

## 円筒容器内の偏心渦の逆行運動

赤澤 孝\*

# The Retrogressive movement of eccentric vortex in the Column Vessel

Takashi Akazawa

*Our experiment found that the center of an eccentric vortex retrogrades and move nutationally when modeled using an eccentric vortex of water in the column vessel. This paper reports that this retrogressive movement is established and caused by the propagation of only one wave. This result is in line with the findings of previous experiments.*

*Keywords: eccentric vortex, retrogressive movement*

### 1 はじめに

松岡と赤澤は「円筒容器内の水の偏心渦の挙動Ⅰ」<sup>1)</sup>で、円筒状容器に水を満たし、スターラーの回転プロペラが容器中心軸より少し離れた位置で水深中程に来るようにセットし、水に回転を与えた後、プロペラを抜き取り偏心渦を作った場合、この渦の中心の動きを水面の上方から観察すると、水面での偏心渦の中心及び位相が、水に与えた回転の向きとは逆向きに容器中心軸の周りにハイポトロコイド的軌跡を描きながら逆行し、また容器側面から観察すると、渦中心は弾性的に伸縮しながら、シャクトリ虫的に運動する事実を報告した。そしてこの運動を偏心渦の逆行運動と名付けた。

次に、松岡と赤澤は「円筒容器内の水の偏心渦の挙動Ⅱ」<sup>2)</sup>で、有限容器内の剛体回転流体中で擾乱としての偏心渦のモデルを考えることにより、偏心渦の位相の逆行運動、渦中心の運動のハイポトロコイド的軌跡が存在しうることを理論的に示した。このとき、仮定した擾乱の波数が0, 1の場合のみ議論し、その2つを線形結合した擾乱がハイポトロコイド的軌跡を描いて逆行することを示した。

---

\* 教養 赤澤 孝

赤澤は「円筒容器内の水の偏心渦の挙動Ⅲ」<sup>3)</sup>で剛体モデルの結論は実験と定性的に一致することを示し、固有値  $i = 0, 1$  に属する固有振動が偏心渦の逆行に本質的なものであることを実験的に示した。

論文Ⅱで示した、固有値  $i = 0, 1$  に属する振動は、それぞれ鉛直上下振動と、 $\theta$  方向の波数 1 の波を表している。論文Ⅲより、水面での渦の様子は容器一周の間に 1 個の凹凸のみが存在しているから、波数 1 の擾乱までを考慮すればよいと判断出来るが、固有値が 2 以上の擾乱も存在しているはずである。本報告では剛体モデルでの  $i = 1$  の場合の逆行が発生するときの条件、 $i$  が 2 以上の場合の位相角速度の数値解を具体的に求め、逆行運動が生じる範囲を理論的に示す<sup>4)</sup>。

## 2 有限円筒容器内の剛体回転流体中の偏心渦のモデルに対する基本方程式と擾乱方程式及び境界条件、及びその解

流体は均質非圧縮性、非粘性とすると、円筒座標系で表した運動方程式、連続方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{①}$$

となる。但し、 $z$  軸は鉛直上向きにとり、 $v_r, v_\theta, v_z$  はそれぞれ  $r, \theta, z$  方向の速度、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $g$  は重力の加速度を表す。

半径  $a$ 、高さ  $h$  の円筒容器内に満たされて、容器中心軸の回りに剛体回転をする流体に小擾乱が重なったものとし、容器中心軸上の底の高さを原点に取る。境界条件は

$$\left. \begin{aligned} r=a \quad \text{で} \quad v_r &= 0 \\ z=0, h \quad \text{で} \quad v_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{②}$$

とする。

偏心渦の逆行、渦中心の振動を定常基本流  $V(r)$  及び基本圧力場  $P(r, z)$  からの擾乱による現象と考え、次のようにおく。但し、' のついた項が擾乱である。

$$\begin{aligned}
 v_r &= v'_r \\
 v_\theta &= V + v'_\theta \\
 v_z &= v'_z \\
 p &= P + p', \quad \frac{1}{\rho} P = \int \frac{V^2}{r} dr - \int g dz + \text{const}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

