福井工業大学研究紀要 第29号 1999

三角法について

雪 本 義 人*

On Trigonometry

Yoshito Yukimoto

This note is based on a lecture which the author delivered in June, 1998 at Fukui University of Technology. In the lecture, plane and spherical trigonometry were introduced and approached by a modern method. The beauty and the utility of spherical trigonometry were stressed. The subjects are known since the classic era and I talked of nothing newly discovered. But spherical trigonometry and the history of trigonometry are seldom included in school curriculums of these days. Therefore it is worthwhile to record the lecture in a paper of Memoirs of FUT.

この論文は 1998 年 6 月の福井工業大学の教養講座での著者による講義に基づいている．講義では平面三角法と球面三角法の紹介とアプローチが近代的な方法でなされた．球面三角法が美しいことと役に立つことを強調した．題材が古典古代から知られていることであるから，なにも新しい知見について述べることはなかった．しかし球面三角法や三角法の歴史は今日の学校のカリキュラムに含まれることは殆どないので，講義を研究紀要論文として記録にとどめる．

1 三角関数の話

1.1 トレミーの定理

三角法の祖はヒッパルコス(Hipparchos, 前 2 世紀頃)であり，彼は初めて三角関数の表を作ったとされる[6]．ヒッパルコスは後述するトレミーの定理を既に知っていたともいわれる[3]．

次の定理はトレミー(Ptolemy, 2 世紀頃)の定理と言われ，この定理によってトレミーは三角関数の加法定理を得ていたと推定されている．

定理 1.1 四角形が円に内接するならば，その四角形の対辺の積の和は対角線の積に等しい．

この定理の巧妙な証明が例えば[4]にある．定理であるからして円に内接するすべての四角形について成り立つのだが，ここではある特殊な条件の下で証明しよう．

* 電気工学科

定理 1.2 (定理 1.1 の特殊化). 四角形が円に内接し一つの対角線がその円の直径であるならば，その四角形の対辺の積の和は対角線の積に等しい.

証明. 四角形を ABCD とし，AC が直径であるとする(第1図). 辺 AB,BC,CD,DA の長さをそれぞれ p,q,r,s と記す. 直径の長さが 1 の場合に証明すれば十分である.

対角線の交点を E とし BE の長さを x とする. 三角形 AED と BEC が相似であることから AE の長さは sx/q である. 三角形 AEB と DEC が相似であることから CE の長さは rx/p である. ゆえに $\frac{sx}{q}+\frac{rx}{p}=1$. これを x について解くと

$$x=\frac{pq}{ps+qr}.$$

DE の長さを y とし，x と同様にして y を求めると

$$y=\frac{rs}{ps+qr}.$$

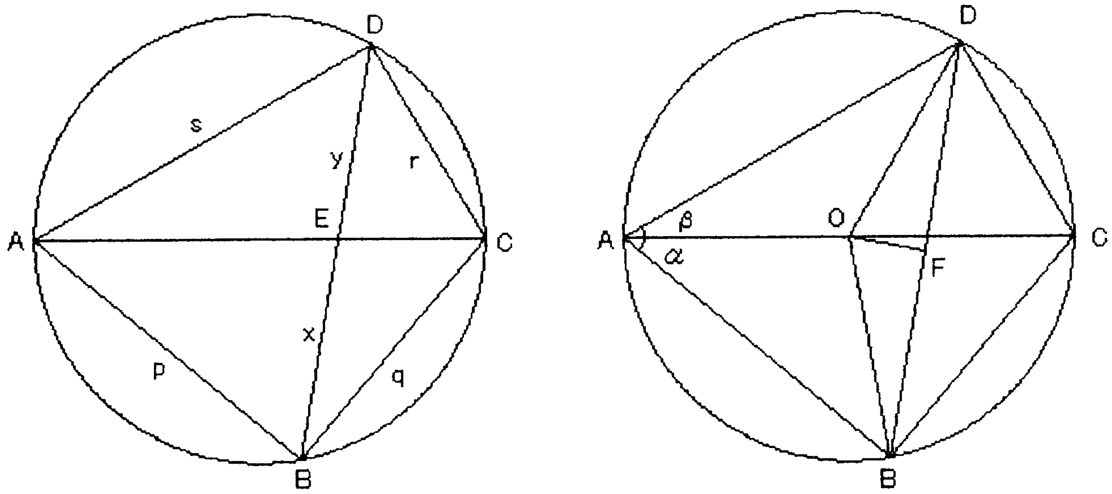
さて $pr + qs = 1(x + y)$を証明するために $pr + qs$ と $ps + qr$ の積を計算する：

