

回転曲げ疲労強度の数学的モデル (発熱現象の影響)

田 知 清 夫*・藤 井 博 知*・龔 裕**

Study of a Mathematical Model on the Fatigue Strength at Rotating Bending (Influence of Exoergic Phenomena)

Kiyoo Tachi, Hirotomo Fujii and Yu Gong

In this paper, it regards the fatigue by rotating bending as forced vibration of one degree of freedom system and defined a deflection magnification. In accordance with the idea mentioned above, the present report aims at obtaining a theoretical solution on the basis of analysis of exoergic phenomena in the rotating bending and its comparison with already reported results. As the result, the mathematical model seems to be necessary to explain the mechanism of fatigue.

1. 緒 言

疲労強度は、材料の機械的性質や組織、荷重の種類や切欠きの有無、寸法の大小や表面状態、環境状態等によって同一材料でも異なった値をとる。このように機械部品等は、種々の要因により疲労強度に影響を与え、寿命予測が困難である。それ故に金属材料の強度と寿命の関係を求めるためにS-N曲線が重要視されている。

また、疲労強度に影響を与えるものとしては、材料自体の発熱現象が考えられ、それが疲労強度に影響を及ぼす要因の一つと推測される。

本報は、回転曲げを1自由度系の強制振動とみなしてたわみ倍率を考え、疲労強度とその発熱現象に及ぼすたわみ倍率の影響を検討し、金属材料自体の発熱による温度上昇に伴い金属強度が低下することで疲労破壊に至るものとして、発熱による経過温度 T' と繰り返し数 N の関係から $T'-N$ 曲線を解析し、得られた数学的モデルを基にして^{(1)~(3)}、疲労強度に及ぼす経過温度の影響を考察した。

2. $T'-N$ 曲線の解析

2. 1 $T'-N$ 曲線の計算式 回転曲げにおける発熱過程において、変化する温度を経過温

* 機械工学科 ** 北京理工大学

度と呼ぶこととし、 T' で表す。そこで、経過温度 T' と繰返し数 N の関係について解析する。解析は次のような条件のもとで行う。

- (1) 回転前の回転軸の温度は室温 T_s と同じとする。
- (2) $T' - N$ 曲線の座標は、 0°C を原点におくが、いま解析を行いやすいために室温 T_s ($^\circ\text{C}$)を原点として解析することとし、室温を原点とした温度上昇の変化を T_u とする。すなわち、 $T_u = T' - T_s$ である。
- (3) T_u と N の変化率はある一定の範囲で比例的に変化するものとする。

室温を原点としたとき材料の発熱による温度上昇 T_u は、繰返し数 N の関数として次式で表されるものとする。

$$T_u = f(N) \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)について、

$N \rightarrow$ 大のときは、 $T_u \rightarrow$ 高、

$N \rightarrow$ 小のときは、 $T_u \rightarrow$ 低、

という傾向があるとすれば、 T_u と N の関係は次式で表すことができる。

$$dT_u / dN = a' T_u \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで a' は、材料の変形等により変化する疲労温度係数と呼ぶこととする。

さて、発熱による温度上昇 T_u の最高温度を T^* とすれば、繰返し数が $N \rightarrow \infty$ となる場合は、 $T_u = T^*$ となるものとする。そこで、 T_u と T^* の差をとり、式(2)を改めて次式のように表す。

$$dT_u / dN = a' (T^* - T_u) \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)を解くと、

$$a' N = -\ln (T^* - T_u) + C_3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで、 C_3 は積分定数で、初期条件として $N = 0$ のときは $T_u = 0$ とすれば、