③の最後の式は基本場の運動方程式及び連続方程式

$$\begin{aligned}
 -\frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\
 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\
 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

による。③式を①式に代入し、④式を考慮すると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v'_r}{\partial t} + v'_r \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \theta} - \frac{2Vv'_\theta}{r} - \frac{v'^2_\theta}{r} + \frac{v'_\theta}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \theta} + v'_z \frac{\partial v'_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} \\
 \frac{\partial v'_\theta}{\partial t} + v'_r \frac{\partial V}{\partial r} + v'_r \frac{\partial v'_\theta}{\partial r} + \frac{V}{r} v'_r + \frac{v'_\theta v'_r}{r} + \frac{V}{r} \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} + \frac{v'_\theta}{r} \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} + v'_z \frac{\partial v'_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \\
 \frac{\partial v'_z}{\partial t} + v'_r \frac{\partial v'_z}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial v'_z}{\partial \theta} + \frac{v'_\theta}{r} \frac{\partial v'_z}{\partial \theta} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} \\
 \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{v'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

となる。⑤式で2次の微量を無視すると、次の線形化された方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v'_r}{\partial t} - \frac{2Vv'_\theta}{r} + \frac{V}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} \\
 \frac{\partial v'_\theta}{\partial t} + v'_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{Vv'_r}{r} + \frac{V}{r} \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \\
 \frac{\partial v'_z}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial v'_z}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_r'}{\partial r} + \frac{v_r'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta'}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z'}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

ここで次のような型の擾乱を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} v_r' &= \sigma m z \sin(n_i t - i\theta) \\ v_\theta' &= \tau \cos m z \cos(n_i t - i\theta) \\ v_z' &= W \sin m z \sin(n_i t - i\theta) \\ \frac{1}{\rho} p' &= \phi \cos m z \cos(n_i t - i\theta) \end{aligned} \right\} (7)$$

但し、 $i$ は整数、 $\sigma$ 、 $\tau$ 、 $W$ 、 $\phi$ は $r$ の関数で $V$ 、 $P/\rho$ と比較して十分小さいものとする。また⑦式は、初期条件に代わるものとして、時間的な周期条件を仮定したことになる。

次に⑦式を⑥式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \left(n_i - i \frac{V}{r}\right) \sigma - 2 \frac{V}{r} \tau &= \frac{d\psi}{dr} \\ -\left(n_i - i \frac{V}{r}\right) \tau + \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr}\right) \sigma &= -i \frac{\psi}{r} \\ \left(n_i - i \frac{V}{r}\right) W &= m \phi \\ \frac{d\sigma}{dr} + \frac{\sigma}{r} + i \frac{\tau}{r} + m W &= 0 \end{aligned} \right\} (8)$$

となる。⑧式を $\phi$ 、 $\sigma$ 、 $\tau$ について解くと

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{m} \left(n_i - i \frac{V}{r}\right) W \\ \sigma &= \frac{1}{mD} \left(n_i - i \frac{V}{r}\right) \left\{ \left(n_i - i \frac{V}{r}\right) \frac{dW}{dr} - \frac{i}{r} \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr}\right) W \right\} \\ \tau &= \frac{1}{mD} \left[ \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr}\right) \left(n_i - i \frac{V}{r}\right) \frac{dW}{dr} + \frac{i}{r} \left\{ \frac{V^2}{r^2} - \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 - \left(n_i - i \frac{V}{r}\right)^2 \right\} W \right] \\ D &= \frac{2V}{r} \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr}\right) - \left(n_i - i \frac{V}{r}\right)^2 \end{aligned} \right\} (9)$$

