

だ円制限三体問題の特徴

井 本 正 介*

A Surface of Section in Elliptic Restricted Three-body Problem

Shosuke Imoto

In this paper some results of elliptic restricted three-body calculation applied to the Sun-Earth-Moon system is presented. The calculation well represents the periodical change of the synodic month (T_1) with two definite frequencies. One frequency corresponds to the period of 411 days (T_r) and the other one to the Saros. The latter does not appear in the circular restricted calculation.

A surface of section of the phase space $\mathbf{r}-\dot{\mathbf{r}}$ at $\theta=0$ for the special case of $T_r=14T_1$ (13.96 in the real case) is investigated. Since the perturbation due to elliptic motion of the earth is rather weak compared with that of three-dimensional motion of the moon, the two-dimensional frame makes the elliptic nature of the orbit more distinctive than the three-dimensional one. Results of the two-dimensional elliptic restricted frame shows that the representative points are grouped in 14 islands' and in some islands the rotation of the point is clockwise and in some others anticlockwise. This suggests that island is turned over at some places in the phase space.

前の二論文^{1,2)}では月の運動を円制限三体問題として取り扱い、表1のような関係があるのを見出し、4個の独立な周期からいくつかの長周期が導かれることを示した。ここで $x-y$ 面は地球の公転面である。また回転周期というのは、運動方程式の非線形性によると見られる振動の周期で、 $x-y$ 面、 z 方向でそれぞれ公転周期を13.96, 12.74含んでいる。 T_r に対しては名称がないが、最長出差周期の2倍となっている。

表1 周期の分類

空間	公転周期	回転周期
xy 面	朔望月(T_1)	411.7 日(T_r)
z 方向	交点月(T_3)	346.6 日(食年)

* 教養部

本論文では、地球の軌道をケプラーの法則に基づくだ円と制限し、前二論文と同様の計算を行った結果を円制限の場合と比較して報告する。

1. 公転周期の変化

計算の手法は前報²⁾とほぼ同じである。回転座標を取り、地球の運動を考えにいと、ハミルトニアンは次のようになる。

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \omega^2 R_R^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 - \omega^2 \rho^2) - \frac{GS}{R_S} - \frac{GE}{R_E} - \frac{\mu \cdot GS}{\rho}$$

図1は回転座標への変換後の三体の位置関係を模式的に表したもので、太陽から地球軌道の長半径Rだけ離れた点Oを原点とした。x, y, zは月の座標, p, qは地球の座標である。R_E, R_Sはそれぞれ月から地球及び太陽への距離である。また R_Rは月の地球軌道面への投影点から太陽までの距離で、ρは地球から太陽までの距離である。μは月に対する地球の質量比、ωは地球の平均公転角速度である。したがって

$$R_R^2 = (x+R)^2 + y^2$$

$$R_S^2 = R_R^2 + z^2$$

$$\rho^2 = (p+R)^2 + q^2$$

となる。ここで地球に原点を移し、月の座標を円柱座標で r, θ, z とすると、月の運動方程式は次のように表される。ただしここでは地球の軌道は月によって影響されず、ケプラー則によるだ円運動をすると近似した。

$$\ddot{r}/r = (\dot{\theta} + \omega)^2 - \frac{GS}{R_S^3} - \frac{GE}{R_E^3} + D[(p+R)\cos\theta + q\sin\theta]/r$$

$$[r^2(\dot{\theta} + \omega)]' = D[q\cos\theta - (p+R)\sin\theta]r$$

$$\ddot{z}/z = -\frac{GS}{R_S^3} - \frac{GE}{R_E^3} \quad \text{ただし} \quad D \equiv GS\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R_S^3}\right)$$

