学校数学における問題解決と数学的能力との関係について

三　塚　正　臣*

On the Relations between Problem Solving and Mathematical Abilities in School Mathematics

Naomi MITSUTSUKA

It is important for student to obtain mathematical thinking and mathematical ability. They should reconstruct a new content by paying attention to the conditions. They should also find another solution by changing uiewpoints, look for a new method of solving the problem, or cnnect the grasped conditions with known facts on the basis of their ability of problem solving and mathematical thinking systematically. Therefore, this paper is trying to investigate the relations between structure and mathematical abilities of problem solving.

1．はじめに

学校教育においては，問題を解決するには，数学的能力が大いにかかわっている。問題解決においては，どのような数学的能力によって問題が解決されるかその構造を解明する必要がある。数学的能力の構造をとらえるために，はじめにその数学的能力を心理学的に属性的構造から一般的属性と数学的感覚の属性から追究する。問題を解決しようとするときには，問題解決力が機能し，思考操作や既知の内容と結びつき，総合的な活動を通して解決に必要な数学的アイデアがみい出され条件と条件とを関連づけて考えることにより，その間の相互の関係がとらえられる。数学的課題の解決過程における知的活動は，課題に関する情報の受けとりの過程，受けとった情報を加工する過程にわかれ，それらの過程における数学的能力の特質を明らかにし，さらに，問題解決と数学的能力との関係を論じた。この結果，問題解決は，数学的能力が単独あるいは，複合して働らき，数学的な考え方や問題解決における一般的ストラテジーと相まって機能し問題が解決される。数学的能力のうち，とくに，「独創性の能力」「論理性・柔軟性の能力」「思考の中心転換能力」「推理における思考の可逆性の能力」等は重要な数学的能力である。

2．数学の特性について

数学は厳密な論理によって組みたてられ構成されている学問である。現代の数学は公理系の理

*教養部

論体系として組みたてられている。しかして，D.Hilbert は，「数学とは，すべての科学的思惟一般の対象となりうるもの，つまり，理念的存在のすべてを対象とし，これらに公理的方法を可能ならしめるものとしている。その上，公理的方法という特徴において，数学は，科学一般における一つの指導的役割を賦与されている」と述べている。Cantor は「数学はその発展において全く自由であり，それを制約するものは次の自明な配慮だけである。即ち，数学の概念は自己の中に矛盾を含まないこと並びに，それは前につくられ，現に存在し確実と認められている概念と定義によって厳密に整理された関係を保つことである」と述べている。Hilbert はこれより厳密に述べているといえる。Bourbaki は，Hilbert の「理念的存在」に迫るために「抽象的存在」として，数学的体系を指摘した。また，いくつかの公理をみたす数学的体系は同じ「数学的構造」をもつと述べている。さきの「理念的存在」とは「数学的構造」のことであり，これが数学の対象であると考えた。したがって，現代の数学は，「構造主義的数学」とよぶことができる。数学の体系の特質は抽象的な存在で次のような特性をもっている。即ち，具体性，真実性，直観とそれにもとづく洞察，依存関係，蓋然的関係，論理性，抽象性，一般性，発展性，自由性，創造性，統合性等である。Bloom は「認知心理学」の立場から学校数学を内容的次元と行動的次元とにわけ，さらに後者を認知的領域と情意的領域に分類して，それぞれの能力を高めることを目標とした。行動次元は，理解・能力・態度に大別し，理解次元においては，数学的知識，数学的役割，論理性，能力次元においては，学習能力，応用能力，思考能力，態度次元として，学習意識，数学を創り出す態度に分類した。

さらに，Freudenthal は実用的目標と思弁的目標とに分類し，思弁的目標は，創造的な自由な人間形成，数学的モデルの構成で自然科学等の諸科学との連携で数学自身が新しい理論を創造していくことを目標としている。いずれにしても，「数学を創り出していく思考ならびに数学的活動のすべてを通して，総合的に直観的に得られたもの」として数学的な考えの重要性を指摘している。さらに，Freudenthal は，「数学的創造力は数学教育の中核をなす」と述べ，最も重要なものとして創造的思考力をあげている。