となる。さて、ここで議論しているのは定常的に剛体回転するモデルであるから、その基本場は  $V = \omega r$  ( $\omega > 0$  とする) である。この  $V$  を⑨式に代入し、それを⑧式の最後の式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{i^2}{r^2} W + v_i^2 W &= 0 \\ v_i^2 &= m^2 \frac{4\omega^2 - (n_i - i\omega)^2}{(n_i - i\omega)^2} \quad n_i - i\omega \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{⑩}$$

なる  $W$  についての常微分方程式を得る。

⑩式を  $v_i^2 > 0$  の場合について解き、 $r \leq a$  で  $W$  は有限という条件を考慮すると

$$W = C_i J_i(v_i r) \quad \text{⑪}$$

となる。 $C_i$  は任意定数である。

⑪式を⑨式、⑦式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} v_r' &= \frac{(n_i - i\omega)}{m\{(2\omega)^2 - (n_i - i\omega)^2\}} \left[ (n_i - i\omega) \frac{d\{C_i J_i(v_i r)\}}{dr} - 2\omega \frac{i}{r} C_i J_i(v_i r) \right] \cos mz \cos(n_i t - i\theta) \\ v_\theta' &= \frac{1}{m\{(2\omega)^2 - (n_i - i\omega)^2\}} \left[ 2\omega(n_i - i\omega) \frac{d\{C_i J_i(v_i r)\}}{dr} - \frac{i}{r} (n_i - i\omega)^2 C_i J_i(v_i r) \right] \cos mz \cos(n_i t - i\theta) \\ v_z' &= C_i J_i(v_i r) \sin mz \sin(n_i t - i\theta) \end{aligned} \right\} \text{⑫}$$

を得る。また境界条件②式は

$$\left. \begin{aligned} r=a \quad \text{で} \quad v_r' &= 0 \\ z=0, h \quad \text{で} \quad v_z' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{⑬}$$

となるから、⑫式、⑬式より

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\pi}{h} j \quad j: \text{整数} \\ \frac{n_i - i\omega}{n_i + i\omega} v_i a &= i \frac{J_i(v_i a)}{J_{i-1}(v_i a)} \end{aligned} \right\} \text{⑭}$$

となる。故に境界条件を満足するモードは振動数方程式⑭を満足するものでなければ成らない。

### 3 擾乱の位相角速度

⑦式で仮定した擾乱の  $\theta$  方向の位相角速度は  $n_i$  である  $n_i$  は⑩式の

$$v_i^2 = m^2 \frac{4\omega^2 - (n_i - i\omega)^2}{(n_i - i\omega)^2}$$

より得られる。即ち

$$n_i = i\omega \pm \sqrt{\frac{4\omega^2}{1 + \left(\frac{v_i a}{m a}\right)^2}} \quad \text{⑮}$$

である。⑮式における  $v_i a$  は振動数方程式⑭を満足しなければならない。

⑮式より明らかなように、 $i \geq 2$  の場合はいかなる  $v_i a$  においても  $n_i > 0$  となることがわかる。即ち位相角速度が負になること、つまり逆行することはあり得ないことが分かる。位相角速度  $n_i$  が負になる場合は、 $i=1$  の場合だけである。円筒容器内水面での波数が 1 の場合の時だけである。これは剛体回転流体というとても簡単なモデルで行ったものであるが、実験事実も波数 1 の時だけ逆行運動が現れることと良く一致している。

### 4 振動数方程式の数値解

振動数方程式⑭式を⑮式を用いて変形すると

$$\frac{J_i(v_i a)}{J_{i-1}(v_i a)} = \frac{v_i a}{1 \pm i \sqrt{1 + \frac{(v_i a)^2}{(m a)^2}}} \quad \text{⑯}$$

を得る。

この方程式の数値解を  $j=1$ 、 $i=1,2,3,4,5,6$  の場合について  $v_i a \leq 4$  なる範囲で求めた結果が表 1 である。