$(pr + qs)(ps + qr) = p^2rs + pqr^2 + pqs^2 + q^2rs = pq(r^2+s^2) + (p^2+q^2)rs = pq + rs$,

ただし最後の所で三角形 ACD,ACB が斜辺の長さ 1 の直角三角形であることを使った.
この式から直ちに

$$pr+qs=\frac{pq+rs}{ps+qr}=x+y$$

が従う.



第1図　　第2図

1.2 正弦関数の加法定理

上記の定理 1.2 から次のようにして正弦関数の加法定理が得られる(トレミーの方法との異同は不明).

四角形 ABCD，それが内接する円の直径，および p,q,r,s は定理 1.2 の証明と同様とする. 角 BAC を α，角 DAC を β とすると(第2図)，三角形 BAC,DAC は AC を斜辺とする

直角三角形であって AC の長さが 1 であるから $p=\cos\alpha$, $q=\sin\alpha$, $r=\sin\beta$, $s=\cos\beta$ であり，前定理の証明の計算によって BD の長さは $pr+qs=\cos\alpha\ \sin\beta\ +\sin\alpha\ \cos\beta$ である.

一方四角形 ABCD が内接する円の中心を O，対角線 BD の中点を F とすると，タレスの定理(円周角の定理)から $\angle BOD = 2(\alpha+\beta)$であり，また三角形 BOD が二等辺三角形であることから $\angle BOD = 2(\angle BOF)$，ゆえに $\angle BOF = \alpha+\beta$ である．さらに BOF は斜辺の長さが $\frac{1}{2}$ の直角三角形だから BF の長さは $\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$，したがって BD の長さは $\sin(\alpha+\beta)$ である.

つまり

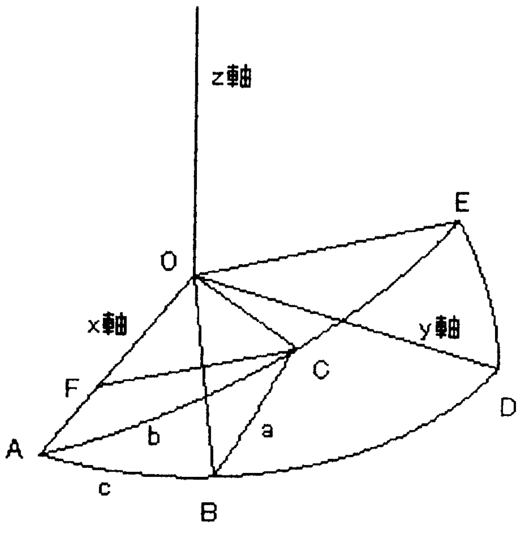
$$\cos\alpha\ \sin\beta\ +\sin\alpha\ \cos\beta\ =\sin(\alpha+\beta)$$

が得られた.

2 球面三角法

2.1 球面三角法の余弦定理

中心 O 半径 1 の球上の球面三角形を ABC とする．直線 OA を x 軸，平面 OAB 上で点 O を通り x 軸に直交する直線を y 軸，点 O を通り x 軸および y 軸に直交する直線を z 軸として座標を設定する(第 3 図).



第3図

球面三角形の辺 BC,CA,AB の長さをそれぞれ a,b,c と記す．これはちょうど角 BOC,COA,AOC の大きさである．点 A,B の座標はそれぞれ (1, 0, 0),(cos c, sin c, 0) である．点 C から x 軸へ下ろした垂線の足を F とすると線分 OF の長さは cos b であり，線分 CF の長さは sin b である．直線 CF と xy 平面のなす角が A であるから，点 C の座標は (cos b, sin b cos A, sin b sin A) である．(角 A は第 3 図での弧 DE の長さに等しい.) 一方，ベクトル $\mathbf{B}=\overrightarrow{OB}$ と $\mathbf{C}=\overrightarrow{OC}$ の長さは 1 であり，その内積は $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=|\mathbf{B}||\mathbf{C}|\cos a=\cos a$

であるから

$$(1) \qquad \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a$$

である．この関係を球面三角法の余弦定理という．

(1)に相当する式がアルバッターニ(al Battani 9～10 世紀)の著書に記されているそうである[2].