現代の数学は，公理系の理論体系として組みたてられている。通常公理系は豊富な理論体系の出発点となるもので，定理の連鎖としての理論体系が構築される。定理が構想されるということは，深い推論と思索の結果生まれたもので，段階的に有限段階の論理過程を経て数学的体系が定まる。定理は次々に知られた事実をもとにして構想され，すぐれた構想にいたる場合もある。この構想をたてる段階においては，定理の証明において数学的アイデアがどのように発展して，次の構想をたてることに，どのように関連しているか，相互の関係をとらえる能力が必要である。Hilbert は，「数学的対象の実体は，公理系によって構築され，その公理系をみたすシステムを数学の言語や数学的記号によって抽象化し，論理的に構築し，考察するところにある」といっている。数学は公理から出発し，有限段階の論理過程を経て，互いに矛盾することのない公理系をみたすシステムの数学的体系で定まる。この論理構造を調べていくことによって，妥当な推論の方法を知るとともに論理過程において，命題の系列がどのように関連しあい結合しているか，また，

定理と定理との間の相互関係や定理の証明の方法の相互関係を追究することによって，公理系をみたすシステムにおいて，どのような推論の連鎖になっているかをとらえる。このような解明によって，数学の各系の論理構造とともに，各系の定理の成立過程の特徴や定理の内容の構造を把握し，定理の立場や背景，価値が追究される。さらに，定理の構造をさぐり，その解決の構造は，関連している問題の解決の構造とどのように関連しているか，もとの問題の解決の方法やアイデアがどのように結びつき発展しているかをさぐる。このようにして，もとの定理の発展的内容がとらえられる。したがって，これらの定理のもつ課題性や価値ならびに証明の方法の独自性あるいは関連性発展性も明らかになり，数学の構造が明らかになってくる。数学学習の目的は，数学の知的内容だけでなく，数学的能力や問題解決能力を身につけさせることである。定理の成立過程を分析してみると，その過程においては，内容の分析と相まって数学的能力が機能していることがわかる。

3．数学的能力の構造について

(1) 数学的能力の属性について

数学的能力を心理学的形成として解明するには，数学的能力の属性的構造を分析し属性の構造の構成要素を分離抽出しなければならない。どんな課題の解決も課題に関する初期的データ，出発的情報の受けとりからはじまる。受けとりにさいしては，出発的データを選択し，その意味と全面的にそのデータとの関係をとらえ，データの構造を考察する。このことは受けとめたデータを加工し，変形することを意味する。この段階は，「知的な環」とよばれる。これらの知覚的構成要素，知的構成要素，記憶的構成要素は，数学的課題の解決過程において，互いに結合され，相互に浸透しあう。これらの環の機能的な境界と相互独立の実体をとらえなければならない。知的な環は情報といわれ，「知的感覚器官に対する周囲の道筋の直接的作用あるいは間接的な道筋によって得られる外界に関するあらゆる「データ」を情報とよんでいる。また，情報とは「何らかの形で固定化された知識である」といわれている。数学的課題の解決過程における知的活動は基本的段階として第一には，課題に関する情報の受けとりの段階で，課題の条件についての第一次位置づけ，課題の意味づけ，課題の内容の解釈，第二には課題解決を求めることを目的とする情報加工の段階である。第三には課題に関する情報の保存の段階，第四には情報の加工の修正の段階である。このような段階を経て知的活動がなされ，問題が解決される。

数学における結果を獲得する場合の心理学的属性は２つの属性群に分離され，一般的属性と数学的感覚の属性に類別される。一般的属性は，人格的属性からとらえ，明確な目的志向性，集中性，強固な意志的特性があげられる。さらに，数学への集中的興味，数学への熱中，数学的知識への志向，独特な数学への愛着等があげられる。さらに，数学的感覚の特性としては，「一般化の能力」つまり「種々の現象の中に一般的なものをとらえる能力」「多種多様な現象や内容を関連づける能力」「問題の本質をとらえる能力」「特殊なものから一般的なものを考える能力」であり，このような資質は，抽象化する能力，推理能力，非本質的な細部を捨象する能力へと結びつく。

