分析を試みたが、数学の構造を解明することに大きな役割をもつ。さらに、解明しなければならない問題点もあるが今後の研究に俟つこととする。

引用・参考文献

- 1) Hunter Ballew ; Identification and Analysis of specific Problem Solving Strategies, National Council of Teachers of Mathematics 1983 P.P.79-80
- 2) F. K. Lester ; Making Problem Solving Come Alive in the Intermediate Grades. National Council of Teachers of Mathematics 1980 P.P.131-134
- 3) 三塚正臣 ; 学校数学における問題解決の構造について
金沢大学教育学部教科教育研究第22号 1986 P.P.35-36
- 4) 三塚正臣 ; 学校数学における問題解決の構造と方略との関係について
金沢大学教育学部教科教育研究第24号 1988 P.P.215-217

(平成2年10月31日 受理)