$$C_3 = \ln T^* \quad \dots\dots\dots (5)$$

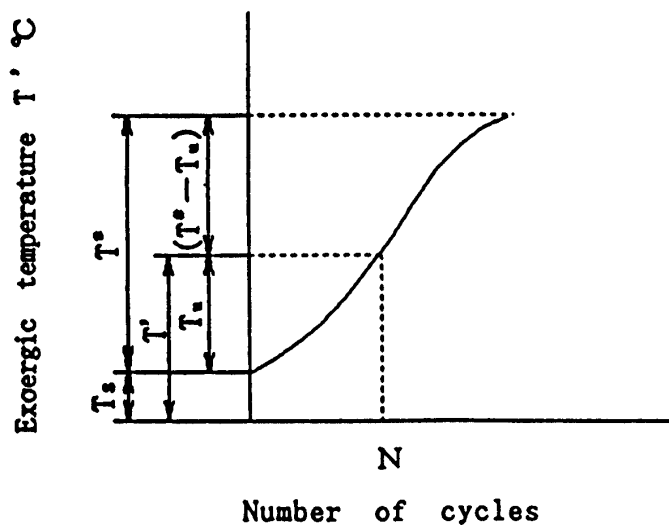


Fig.1 Exoergic temperature a Function

となり、式(5)を式(4)に代入すると式(6)になる。

$$T_u = T^*[1 - \exp(-a'N)] \quad \dots\dots\dots (6)$$

したがって、室温を含めた経過温度 T' は次式となる。

$$T' = T^*[1 - \exp(-a'N)] + T_s \quad \dots\dots\dots (7)$$

Fig. 1は、式(7)から求めた $T'-N$ 曲線の模式図である。

2. 2 疲労温度係数 a' の検討 式(7)中の疲労温度係数 a' は未知数である。この a' の大小によって曲線の傾向が変わることから、疲労温度発熱による疲労温度係数 a' には経過温度 T' に影響を及ぼす多くの要因が含まれていると考えることができる。そこで、 a' はたわみ倍率 M_f の影響を受けると仮定し検討を試みる。

たわみ倍率 M_f と経過温度 T' の関係について、

$M_f \rightarrow$ 大(変形 \rightarrow 大)となり $T' \rightarrow$ 高、

$M_f \rightarrow$ 小(変形 \rightarrow 小)となり $T' \rightarrow$ 低、

となる傾向があるものと考えられる。

ここで、疲労温度係数 a' とたわみ倍率 M_f は次式で表されるものとする。

$$a' = f(M_f) \quad \dots\dots\dots (8)$$

それぞれの大小関係を式(7)及び、上述の M_f と T' の関係を基に考えると、

$M_f \rightarrow$ 大(変形 \rightarrow 大)のときは $a' \rightarrow$ 大、

$M_f \rightarrow$ 小(変形 \rightarrow 小)のときは $a' \rightarrow$ 小、

となる傾向でなければならない。そこで、 M_f と a' のそれぞれ変化率の比を考え、

$$(da'/a') / (dM_f/M_f) = B \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表されるものとする。ここで B を温度弾性と呼ぶこととする。

いま、 M_f の適当な範囲で B が一定とみなせるならば、 a' と M_f の関係は式(10)となる。

$$a' = UM_f^B \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 U をたわみ温度係数と呼ぶこととする。

式(10)を式(7)に代入すれば、次式となる。

$$T' = T^*[1 - \exp(-UNM_f^B)] + T_s \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(11)について検討すると、

$M_f \rightarrow$ 大(変形 \rightarrow 大)のときは $T' \rightarrow$ 高、

$M_f \rightarrow$ 小(変形 \rightarrow 小)のときは $T' \rightarrow$ 低、

となる。また、繰返し数 N と経過温度 T' の関係は、

$N=0$ では、 $T'=T_s$ 、

$N \rightarrow \infty$ では、 $T'=T^*+T_s$ 、

となる。これより、式(11)は金属材料の変形と発熱による経過温度の傾向を近似的に示しているものと推測される。

2. 3 たわみ温度係数 U の検討 式(1 1)中のたわみ温度係数 U について、さらに検討を加える。ここで、

$$U = f(S) \quad \dots\dots\dots (1 2)$$

とする。ただし、 S はたわみ弾性係数として次式で定義する。

$$S = NM_f^B \quad \dots\dots\dots (1 3)$$

たわみ弾性係数 S とたわみ温度係数 U のそれぞれ変化率の比を考え、その極限值をとって、

$$(S/U) (dU/dS) = \beta \quad \dots\dots\dots (1 4)$$

で表されるものとする。ここで、 β を温度の弾力性と呼ぶこととする。

いま、 S の適当な範囲で一定とみなせるならば、 U と S の関係は式(1 4)を解いて次式となる。

$$U = Y (NM_f^B)^{\beta} \quad \dots\dots\dots (1 5)$$

ここで、 Y を経過温度係数と呼ぶこととする。

式(1 5)を式(1 1)に代入して整理すると次式となる。

$$T' = T^* \{1 - \exp[-(Y NM_f^B)^{\beta}]\} + T_s, \quad \dots\dots\dots (1 6)$$