さらに，思考の論理性，与えられた条件から論理的に構造としてとらえ，結論を見出す能力，簡潔さ，正確さ，考えの明確さ等である。さらに，「数学的なアイデアに富んだ最もスマートな解決の方法を探る能力」「数学的想像の能力」「一つの解決の方法から他の解決の方法へと速やかに転換する能力」「推理の連鎖の中間的段階から急速に，内容の本質をとらえ，問題の内奥に侵出する能力」「組合せの能力」「推理の多くの環をとばして思考を圧縮短縮する能力」「もとの定理の証明のアイデアや方法を想起し，発展的な定理の証明の発想に結びつける能力」「これらの定理の証明の方法がどのように相互に関係しているかをとらえる能力」「可逆的に考える能力」などがある。これらの数学的能力が単独にあるいは複合されて働らき機能する。以上数学的能力を一般的属性と数学的感覚の属性から考察した。

問題解決においては課題に関する情報を受けとめこれを加工する過程が重要である。課題に関する情報の受けとりの過程，受けとめた情報をどのように加工するか加工過程について追究する。

(2) 課題に関する情報の受けとりにおける数学的能力の特質について

問題を解決するには，課題の条件，内容をどのように受けとめるかによって加工過程も異なる。問題の受けとめにみられる数学的能力は，問題のかなめになっている本質的なことをとらえ，非本質的なことを捨象し，総合的な意味づけの性格をもっている。課題を知覚し，条件をさまざまな要素に分析する分析能力，これらの条件の内容を解釈し，意味づける解釈能力，問題の内容を構造的にとらえ，構造の中の様々な要素を分離し，その要素を体系化し，数学的な関係にある諸特徴をとらえる能力，本質的な相互の依存関係をとらえる能力が必要である。このように，個別的な要素だけでなく依存関係にある相互に関連しあっている数学的な諸要素を有意味な構造としてとらえる数学的能力が必要である。数学的能力が高いときには，課題条件から解決に最大限に役立つ情報をひき出すことができる。問題解決のさいには，知覚的属性を捨象し，具体的な事実から一般的なものを見出す能力が必要である。また，一般的な形で，構造的な諸関係を把握する主体的な能力が数学的思考の特質であるといわれている。したがって，第一に複合された条件の中で個別的に諸要素を全体の中の要素として位置づけとらえる。第二に関連しあっている全体的構造を組成するものとしてこれらの諸要素をとらえ，同時に，この構造における諸要素の役割をとらえる。このようにして，全体的な分化された像をつくり，数学的な素材を分析し総合的に具体的に意味づけをし，問題の本質を洞察する。

(3) 情報加工の過程における数学的能力の特質について

課題を解決するには，課題の構造の一般的特質を把握し，条件を分析し，条件に関連している既知の知識を結合する。それには，多様な情報の中から関連する情報を選択し，条件と結合させ，この結果を部分的結論として内容を再構成する。さらに，観点を変更し新しく観点を設定して思考する。これらの思考過程においては，多種多様なデータを関連づけて組みあわせて新しい内容に再構成する。さらに，本質的なことに目をむけて既知の内容を想起し，新しい方法を見出す。

データを解釈したり，内容を焦点化し，再構成された内容と内容との間の相互関係を連鎖として論理的にとらえる[1]。これらは重要な数学的能力である。課題が複雑になると推理は漸進的に拡張される。同型の課題を解決していくなかでは，類推能力が働らく。また，解決過程が漸進的な過程では，初期の段階では，課題は拡げられた過程を媒介として解決されるが，後期の段階では短縮された過程を媒介として解決される。圧縮された思考構造は，論理的に表現された構造であり，単に推理の環が圧縮されたものではなく，明確に論理的に基礎づけられた推理の環が圧縮されたものである、これは完全な論理構造にまで圧縮された構造をひろげたものである。圧縮された推理においては，必須の環が欠除しているのではなく，短縮された基底には完全に正しい論証をともなった正しく分割された論理的な推論である[2]。このときには，推理の中間の環は脱落し，課題の内容の理解と特定の思考行動の体系の遂行との間の独特な直接的連合が形成される。