角 x が小さいとき，$\cos x$ は $1-\frac{x^2}{2}$ で近似でき $\sin x$ は x で近似できる． 式 (1) において b,c が球の半径に比べて小さいとき，この近似式を代入した式

$$(1-\frac{b^2}{2})(1-\frac{c^2}{2}) + bc \cos A = 1-\frac{a^2}{2}$$

から

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A - \frac{1}{2}b^2c^2 = a^2 .$$

さらに４次の項 $-\frac{1}{2}b^2c^2$ を無視すると，平面三角法の余弦定理の式

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2$$

を得る．

3 球面三角形の双対性

3.1 球面三角形

ここでは球面上の大円の弧を単に弧と言うことにする．

球面上の３つの弧 AB,BC,CA のなす図形を球面三角形 ABC といい，点 A,B,C をその頂点，弧 AB,BC,CA をその辺という．

今から中心 O 半径 1 の定球面 S 上の球面三角形について考える．

3.2 極三角形

球面 S 上で大円に垂直な直径の両端をその大円の極という．球面三角形 ABC の辺 AB を含む大円の極のうち C に近い方を C' と記す．位置ベクトル $\mathbf{A}=\overrightarrow{OA}, \mathbf{B}=\overrightarrow{OB}, \mathbf{C}=\overrightarrow{OC}, \mathbf{C}'=\overrightarrow{OC'}$ を用いて言い換えると，C'は

$$(1) \qquad \mathbf{C}' = \mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \cdot \mathbf{C})\frac{1}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

によって決まる点である(スカラー積“・”やベクトル積“×”については例えば[5]を参照のこと)．同様に辺 BC を含む大円の極のうち A に近い方を A'，辺 CA を含む大円の極のうち B に近い方を B' と記す．位置ベクトル $\mathbf{A}'=\overrightarrow{OA'}, \mathbf{B}'=\overrightarrow{OB'}$ についても同様に

$$(2) \qquad \mathbf{A}' = \mathrm{sgn}((\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \cdot \mathbf{A})\frac{1}{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|}\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

$$(3) \qquad \mathbf{B}' = \mathrm{sgn}((\mathbf{C}\times\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B})\frac{1}{|\mathbf{C}\times\mathbf{A}|}\mathbf{C}\times\mathbf{A}$$

が成り立つ．ここで３つのスカラー三重積$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$, $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}$, $(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$ が等しい事に注意しよう．

球面三角形 A'B'C'を球面三角形 ABC の極三角形という．

定理 3.1 球面三角形 ABC は球面三角形 A'B'C'の極三角形である．

証明． 極三角形 A'B'C'の頂点 B'の極を B"とし，B"の位置ベクトルを $\mathbf{B}''=\overrightarrow{OB''}$とすると，

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{B}'' = \mathrm{sgn}((\mathbf{C}'\times\mathbf{A}')\cdot\mathbf{B}')\frac{1}{|\mathbf{C}'\times\mathbf{A}'|}\mathbf{C}'\times\mathbf{A}'.$$

ここで

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = ((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}$$

に注意すると，$\mathbf{C}'\times\mathbf{A}'$の正規化（方向と向きを保ちながら長さを１に調節したもの）

$$\frac{1}{|\mathbf{C}'\times\mathbf{A}'|}\mathbf{C}'\times\mathbf{A}' = \frac{1}{|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

は $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ が正ならば $\mathbf{B}$ と同じ向きであり，負ならば $\mathbf{B}$ と逆の向きである．$\mathbf{B}$ の長さは１であるから

$$\text{(5)} \qquad \frac{1}{|\mathbf{C}'\times\mathbf{A}'|}\mathbf{C}'\times\mathbf{A}' = \mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}.$$

また

$$([\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}])\cdot[\mathbf{C}\times\mathbf{A}] = ((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})^2$$