$h/a$		i		1	2	3	4	5	6
		$v_i a$	$n_i$						
0.2	$v_i a$					2.356	2.706	3.031	3.281
	$n_i$					4.978 $\omega$	5.971 $\omega$	6.964 $\omega$	7.958 $\omega$
0.5	$v_i a$					1.022 $\omega$	2.029 $\omega$	3.036 $\omega$	4.042 $\omega$
	$n_i$								
	$n_i$								
1.0	$v_i a$								
	$n_i$								
	$n_i$								
1.5	$v_i a$								
	$n_i$								
	$n_i$								
2.0	$v_i a$								
	$n_i$								
	$n_i$								
5.0	$v_i a$								
	$n_i$								
	$n_i$								
10.0	$v_i a$								
	$n_i$								
	$n_i$								

表1 振動数方程式⑭の数値解

各 $v_i a$ に対応する位相角速度 $n_i$ をその下2段に示してある

表 1 より、 $n_i < 0$ なる解は $i = 1$ の場合にのみ現れ、しかも $\frac{h}{a}$ の値が小さいときによく現れることが分かった。即ち半径に比して水深の小さい容器ほど与えた回転に対する鮮明な逆行が現れるのである。また $i \geq 2$ では $n_i > 0$ なる解のみである。即ち順行のみで、その位相角速度も $i$ が増大するごとに大きくなることが分かる。このことは、容器内に 2 個以上の偏心渦を作った場合、剛体回転流体モデルは、偏心渦中心及び位相は必ず与えた回転の方向と同じ方向に回転することを示しており、我々の得た実験結果とも一致している。

### 5 剛体モデルの解と実験事実との比較

直径 29.2 cm、深さ 29 cm の円筒形ガラス容器に水を満たし、鉛直方向の流れも起こすプロペラをセットし、中心軸より離れた位置で回転を与え、プロペラを抜き取り、発生した偏心渦の運動を上面より観察する。

図 1 に偏心渦の渦中心が、円筒容器内の水に与えた回転流（一般流）に逆らって運動する渦中心の軌跡を示した。渦中心はハイポトロコイド的軌跡を描きながら逆行していくのである。ループを描いているところは、そこで渦中心が停滞しているところである。逆行の角速度として、渦中心が容器中心の周りを一周する時間を測定し、平均の角速度を求めた。

