問題解決における数学的思考能力について

三　塚　正　臣*

On the Ability of Mathematical Thinking in Problem Solving

Naomi MITSUTSUKA

Students must acquire various ways of mathematical thinking and mathematical abilities in problem solving, when they try to solve mathematical problems for themselves. Their problem solving performance is achieved by using a variety of strategies or heuristics. Then they will analyze the logical structure of the problem solving, and examine thoroughly the systematic relation between them, if they make use of the mathematical thinking and mathematical strategies which they are expected to acquire in the problem solving process, and they will be able to convert their ideas into new thinking action. Therefore, this paper is trying to investigate the analysis of the abilities of mathematical thinking in problem solving. I have put an emphasis on the importance and the characteristics of problem solving.

1．はじめに

問題解決においては，最適の方法・手段を見出し，数学的な考え方や数学的能力ならびに一般的ストラテジーによって，内容を再構成し，問題解決における思考行動にもとづいて，再構成された内容と内容との相互関係を連鎖としてとらえる。さらに，その過程においては，問題事態の全体構造が再構成され，数学的な考え方やストラテジーによって洞察され，認知的構造が構造変換され，内的構造連関がおこなわれ，関係が見出される。

ここでは，問題解決における思考能力を心理学的に考察し，問題事態のもつ外的条件，内的条件との関係を論じた。内的な構造変換がおこることによって問題は解決される。さらに，生産的思考を明らかにし，独創過程における類推的思考の役割を論じた。

2．問題解決過程における思考について

問題解決における問題は，既知の知識や固定化されたアルゴリズムによって解決できない事態に直面したとき，その事態を問題という。問題解決はこのような結果を得る手段・方法が明らかでない事態に直面したとき，その結果を得る手段・方法を発見して，目標に到達し結果を得るこ

*教養部

とである。また，どのようにしてその方法や手段を発見し得るかと考える行動を問題解決行動といい，解決の手段や方法，結果を見出すことを思考ということができる。この意味において問題解決は思考ということにほかならない。思考には何らかの中枢過程あるいは媒介過程が働いていると考えられる。

解決過程は心理学的には独立的な問題と従属的な解決行動が考えられ，解決の方法，関係を把握する目的論的観点をもっている。問題解決行動を動機づけるのは，そのときにおける内的諸条件により，解決の方向がとらえられるのは内的諸条件に依存する。問題を解決するには条件を追究しなければならない。問題の解決の方向を与えるものには内的条件と外的条件がある。問題を解決するには思考とそれに対する反応とのかかわりにおいて，内的条件そのものとのかかわりを解明しなければならない。

Gagne は行動論的方向から問題解決を考え，問題解決の手段・方法を既習の原理・概念・内容と結びつけて考えるだけではなく，解決すること自体が高度の原理・方法の発見であり新しい知識の獲得であると考えた。学習は行動の変容であると考え，このような獲得された知識は思考の結果であると同時にその解決過程において見出された手段あるいは方法を解決の前提条件であると考えた。つまり，問題解決においては，解決の手段や方法は欠くことのできないものであり，解決自体は高度の方法の発見と考える。Dewey は，直ちに解決し得ない問題事態への直面に対して，まず推理が作用し，事後的に結実するものこそが判断であると述べている。Pierce は思考推論を演繹，帰納，発想の三種にわけ，感覚は推定的推論であり，注意は帰納的推論であり，さらに観念の連合も推論であると述べている。この考えは Gagne の考えと異なる。

思考は組織的（orderly）理性的（reasonable）反省的（reflection）である。このことは思考の性格を表わしている。思考は組織だてられ，順序よく，合理的に論理的に振り返り熟考することを意味している。数学的，組織的，論理的に思考するとは，問題の条件のもつ一つ一つの内容が既知の原理・概念・内容とどのように結びつき，数学的な考え方や一般的ストラテジーにもとづいて，条件を解釈したり，条件と条件とを組みあわせ，あるいは観点を変換して考えることによってどのような内容に再構成されるか，再構成された内容と内容との間の相互関係をとらえることを意味し，それらの相互関係を部分的結論と考え明確にとらえなおすことを意味する。この規範としての思考の方法にもとづいて，思考論理を探究しなければならない。一般的ストラテジーは，数学における数学的方法が主体的な解決行動のなかで，認知行動のパターンとなってあらわれたとき方略となる。