この運動方程式から月の座標を求める計算は前論文と同じ手法で行った。図2は満月から満月

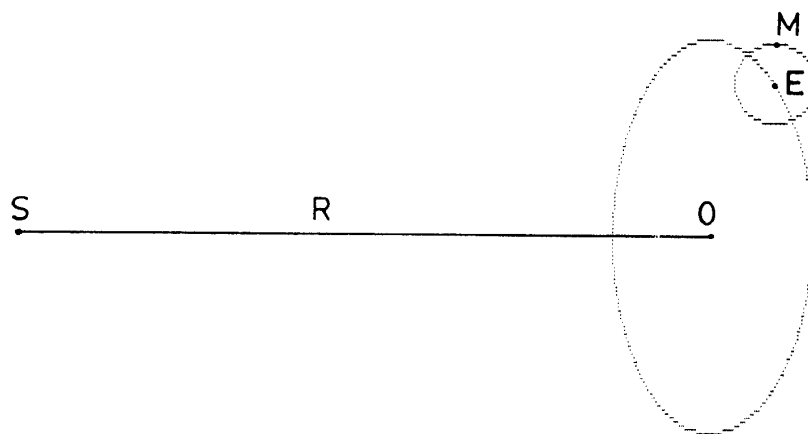


図1 太陽(S), 地球(E), 月(M)の回転座標における位置関係

への周期である朔望月 (T_1) の変化を求めたものである。前前報の図 8 と同じく、図は観測値 (理科年表による) と計算値との 2 本の線から成っているが、このスケールでは見分けられないほどよく重なっている。変化曲線は短周期と長周期の振動を含み、前前報に述べたように前者は T_1 、後者はサロス周期である。サロス周期は円制限の場合には現れず、前前報では周期 T_1 のみの振動に地球の公転周期 (一年) の振動を合成させて図 2 同様の変化を得ていた。

ところで円制限の場合、地球の座標は一点 (図 1 の O 点) であり、満月は $\theta = 0$ と一致しているが、だ円制限では地球の位置はだ円状軌道に広がり、一般に $\theta = 0$ でない。図 3 は $\theta = 0$ から $\theta = 0$ までの周期変化を調べたものである。図 2 と比べると短周期はほとんど同じであるが、長