だから

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}((\mathbf{C}'\times\mathbf{A}')\cdot\mathbf{B}') \\
&= \mathrm{sgn}(([\mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})\frac{1}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\times[\mathrm{sgn}((\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A})\frac{1}{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|}\mathbf{B}\times\mathbf{C}]) \\
&\quad \cdot[\mathrm{sgn}((\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B})\frac{1}{|\mathbf{C}\times\mathbf{A}|}\mathbf{C}\times\mathbf{A}]) \\
&= \mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})^3\mathrm{sgn}(([\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}])\cdot[\mathbf{C}\times\mathbf{A}]) \\
&= \mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})^5 = \mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

つまり

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{sgn}((\mathbf{C}'\times\mathbf{A}')\cdot\mathbf{B}') = \mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})$$

である．式(4)の右辺を(5),(6)によって $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ に関する式として表すと

$$\mathbf{B}'' = \mathrm{sgn}((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})^2\,\mathbf{B} = \mathbf{B}$$

および B" = B が得られる．

同様に極三角形 A'B'C'の頂点 A'の極が A であり C'の極が C である．

3.3 辺と角の関係

球面 S 上に２点 X,Y があるとき，弧度法による角 XOY の大きさは定義により弧 XY

の長さと一致する．したがって S 上の球面三角形 ABC の辺 BC,CA,AB の長さはそれぞれ角 BOC,COA,AOB の大きさに等しい．

球面 S 上の２つの弧 AB,AC について，平面 OAB と OAC とのなす角を弧 AB,AC のなす角という．

ABC を球面三角形，A'B'C'をその極三角形とし，極三角形 A'B'C'における頂点 A'の対辺の長さを a'とする．弧 AB と弧 B'C'の交点を D 弧 AC と弧 B'C'の交点を E とすれば，A が弧 B'C'の極であるから，角 BAC の大きさは弧 DE の長さと等しい．点 B'が大円 AE の極であるから弧 B'E の長さは$\frac{\pi}{2}$，点 C'が大円 AD の極であるから弧 C'D の長さは$\frac{\pi}{2}$である．弧 B'E と C'D の重なっている部分が DE だから，

$$a' = \text{弧 B'E の長さ} + \text{弧 C'D の長さ} - \text{弧 DE の長さ}$$

である．角 BAC の大きさを A と略記すると，上の式から

$$a' = \pi - A.$$

同様に極三角形における頂点 B',C'の対辺の長さをそれぞれ b',c'とするとき，

$$b' = \pi - B, \quad c' = \pi - C$$

である．

また ABC が A'B'C'の極三角形であることから

$$a = \pi - A', \quad b = \pi - B', \quad c = \pi - C'$$

も得られる．

3.4 応用

球面三角形 ABC に関する余弦定理

$$(7) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

（ただし a,b,c はそれぞれ弧 BC,CA,AB の長さ）

に前節末尾の関係式を代入することによって，

$$(8) \qquad \cos A' = -\cos B' \cos C' + \sin B' \sin C' \cos a'$$

を得る．(a,b,c を無限に小さくしたときの(7)の極限が平面三角法の余弦定理に相当することについては“2.1 球面三角法の余弦定理”を参照ください．) a'が小さいとき cos a'は 1 に近い．式(7)の中の cos a'を 1 で置き換えたもの

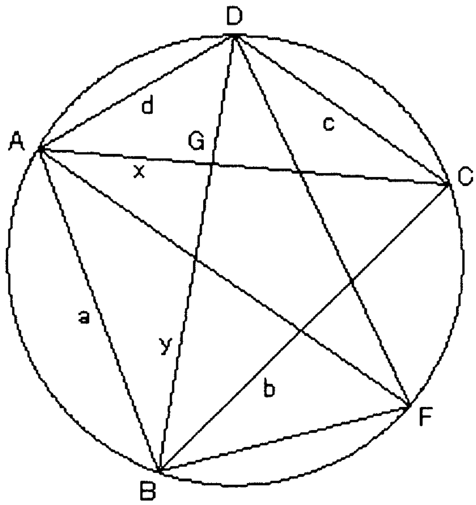
$$\cos A' = -\cos B' \cos C' + \sin B' \sin C'$$