問題解決過程においては，数学的な考え方や一般的ストラテジーを用いることによって条件の構造を明らかにすることができ，解決の構造[1)]を明らかにすることができる。そのためにはストラテジーの内容を解釈したり，ストラテジーを構造的に分析しなければならない。一般的ストラテジーとして，「パターンをさぐる」「振り返って考える」「複雑な問題は単純化した問題あるいは類似の問題を考え，その問題の解決の方法をもとにして考える」「Back ward によって考える」「多様に考える」等のストラテジーがある。「パーンをさぐる」ストラテジーはパターンとして帰納的

に考えることであるが，表におけるパターンだけでなく，表と図とを結びつけ表におけるパターンが図においてどのようなパターンであるか，また，図と図とを比較し構造的に相互関係をパターンとしてとらえなければならない。「振り返って考える」とは解決過程を振り返り，より簡単な方法はないか，よりよい方法はないか，と考えるとともに解決の方法を見直すことにより，解決過程が一層明確にとらえられ，問題を解決する能力を豊かにする。したがって解決過程においてはこれまで考えなかったことや解決過程の共通性や類似性が再認識され，それによって解決の構造や解決の方向がとらえなおされ解決の方法を見直すのに有効である。また，「複雑な問題は単純化した問題，類似の問題の解決の方法をもとにして考える」とは，単純化した問題の解決の構造をとらえることによって，その奥にある数学的な考え方や数学的能力がとらえられ，これらのことがもとになって，複雑な問題の内部構造や用いられる数学的な考え方や数学的能力がとらえられ，複雑な問題の解決の構造がとらえられる。類似の問題は，解決の構造が複雑な問題と同じ構造をもつ。したがって，類似の問題の解決の方法を見直し，その解決の方法をもとにして本問題との内容の相互関係をとらえ，異同を弁別し，観点を変更して考えたり，数学的な考え方，数学的アイデアによって，解決における共通性・類似性等の相互関係をとらえ本問題の解決をはかる。「多様に考える」とは解決にさいしては種々の観点を設け，観点を変えて多様に解決の方法を考えることである[2)]。このことによって，柔軟性のある思考をもつことができる。

Dewey は「探究する」ことは，不確定な状況を確定した状態に変えることであり，主観的には，疑問から確信にいたる知的活動の過程であると述べている。したがって問題解決における探究は解決の状態に変えるための過程は解決過程であり，解決の不確定な状態は，とくに，条件を分析し，構造をとらえ，解決の構造分析によって推論され，確定した状態になる。これらのことから一般的に解決を探究する段階として，(1)問題状況の把握 (2)問題設定 (3)問題の条件の分析・解決構造の分析 (4)解決の推論 (5)思考実験 (6)検証の段階が考えられる。

(1) 問題状況の把握の段階　先行条件としての不確定な状況をとらえる段階で問題の所在を明確にする段階である。

(2) 問題設定の段階　把握した状況から，問題の条件を設定し問題として明確にする。

(3) 問題の解決の構造分析の段階　問題の条件を分析し数学的な考え方や一般的ストラテジーによって内部構造をさぐり，解決の仮説を設定し，思考行動に基づいて，結果を予測する段階である。この段階では，条件と条件を関連づけ，構造的に条件を分析しなければならない。

(4) 問題解決の推論の段階　解決の仮説にもとづいて，論理的推論によって可能な結論を誘発し客観的に部分的結論をとらえ，部分的結論から次の部分的結論を連鎖としてとらえる段階で，仮説の妥当性を検討する。この段階においては，論理的構造としてとらえられなければならない。

(5) 検証の段階　思考実験によって，妥当な仮説は支持され，事実によって，仮説を修正する段階である。

これらの段階は解決の手順を示す段階で，問題解決における総合的方略といわれる。

Pierce は論理的な性格や構造について認識の過程を経験的な事実にもとづいて，それらの局面

段階の論理的な構造やそれらの特質の解明を試み「探究の段階」を次のように考えた。

(1)　仮説提起（abduction）の段階　経験的な諸事実を分析し，それらの事実を説明しうる可能性をもった理論を構成する推理のことをいい，その推理は，その結論を推測的に示すが，一つ一つ完全な明確な論理形式をそなえている。探究の第一段階で，新しい論理を発見し，新しく着想し仮説を形成し定立する段階で，不可解な事象を種々の側面から分析し思考することからはじまる。