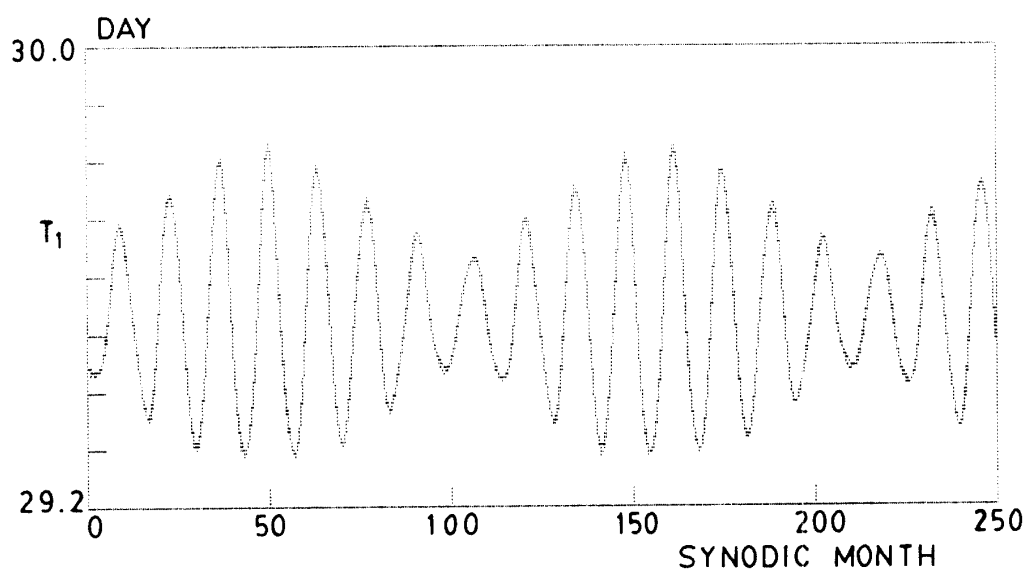


図 2 朔望月の長さの変化。図は観測値と計算値との 2 本の線から成り立っているが、ほとんど重なっている。

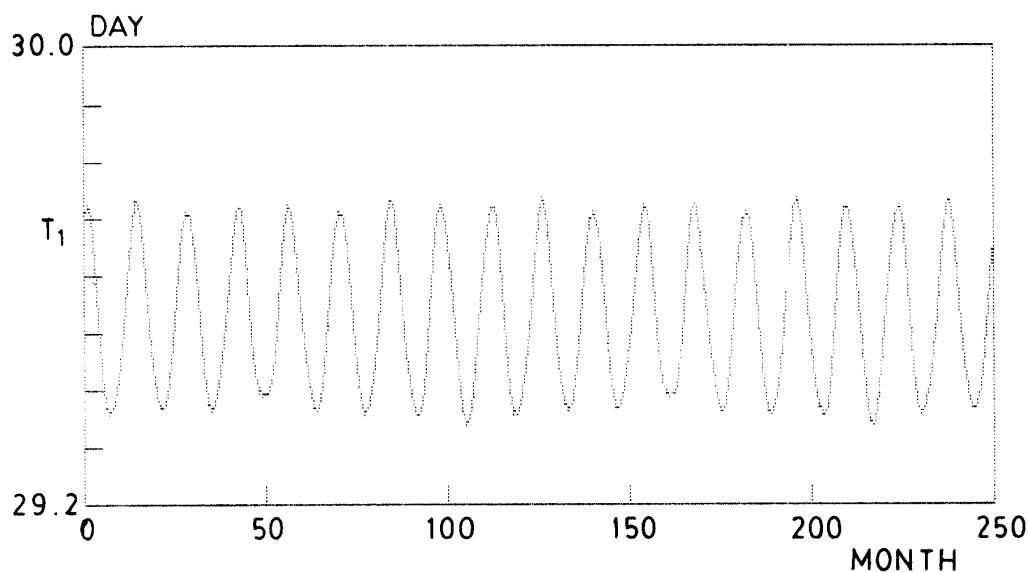


図 3 $\theta = 0$ から $\theta = 0$ までの月の長さの変化。図 2 のような長周期変化の現れ方は弱い。

周期の現れ方は非常に弱い。このことから図2に見られる月の公転周期の大きな変動は、満月から満月へという特別な周期を見ているからであり、幾何学的に単純な断面では地球がだ円軌道を取っていることの効果は小さいといえよう。この観点から見ると、降交点間または昇交点間の時間を表す交点月は、幾何学的に単純な断面に相当する。その変化は円制限とだ円制限とで差が見られず、だ円制限においても交点月の変化の図は前報の図2とほとんどかわらないので、ここでは図示を省略する。

2. 周期14のポアンカレ断面

前報と同じく $T_r = 14T_l$ となるように初期値を選び、位相空間 $r-\dot{r}$ の $\theta = 0$ におけるポアンカレ断面を調べた。円・平面制限の場合には代表点は一つのサークルに沿う14個の点に縮退していた。平面制限を外して三次元とした場合、14個の各点はそれぞれがサークル状の島となった。後の比較のため一つの島を図4に示す。ここでは一つの島に含まれるすべての点は同じ一つのサークルに乗っているのが認められる。次に円制限を外してだ円制限とした場合も同じく14個の島が認められた。図5は図4と同じ位置にある一つの島を、二次元・だ円制限と三次元・だ円制限との両方の場合について示したものである。図の上部の小さなサークルは二次元の場合であり、ほぼ全体を占める他の40個の点は三次元の場合である。三次元の場合、代表点の現れる順序は円制限の場合と同じで、3回転・周期8ではぼもとの位置、少し右寄りに戻っている。図5には周期112(14×8)を持つ5点のうち最初のものを・で示した。8個のグループはそれぞれ別な軌跡を描いており、図4との違いは明らかである。しかし島の大きさは三次元の場合は円制限とだ円制限とでは同程度であった。一方、二次元のものは長さで20分の1以下の小ささである。このこと