思考過程においては，ある知的操作から別の知的操作へと新しい観点を設定し，新しい思考行動へと変換することが重要である。このときには思考活動が急激に再編成され，はじめに考えた思考過程の拘束された状態から脱却し，自由に思考するようになる。解決にさいしては，視野のせまい固定的な考えによっては問題を解決することはできない。自由に考えることによって，とらえられなかった観点を見出すことができるようになり，内容と内容との間の相互の関係をとらえることができる。自由な考え（open thinking）とはある一面の見方という固定的な閉鎖的な態度を排除して，はじめに考えたことに固執せず，どのような結果になるのかという結果にこだわらず問わないという広い開いた考えによって推論する。このように自由に考えていくならば，次々と示唆が与えられ，解決が方向づけられる。つまり，自由に考えるとは open（開いた）でなければならない。自由に考える（open thinking）とは，問題場面に当面したとき，自分が考えたことに固執せず，閉鎖的な態度を排除し，考えた視点についてだけでなく，視点を変えて考える。また当面直接役に立たないと思われる思考内容や不十分かも知れない内容や一見とるにたらない内容について否定せず，自由に考えることである。このように自由に考えていくことによって考えを進めていくならば，次々とアイデアが示唆され，新しい内容を考えることができ，内容と内容との間の相互関係がとらえられる。このようにして，未知の結果を発見することができ，このことがもとになって次の結果を生み出す示唆を与えることが多い。このことによって，多様な考えができるようになる。自由に考えることは思考の柔軟性との関係が深い。メンデンスカヤは思考の柔軟性を分析し，その一つは思考行動の合目的な変形で，条件の変化に対応する知識をもつこと，習熟した知識体系の再構成の容易さ，ある知的操作から他の知的操作への転換の容易さと述べている。

問題解決過程において重要な数学的能力の一つは多様に考える能力である。多様に考えるとは解決にさいして種々の観点を設け，観点を変えていく通りもの解決の方法を考えることである。多様に考え種々の考えが得られたとしても，それらの考え方はそれぞれ無関係な別個の考えのようにとらえている。しかし，多様な考え方には，相互に関係があると考えられる。はじめの考えを振り返ってみたときに，設定した観点を見直していくならば，その思考過程において思考の異

なった観点を見出すことができる。その思考の観点は独立したものではない。その思考過程において，本質的な部分の思考の観点を変更することによって，新しく見出した観点によって考えていくならば，新しいアイデアが生み出され，新しい考えが得られる。さらにこのようにして，最も明解で，スマートなアイデアに富んだ考えが見出される。

解決の探索においては，思考の方法を多様化し，ある知的操作から別の知的操作へと転換する。思考の柔軟性は解決へのアプローチにおける多様な観点の設定，固定的な解決の方法からの拘束的影響の自由，再構成の容易さとなってあらわれる。さらに数学的な推理における思考過程の可逆性の能力も重要な数学的能力の一つである。可逆性とは思考過程において考えの順の過程を逆から考える。いわゆる Back ward の考えといわれている。条件を分析しそのあとで可逆的に結論の成立条件を考える。双方向型思考で，推理過程において思考過程の可逆性つまり出発データに向かう逆向きの考えと同一の環，同一の結合連鎖を逆向きに考える思考で，中間の環は互いに異なってよい。

4．問題解決と数学的能力との関係について

問題解決のねらいは，問題解決の能力を身につけるとともに，問題解決の過程をとおして，数学的な考えを身につけることである。問題解決においては，解決の障害をなんとか乗りこえようとして，その問題事態を解決しようとするときに数学的な探究活動がなされなければならない。このような探究的な数学的活動過程において数学的能力が機能する。問題解決能力の一つは与えられた問題場面において，どのように知識が働らくかを判断する能力であり，総合的な数学的活動をとおして，問題解決において，どのように条件を受けとめ，受けとめた条件をどのように加工するか加工過程において機能する能力である[3]。

問題解決においては，多様な思考行動が働らく。どのように思考活動がなされるか明らかにしなければならない。問題解決における思考を追究してみると，問題の条件の受けとめにおいては，問題の条件がどのような内容であるか問題の条件を分析し問題のかなめとなる本質的なことをとらえ，また必要なデータを選び，不必要なデータを捨象することである。問題を解決しようとするときには，問題解決能力が働らき，思考操作や既知の内容と結びつき，総合的な活動を通して解決に必要な数学的アイデアが働らき，条件と条件とを関連づけて考えることにより，その間の相互の関係がとらえられる。

受けとめた条件の加工過程では，数学的能力が単独あるいは複合されて機能し，問題の内容を再構成し，再構成された内容と内容との相互関係を連続的な連鎖としてとらえていくことによって解決の構造が明確になる。即ち，条件の加工過程では，条件に関連している既知の知識を条件と結びつけたり，多様な情報やデータを関連づけ，どのように関係しているかをとらえる能力，さらに質的に異なる観点を設定し，観点を変更して多様に思考する数学的能力が必要である。また，複雑な問題においては，単純化した類似の問題あるいは，複雑な問題の解決の方法を保存しながらその解決の構造と同型な解決の構造をもつ単純化した問題と結びつけ，その解決の構造を