2. 4 発熱温度上昇 T_u の最高温度 T^* と応力振幅 σ の関係 室温を原点とした発熱温度上昇 T_u の最高温度 T^* と応力振幅 σ の関係は、次式で表されるものとする。

$$T^* = f(\sigma) \quad \dots\dots\dots (1 7)$$

いま、式(1 7)の変化率の比 B_t をとり、その極限值をとって次式で表す。

$$(\sigma/T^*) (dT^*/d\sigma) = B_t \quad \dots\dots\dots (1 8)$$

式(1 8)中の B_t を変形係数と呼ぶこととする。

ここで、 $\sigma = \sigma_t$ のとき T^* は材料の融点 T_M であると仮定する。いま、 $T^* = T_M - T_s$ として整理すれば、

$$T^* = (T_M - T_s) \exp[-B_t \ln(\sigma_t/\sigma)] \quad \dots\dots\dots (1 9)$$

となる。ここで改めて、 0°C を原点に置き換え室温を含めた経過温度の最高温度を $T_{m.s.}$ として

$T^* = (T_{m.s.} - T_s)$ を式(1 9)に代入すれば次式となる。

$$T_{m.s.} = (T_M - T_s) \exp[-B_t \ln(\sigma_t/\sigma)] + T_s, \quad \dots\dots\dots (2 0)$$

2. 5 変形係数 B_t の検討 $T_{m.s.}$ は、応力振幅以外に材料の寸法や回転速度等によっても変化すると考えられる。そこで、 B_t は M_f の関数としその変化率の比をとり、それを D' とおけば、

$$(M_f/B_t) (dB_t/dM_f) = -D' \quad \dots\dots\dots (2 1)$$

となる。ここで、 D' をたわみ弾性と呼ぶこととする。

式(2 1)を解いて整理すると式(2 2)となる。

$$B_t = B_f M_f^{-D'} \quad \dots\dots\dots (2 2)$$

ここで、 B_f を発熱応力係数と呼ぶこととする。

なお、式(2 2)を式(2 0)に代入すると次式となる。

$$T_{m.s.} = (T_M - T_s) \exp[-B_f M_f^{-D'} \ln(\sigma_f / \sigma)] + T_s \quad \dots\dots\dots (23)$$

また、試験片ごとの温度上昇曲線は、次式で計算される。

$$T' = (T_M - T_s) \exp[-B_f M_f^{-D'} \ln(\sigma_f / \sigma)] \{1 - \exp[-(Y N M_f^B)^\beta]\} + T_s \quad \dots\dots\dots (24)$$

3. 計算結果及び考察

数値計算の一例として、S45Cにつき、式(24)を用いて計算した。計算条件は特に断りのない限り、著者らの一人が行った実験データを基にして、応力振幅 $\sigma = 500 \text{ MPa}$ 、回転の円振動数 $\omega = 356 \text{ rad/s}$ 、直径 $d = 12 \text{ mm}$ 、試験材料の長さ・直径比 $n (= l/d) = 7$ 、減衰比 $\zeta = 4$ 、 $T_s = 20^\circ\text{C}$ (293 K) とする。式中の各係数については、 $B_f = 2$ 、 $D' = 1$ 、 $Y = 0.0002$ 、 $B = 1$ 、 $\beta = 0.3$ とする。

3. 1 応力振幅 σ をパラメータとした計算例 Fig. 2 は計算の一例である。

$\sigma \rightarrow$ 大のときは $M_f \rightarrow$ 大 (変形 \rightarrow 大)、となり $T' \rightarrow$ 高、

$\sigma \rightarrow$ 小のときは $M_f \rightarrow$ 小 (変形 \rightarrow 小)、となり $T' \rightarrow$ 低、

となる傾向を示している。ここで、疲労破壊が起きると予想される境界温度を疲労限度温度 T_F とする。この疲労限度温度の設定については文献(4)を参考にした。これより、S45Cの場合、試験温度が 300°C を超えたあたりから疲労限度が急激に低下している。これを発熱による温度上昇の場合として考えると、経過温度 T' が 300°C を越えて材料が破断しなくても、強度的には著しく低下していると推測される。つまりこの温度を越えたときが材料の寿命であると考えることができる。なお、Fig. 2 中の破線は T_F 線を示したものである。