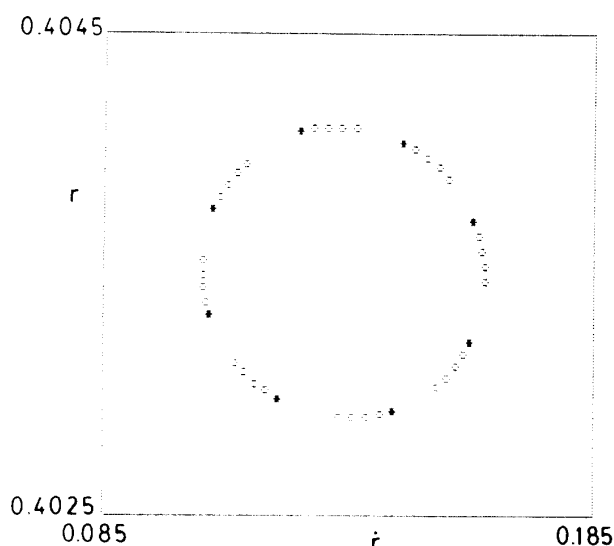


図4 円・3次元制限での $r-\dot{r}$ ($\theta=0$) 位相空間に現れる島の一つ。・は112月以内の代表点を示す。
 r, \dot{r} の単位はそれぞれ $10^6\text{km}, 10^4\text{km/d}$

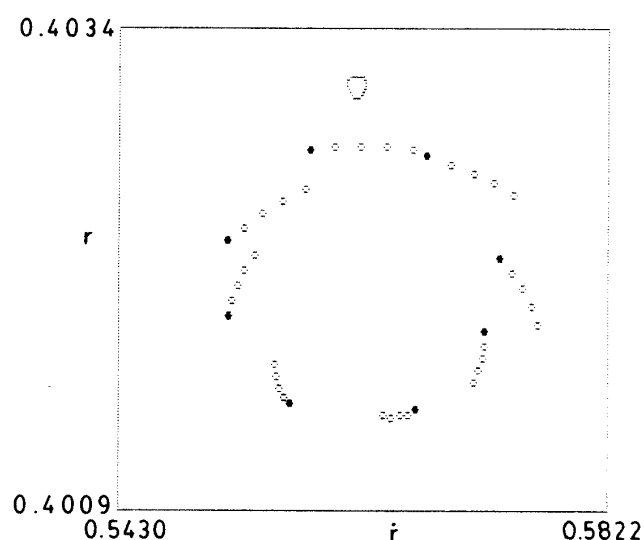


図5 だ円制限で図4と同一位置に現れる島。上部の小さなサークルは2次元制限、他は3次元制限。 r, \dot{r} の単位は図4と同じ。

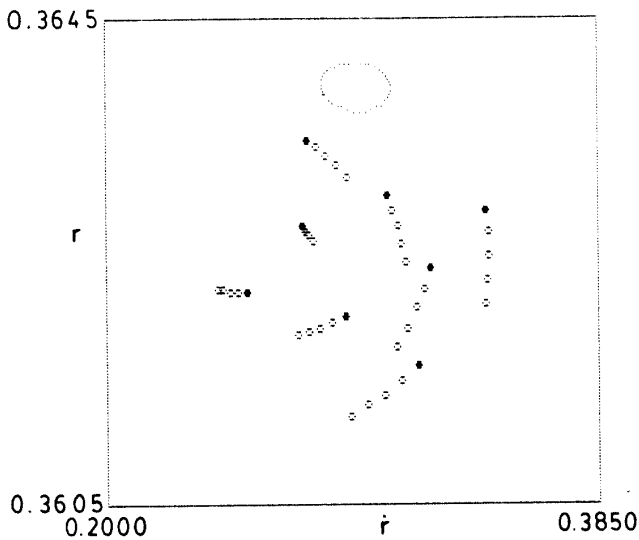


図6 図5と同じで別な島を示す。

は、地球の軌道を円近似からだ円近似に変えた時の効果は、 z 方向の運動が $x-y$ 面の運動におよぼす影響よりもずっと小さいことを示している。三次元・だ円制限の別な島の図を図6に示す。図5と同じく上部のだ円状のものが二次元の場合である。三次元の8個の代表点の並び方は図5とは異なっているが、その他の様相は同じである。このようにだ円制限は円制限に比べて複雑な形を示しているが、 z 方向の運動に影響されてだ円制限の特徴が見えにくくなっている。従って二次元・だ円制限の場合について次に詳しく調べてみよう。