とらえながら，それをもとにして複雑な問題の解決の方法をとらえる。これらの能力も重要な数学的能力の一つである。これらの思考過程においては，焦点化の能力，あるいはデータを解釈する能力，分析した内容と既知の内容とを結びつけ，再構成する能力，さらに再構成された内容と内容との間の相互関係を連鎖として連続的にとらえる能力は数学的能力と考えられ，これらの数学的能力が単独あるいは複合されて有機的に機能し問題が解決される。この思考過程においては数学的な考え方や一般的ストラテジーが用いられ，解決の構造が一層明らかになる。

思考活動は，問題の困難性に直面してそのおかれた緊張を解除しようと行動を開始するがこのような緊張解除にたいする手段の発見が思考活動の機能に他ならない。課題に対して緊張解除の視点において漸次に分析し，その目的達成に対して本質的側面がみえたとき，実際的な行動が触発され，条件の構造分析，情報の収集，選択，情報の結合によって構成された内容と内容との間にどのような関係が成立するか連鎖としてとらえる。この思考活動の過程において中心をなすのは，本質的な関係の把握であり，判断である。再構成された内容と内容との間にある共通性，類似性，独自性をさぐり，関係が把握される。思考過程においては，思考がある方向にむけられた課題解決が障害にであったとき，そこに思考の転換がおこり，思考の方向が転換される[4)]。思考の転換によって新しい観点が設定されて思考が促進される。思考の中心は判断でありとくに，分析的判断と総合的判断がなされる。判断は根拠にもとづいて論理的でなければならない。思考過程においては部分的結論が得られることが多く，部分的結論の連鎖となって肯定判断がなされる。したがって部分的結論は肯定判断で，部分的結論が部分的結論を生じ，その連鎖によって結論が導かれる[5)]。本質的構造をもとにして部分的に考えるならば，部分的洞察がなされる。即ち本質的構造をもとにして一つの新しい視点を設定し，新しい側面から新しい方向を考えるならば，それをもとにして因果的連関として，部分的洞察がなされる。このような部分的洞察によって新しく構造分析をおこなうことによって総合的判断がなされ，全体的洞察がなされる。つまり学校数学における問題解決は本質的構造を分析的にとらえ，部分的に洞察し，部分的結論を見出し，部分的結論の連鎖として総合的に判断がなされることによって全体的洞察がとらえられ，問題が解決される。このような部分的洞察，全体的洞察も重要な数学的能力である。

5．おわりに

学校数学における問題解決と数学的能力との関係について追究した。数学的能力は多岐にわたっている。問題の内容の構造と有機的にかかわりあっており，問題の内容をどのように受けとめ，それらをどのように加工するかその過程において数学的能力がどのように機能するかによって思考が促進され，解決の方向が見出される。数学的能力の構造をとらえるために，はじめにその属性をさぐり，問題解決の過程において数学的能力の特質を明らかにした。さらに，問題解決においては数学的能力，数学的な考え，一般的ストラテジーが問題の内容と結びついて有機的に機能することによって解決の構造が明らかになる。数学的能力のうち，とくに「独創性の能力」「論理性，柔軟性の能力」「推理における思考の可逆性の能力」「組みあわせの能力」「再構成の能

力」「思考の中心転換能力」「選択能力」「推理の圧縮短縮の能力」「思考の多様性の能力」等の数学的能力は重要である。さらにこれらのことを含めて解明すべき問題点もあるが今後の研究に俟つとする。

参　考　文　献

1）三塚正臣；学校数学における問題解決の構造について
全沢大学教育学部教科教育研究第22号 1986 P.P.36－37
2）クルチェッキー；数学的能力の構造 P.P.124－125
3）三塚正臣；学校数学における問題解決のストラテジーの分析について
福井工業大学研究紀要第21号 1991 P.P.212－215
4）Schoenfeld；He vistics in the classroom.
National council of Teachers of Mathematics 1980 P.P.9－10
5）三塚正臣；学校数学における問題解決の思考行動について
福井工業大学研究紀要第22号 1992 P.P.276－277

（平成4年10月29日受理）