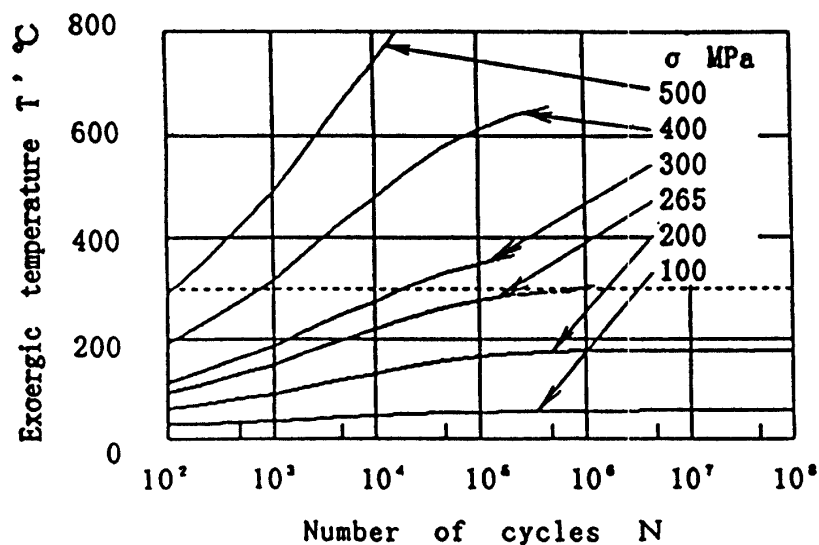


Fig. 2 $T' - N$ Curves (S45C)

3. 2 回転の円振動数 ω をパラメータとした計算例 Fig. 3は、計算の一例である。

$\omega \rightarrow$ 大のときは $M_f \rightarrow$ 小(変形 \rightarrow 小)、となり $T' \rightarrow$ 低、

$\omega \rightarrow$ 小のときは $M_f \rightarrow$ 大(変形 \rightarrow 大)、となり $T' \rightarrow$ 高、

となる傾向を示している。一般に疲労強度の速度依存性については、発熱現象の場合も回転の円振動数 ω が30~500 rad/sでは計算による差が小さいのに対し、3000 rad/sにすると経過温度 T' は低くなる結果となった。これは、発熱現象において ω と T' の大小関係を考慮すると、回転の円振動数 ω が大きい程、経過温度 T' が低いために疲労強度は上がると考えることができる。

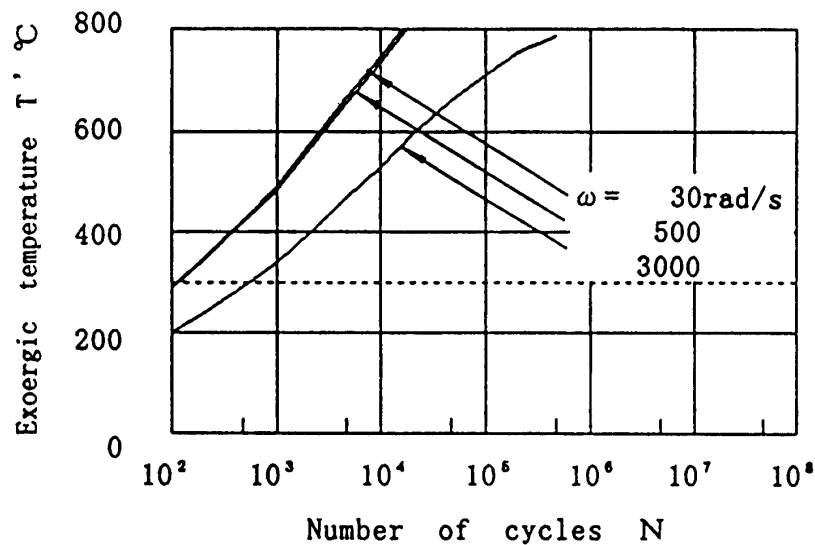


Fig.3 $T'-N$ Curves (S 4 5 C)

4. 結 言

本研究で検討を加えた $T'-N$ 曲線の解析結果を要約すると次のとおりである。

- (1) 発熱による温度上昇をたわみ倍率の関数とおくことで、疲労強度に及ぼす経過温度の影響を説明できると考えられる。
 - (2) 実際の経過温度により近づくためには、熱伝達や熱伝導、熱放射等の考慮を要する。
- 最後に、本研究の数値計算に協力された、当時福井工業大学大学院生武道輝一君に謝意を表す。

文 献

- (1) 田知・丁、機講論、No. 96-15 (1996)、109。
- (2) 田知・武道、機講論、No. 975-2 (1997)、19。
- (3) 田知・武道、機講論、No. 98-1 (1998)、349。
- (4) 中村・ほか3名、機械の疲労寿命設計 (1998)、149、養賢堂。

(平成11年11月30日受理)