二次元・だ円制限の場合も、位相空間 $r-\dot{r}$ の $\theta=0$ におけるポアンカレ断面は14個の島に分かれる。図7は560点の代表点をプロットしたものである。右下の島から順に左回りに $K=1, 2, 3, \dots$ の番号をつける。これは代表点の現れる順序である。 $K=7$ は $\theta=0$ で月が最も地球から離れる軌道であり、 $K=14$ はその逆である。島の大きさは $K=7$ で最小であり、 $K=14$ で最大となっている。図8に $K=7$ を、図9に $K=14$ をそれぞれ拡大したものを掲げる。ここではともに島に現れる数を9にとどめた。両図とも点はサークルに沿って順序よくまわり、ほぼ8点目でもとに戻っている。しかし図8ではまわり方は左回りで、図9では右回りである。回り方に注目して他の K を調べてみると、 $K=6, 7, 8$ で左回り、 $K=1-4, 10-14$ で右回りとなって

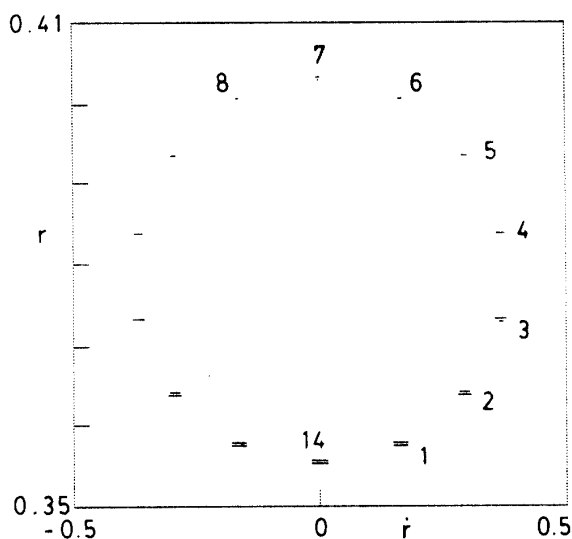


図7 だ円・2次元制限での $r-\dot{r}$ ($\theta=0$)位相空間の全体像。代表点は番号の順に進む。

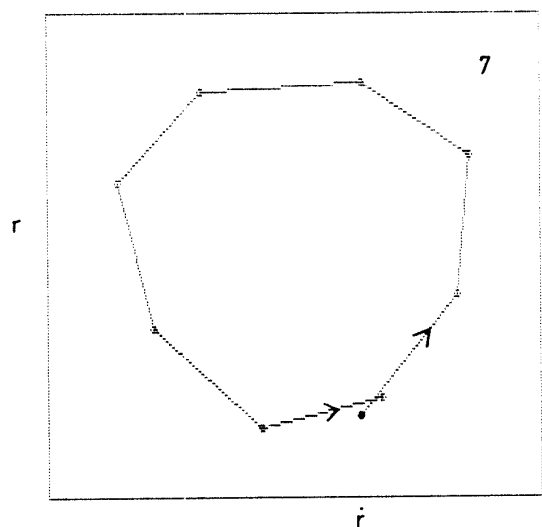


図8 図7の番号7の島の詳細図。点は・から出発し14月ごとに左回りに進む。

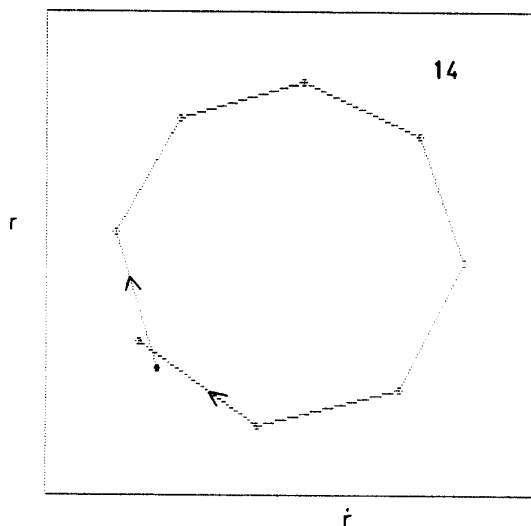


図9 図7の番号14の島の詳細図。点は・から出発し右回りに進む。

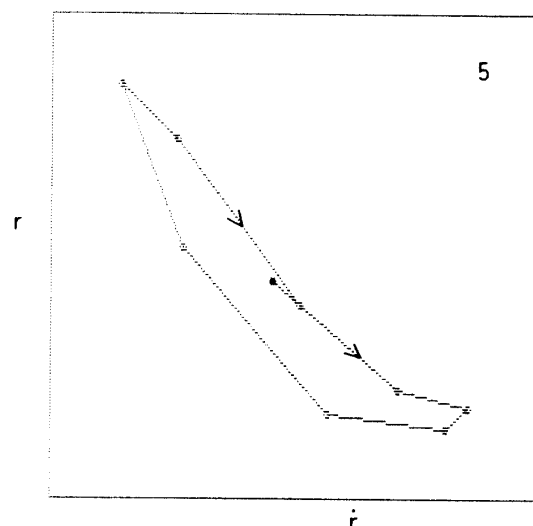


図10 図7の番号5の島の詳細図。細長く、反転に近い形をしている。

おり、その境界の $K = 5, 9$ では複雑な現れ方をしている。 $K = 5$ を図10に示す。この場所で島はいわば裏返しになるといえよう。このような様相は円制限では三次元でも現れなかったもので、地球軌道の円軌道からのずれに起因すると考えられる。離心率を現在のものの2倍にした場合について同様の計算を行なったが、結果は同様で、 $K = 5, 9$ で島の反転が起こった。ただ島の大きさはほぼ2倍になった。

代表点は島の中をほぼ周期8で回っているから、全体では112月の周期を持つ。前報では、円制限の場合のポアンカレ断面における代表点の移動を次のような写像で再現できることを示した。

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi/m \cdot \rho_n$$