(2)　仮説からの演繹（deduction）の段階　探究の第二段階で，abduction の過程における仮説を論理的推論によって可能な結論を誘発する過程であり，この過程は仮説検証の準備段階である。この段階においては論理的に演繹的に推理しなければならない。

(3)　帰納の推理（induction）の段階　探究の第三段階で abduction の提供する仮説から deduction によって可能な論理的結論を論理過程によって仮説の真実性を確証する段階である。

Pierce の探究の段階は論理的分析と演繹的推論，帰納的な推論の段階で abduction 段階で定立された仮説が客観的になる為には，論理的に分析されなければならない。この過程において，論理的に探究することによって仮説は演繹的推論の前提として機能する。これらの段階は，問題解決過程における段階から考えるならば，問題解決の構造分析ならびに，問題解決を推論する段階であると考えられ，pierce の段階は問題解決の探究の過程の段階に包含される。

3．問題解決と問題の外的条件・内的条件との関係について

問題解決過程において，条件分析においては一群の判断の系列ともいえる推論過程の各々の判断に対して，それを規定する多くの内的条件，外的条件との関係を交互作用としてとらえていくことが重要である。また，学習の内的条件を一定の構造としてとらえ，条件と結果との間の関係を因果的構造としてとらえていくことで，問題解決は一連の条件群の逐次的変換の過程として組みかえられる。したがって，問題解決の過程を規定する内的条件，外的条件を分析しなければならない[3)]。

Gagne は問題解決を以前に学習した理論・原理と結びつけ，新しい理論・原理を考え出すことであるとした。したがって，問題解決の外的条件とは，問題事態に対応するいかなる原理・概念，いかなる属性によって問題が解決されるか，したがって，問題解決のため，どんな新しい原理を考え出さなければならないかをいう。一方内的条件として，問題解決のためにはどのような原理・概念・属性をどの程度把握し，それをどのように解決構造としてとらえ，論理的に結合していくかをいう。これらのことを考えなければならない。

問題解決過程においては，どのような解決の手順が原理的に考えられるか，また，有効であるかを考えなければならない。しかも，主体的な探究的学習活動がなされるように外的条件・内的条件を追究しなければならない。問題解決過程における解決構造の分析段階において，条件を加工し分析する過程では，数学的能力が単独あるいは，複合されて機能し，問題の条件に関連している既知の知識や概念と条件とを結びつけたり，多様な情報やデータを関連づけ，どのような関

係が成立するか，その結果を部分的結論として内容を再構成する。さらに，観点を変更し，新しく観点を設定して思考する[4]。また，数学的内容，概念をもとにして解決したり，数学的な考え方やストラテジーを分析したり，あるいは，数学的方法や数学的アイデアによって再構成された内容と内容との間の相互関係を連鎖として論理的にとらえる。課題が複雑になると推理は漸進的に拡張される。また，解決の構造が同型な課題を解決していくなかでは類推能力が働らく。解決過程が漸進的な過程では，初期の段階では，課題は拡げられた論理の環を媒介として解決されるが，後期の段階では短縮された過程を媒介として解決される。この過程は論理的な構造をもっており，明確な論理的に基礎づけられた推理の環として完全な論理構造をもっている。この過程においては，課題の内容と思考行動との間には独特な直接的連合が形成される。さらに，この思考過程においては，ある知的操作から別の知的操作へと新しい観点を設定し[5]，新しい思考行動へと変換することが重要である。はじめに考えた思考過程の拘束された状態から脱却し，思考がある方向にむけられた課題解決が障害にであったとき，本質的構造をもとにして，一つの新しい視点が設定され，新しい側面から新しい方向を考えるならば，思考の転換がおこり思考の方向が転換される。思考の転換によって新しい観点が設定され思考が促進される。思考における内部条件はこのような一定の構造性をもち，内部条件とこのようにしてえられた結果との相互関係が明確にとらえられなければならない。