は，A'B'C'を平面三角形としたときの三角関数の加法定理に他ならない（$A' = \pi - B' - C'$ だから）．

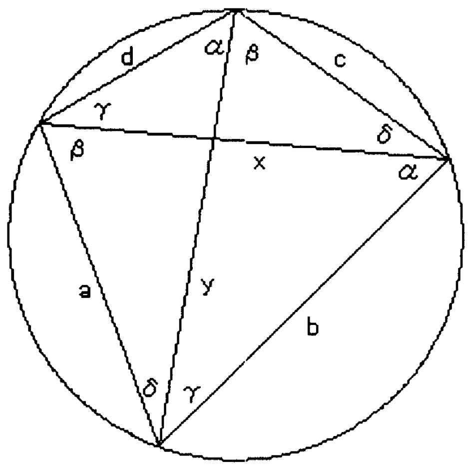
かくして平面三角法の余弦定理と三角関数の加法定理に相当するものは球面三角法において双対的な関係にあることが判った．

補遺

定理 1.1(トレミーの定理)は, 大方の本([4]など)では, 第4図における対角線 BD 上に∠BAE =∠CAD であるような補助点 E をとることから証明を始めている. この点 E のとり方が技巧的過ぎるように思えて, 講義では定理 1.1 の証明を略した. ところが以下のようにすると比較的自然に証明できることに後になって気づいたのでここに記す. 下の証明に出てくる直線 AF と BD の交点が E に一致する.



第4図



第5図

定理 1.1 の証明. 円に内接する四角形を ABCD とし, 線分 AB,BC,CD,DA,AC,BD の長さをそれぞれ a,b,c,d,x,y とおく(第4図). 弦 BD の垂直二等分線に関して C と対称な点を F とし∠ABF = θ とおくと,

線分 BF の長さ= c
線分 DF の長さ= d
∠ADF = π −∠ABF

であるから,

四角形 ABCD の面積
= 四角形 ABFD の面積
= 三角形 ABF の面積 + 三角形 ADF の面積

$$=\frac{1}{2}\,ac\,\sin(\angle ABF)+\frac{1}{2}\,bd\,\sin(\angle ADF)$$

$$=\frac{1}{2}\,ac\,\sin\theta+\frac{1}{2}\,bd\,\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\,ac\,\sin\theta+\frac{1}{2}\,bd\,\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\,(ac+bd)\,\sin\theta\,.$$

直線AC,BDの交点をGとすると,

$$\angle AGD = \angle ABD + \angle BAC = \angle ABD + \angle BDC = \angle ABD + \angle DBF = \angle ABF$$

であるから

$$\begin{aligned}&\text{四角形 ABCD の面積}\\ &= \frac{1}{2}xy\sin(\angle AGD)\\ &= \frac{1}{2}xy\sin\theta.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}(ac+bd)\sin\theta = \frac{1}{2}xy\sin\theta,$$

$$ac+bd=xy$$

である.

補遺の補遺

下村昇教授(電気工学科)からトレミーの定理の別の証明を教えていただきました. こちらの方がすっきりしているようなので併載いたします.

定理 1.1 の証明(下村). 第5図(前頁)のように長さを a,b,c,d,x,y とし, 角をα, β, γ, δと表す. 同じ文字で表された角が等しいことは円周角の定理による. 余弦定理によって

$$(1)\quad a = x\cos\beta + b\cos(\gamma+\delta).$$

角$\alpha+\beta$の補角が$\gamma+\delta$であることに注意すると, 再び余弦定理によって

$$(2)\quad d = x\cos\gamma - c\cos(\gamma+\delta).$$

(1)と(2)から $\cos(\gamma+\delta)$ を消去すると

$$(3)\quad ac+bd = x(c\cos\beta + b\cos\gamma).$$

一方, これも余弦定理によって

$$c\cos\beta + b\cos\gamma = y$$

であるから, (3)は

$$ac+bd=xy$$

となる.

参考文献

[1] 黒須康之介：三角法入門, 岩波書店(1955)
[2] 武隈良一：数学史, 培風館(1959)
[3] 小杉肇：数学史（幾何と空間）, 槙書店(1974)
[4] 清宮俊雄：万有百科大事典「トレミーの定理」の項, 小学館(1976)
[5] 寺田文行：新線形代数, サイエンス社(1981)
[6] W. S. Anglin and J. Lambek: The Heritage of Thales, Springer-Verlag(1995)

（平成10年10月21日受理）