$$\rho_{n+1} = (2 - \epsilon)\rho_n - \rho_{n-1} + \epsilon$$

だ円制限に対しては上記のような反転があるため、そのままでは適用できないが、 $K = 6, 7, 8$ の島が反転せずに他の K に延長されると仮定し、代表点の現れる順序の等しくなる ϵ の値を求めると、 $\epsilon = 0.00332$ となる。ここに $m = 14$ である。この写像の振動周期は近似的に $2\pi/\sqrt{\epsilon}$ で与えられ、上記の ϵ に対しては109.0となり、112に近い値となる。また $K = 7$ の場合を例にとると、代表点は大きなサークルを一周する間に島をほぼ $9/8$ 回転し、従って逆に島を一周するには $112/9$ 月を要することになる。精度を上げるとこの値は12.407となり、一年の中に含まれる月数 $365.25/29.4395$ に等しくなる。ここに29.4395は周期14の場合の T_1 である。すなわち代表点は大きなサークルを周期 T_1 で回り、一つの島の中は周期一年で回っていることになる。なお上記の写像では $K = 14$ のような代表点の右回りの順序は再現できなかった。以上から $K = 7$ が基本的で、 $K = 14$ の方が反転したものとする。また三次元・だ円制限では z 方向の運動による効果の方が大きく、このような反転は見られなかった。一つの島の中での $8/3$ 回転の方向はすべて左回りであった。

3. ま と め

だ円制限三体計算を月の運動に対して行なった。塑望月(T_1) の変化がよく再現された。 T_1 はかなり顕著な変化を示すが、これは満月から満月へという特別な周期を見ているからであり、 $\theta = 0$ のポアンカレ断面では T_1 の変化は弱いものであることが分かった。

$T_1=14$ 個の場合について $r-\dot{r}$ 位相空間における $\theta = 0$ のポアンカレ断面を調べた。14個の島から構成される点は円制限の場合と同じであるが、代表点が右回りに現れる島と左回りに現れる島とがあり、その中間では島が裏返しになると考えられた。代表点の移動には地球の公転周期(一年)が弱いながら見出された。

参 考 文 献

- 1) 井本正介：福井工業大学研究紀要第25号（1995）275-281.
- 2) 井本正介：福井工業大学研究紀要第26号（1996）277-283.

（平成8年10月25日受理）