4．問題解決のメカニズムと構造変換について

問題解決においては，問題事態の全体構造が再構成され，洞察により認知的構造の変化がおこり，解決に最適の既知の概念あるいは性質・手段がとらえられ，数学的推理によって，再構成された内容と内容との相互関係が論理的に連鎖としてとらえられる。思考過程の特徴は構造変換又は中心転換にある。課題解決がおこなわれるまでには，何段階もの構造変換が行われ，問題事態の構造変換がおこなわれるたびに事態は一層深く探究され，全体の内的な構造変換がおこなわれ，内的必然性が理解される。思考過程においては，錯綜する諸条件，表面的な特徴が構造的にとらえられ，内的な構造的関係が見出される。その際，構造的に分凝，中心化などの操作がおこなわれる。問題事態をあらゆる角度から探究し，その結果課題解決に最適な手段・方法が発見される。それは過去の経験や知識によっては，解明することが困難で，問題事態に対して，解決の困難性の分析，どのような数学的な考え方やストラテジーによる分析，目標の分析によって関係を把握し，問題事態の構造を明らかにし，そこに含まれる数学的能力の諸因子の分析によって構造変換がおこなわれ，問題事態が変容して解決可能となる。

問題解決における構造変換においては，洞察と直観を必要とする。直観は，結論が妥当であるか否かの分析的段階を経ないで，暫定的な結論に到達することをいい，鋭い推察，創意，仮説の設定，思考の飛躍を必要とする。洞察あるいはひらめきにより，解決が困難な問題に対して構造変換がおこなわれ，解決の糸口が見いだされる。このようなひらめきがおこる直前には一種の前兆 (intination) があるといわれ洞察によるひらめきがおこる以前にはできる限りの論理的思考の

蓄積が必要であり，これが支えになっていると思われる。したがって，構造の変換がなされるには，これらのことが条件となっていると考えられる。

5．創造的思考の内的特性について

思考作用は再生的思考と生産的思考にわけられる。思考作用は記憶作用や意志作用から独立した別個の活動ではなく，全体的行動の生産的方面の思考と考えられる。

問題事態がこれまでのアルゴリズムや既知の知識や方法によって解決される場合に働く思考を再生的思考というが，問題事態が新奇な事態である場合には、状況の構造変換が要求され，状況を変換するか思考の方法を変換し，思考しなければならない。このさい，既得の手段・方法を機能的に変換し，変革されるとき，その思考を生産的思考という。生産的思考のうちでも，比較的高次な機能的変革もしくは飛躍的構造変換をもつような思考活動を創造的思考と考えた。生産的思考は単純な再生的思考では解決が困難なとき，思考の機能的構造変換によって解決されるような思考である。創造的思考は生産的思考の範疇に入るが，これと区別して生産的思考のなかでも比較的高次な機能変革あるいは飛躍的な構造変換がなされる思考を創造的思考と考えた。

知的活動は操作（operation），内容（content），生産（produce）に分析されるが，知的操作のうちでも創造的思考と深い関連をもっているのは，発散的生産思考と収束的生産思考である。収束的生産思考は与えられた一定の条件を分析し，論理の連鎖として再構成された内容を一定の方向に収束させ，単一もしくはそれに近い形の解決に到達するような思考である。これに対して，発散的生産思考は解決の方法を一つに収束せず，多様な解決の方法を見い出す思考で，流暢性・独創性に関する思考で，問題ならびに問題の条件に対する適応的柔軟性をもつことを意味している。創造的思考は発散的生産思考を中心とし，拡散，直観等をもとに飛躍的構造変換の性格をもつが，その前提過程においては，得られた結果を組織的に体系化する収束的生産思考活動も必要であり，これらが有機的，統合的に相互に作用しあうことによって創造が可能となる。創造的思考がなされるためには条件に対する適応的柔軟性のほかに探究，推理，解釈，知的洞察力，変換能力等が必要である。

6．独創過程における類推的思考について

生産的思考における発見過程においては，類推的思考がある種の創造的役割をはたしている事例は少くない。未知の問題において，その問題の解決の方法を見出す場合，その解決の媒介的手段として類推的思考があり，未知の問題と既知の知識体系とを結合させる思考手段が類推的思考である。つまり，既知の内容や思考経験における思考の方法を未知の問題と結びつけ，未知の問題を主体的に思考し，自己の認知内容とすることである。それは，本質的には，相異なる二つの対象の一方または双方を新しい観点から見直し，相異なる二つの事象をある種の同型の構造としてとらえることにほかならない。ある事象の解決の方法をもとにして他の事象の解決の方法との共通性，類似性を見出し，その設定条件を媒介として同型の解決構造をもつものとしてとらえ，

他の事象を解明することである。つまり，両者を同型の解決構造をもつものとして等しい関係にあると変換して考える思考で未知の問題・概念あるいは不明確な概念・問題を精度の高い思考体系に変換する思考と考えられる。思考の変換の設定条件は，与えられた事象をそのままの実体としてとらえるのではなく，多くの異なった観点にたって分析し，結果をそれぞれの観点にたった固有の内容として再編成しなければならない。類推的思考は本質的には既知の知識体系の前提の上にたってはいるが，類推的思考は未だ存在しないものをつくり出し，未だ発見されなかった内容をとらえ得るのであるから独創的役割をもっているといってよい。それ故に，同じ構造をもつものとして結びつける変換系をどのように選択するかにかかっており，思考実験における探索によって，精度の高い思考体系に変換される。類推的思考は，内容の異質性のなかに，形式的相似性または類似性を見出す能力である。類似性は直接または類推によって間接的に認識される思考実験によって客観的なものとなる。類推的思考は，未知の対象を既知の知識の加工過程において把握するための思考手段であると考えられる。類推的思考はこのように独創や発見に重要な契機を与えるものである。

7．数学的思考能力の累加性について

独創的思考は生産的思考と生産レベルにおいて差異があり，生産的思考活動のうちでも比較的高次な機能的変革あるいは飛躍的構造変換を含むような思考活動である。複雑な思考を要する問題の解決過程においては，思考行動によって条件の構造を分析し，条件に関連している既知の内容・数学的な考え方やストラテジーによって内容を再構成し，再構成された内容と内容との間の相互関係を連続的にとらえ問題を解決する。この問題解決過程においては，いくつかの思考因子が複合され，累加されて機能する。例えば，複雑な問題を考えるときには，機能する思考因子のうち，問題の本質をとらえ，データを組みあわせ，データとデータを関連づけ再構成する。さらに，累加され，多様な観点を設定し思考したり，振り返りもとの問題の構造をさぐりとらえなおしこのことをもとにして類推的に本問題を解決する。さらに，問題解決におけるストラテジーによって解決の方向をさぐる。思考においては，問題の本質をとらえ解釈することによって，その内容が一層明確になり，さらに，数学的な考え方や単純化して考えることにより，帰納的に考えたり，演繹的に考えることが累加され，問題の内的構造がとらえなおされる。これらの単純化された問題の解決の構造をもとにして，類推的に問題の条件の構造をさぐり解決される。したがって，思考因子が累加されることによって，他の思考因子との関係がとらえられ，思考が転換され解決の構造が明らかになる。

8．おわりに

問題解決における思考を心理学的に追究し，思考の性格を明らかにするとともに，解決のメカニズムと諸条件との関係，思考構造の変換について追究した。問題解決は思考構造の変換が中心となる。問題解決における思考は生産的思考とくに収束的生産思考・発散的生産思考に特徴があ

り，数学的能力や数学的アイデア，数学的な考え方，ストラテジーによって思考が発展する。また，独創過程において類推的思考のもつ役割は大きい。さらに，これらのことを含めて解明すべき問題点もあるが今後の研究に俟つとする。

参　考　文　献

1）三塚正臣；学校数学における問題解決の構造について，金沢大学教育学部教科教育研究第22号 1986 P.P.36－37
2）三塚正臣；学校数学における問題解決の方略の分析 金沢大学教育学部教科教育研究第23号 1987 P.P.3－6
3）細谷純；問題解決 1973 P.220－P.222
4）三塚正臣；学校数学における問題解決の思考行動について 福井工業大学研究紀要第22号 1992 P.P.276－277
5）三塚正臣；学校数学における問題解決と数学的能力との関係について 福井工業大学研究紀要第23号 1993 P.P.284－285
6）Schoenfeld；Heuristics in the classroom, National Council of Teachers of Mathematics 1980 P.P.9－10

（平成5年10月29日受理）