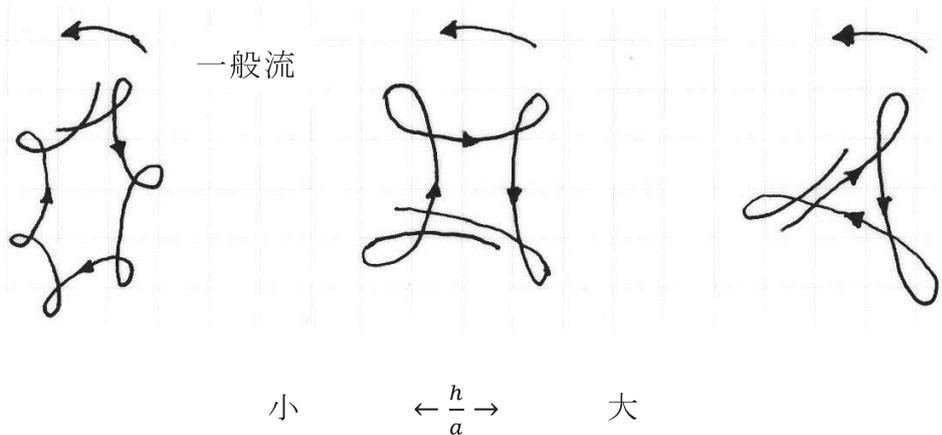


図 1 偏心渦の中心の逆行運動の軌跡と $\frac{h}{a}$ の関係

図2は逆行の位相角速度と、 $\frac{h}{a}$ の関係を示したものである。

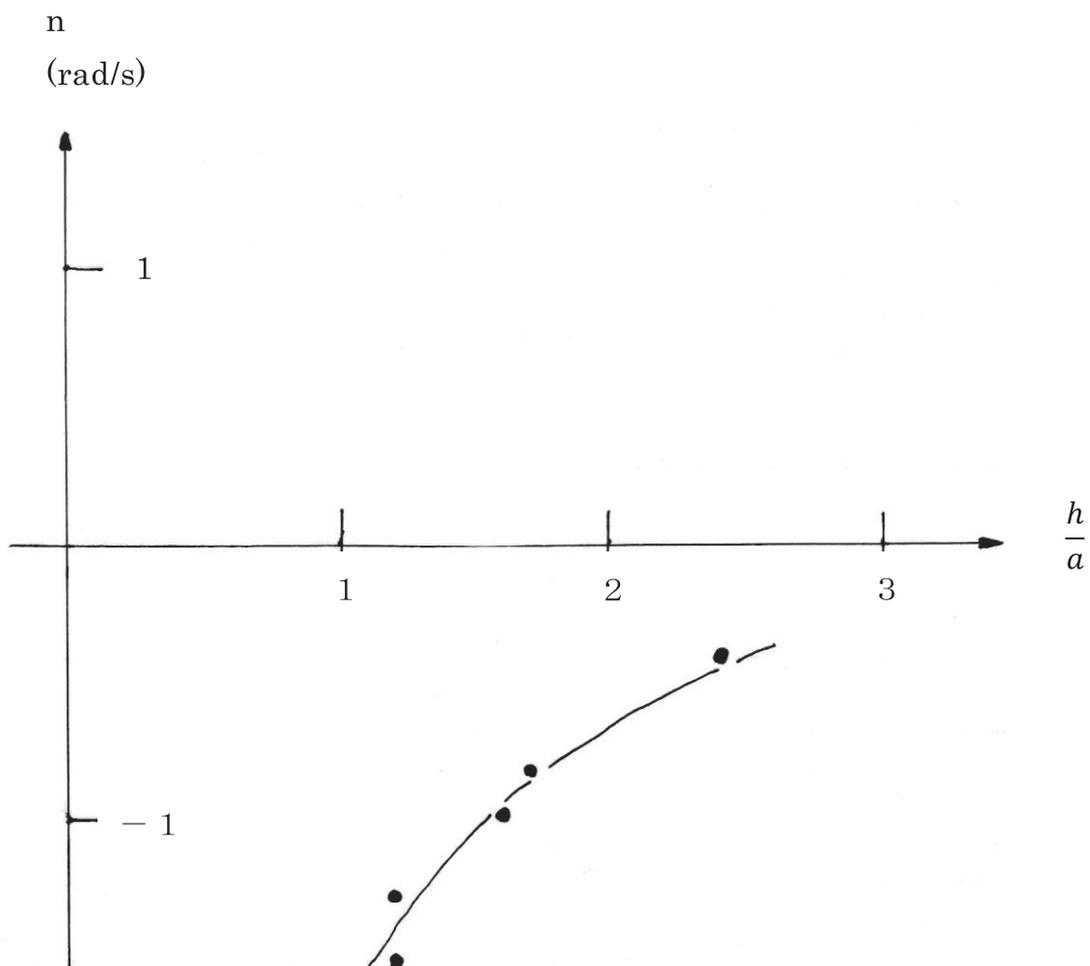


図2  $\frac{h}{a}$ と偏心渦中心の逆行の位相角速度  $n$  との関係

図2の示す実験結果は $\frac{h}{a}$ と逆行の位相角速度の関係は、剛体回転モデルの逆行の位相角速度と $\frac{h}{a}$ との関係と定性的に良く一致している。

円筒容器内で偏心渦を作った場合、その渦中心は与えた回転の向きとは逆向きに運動し、一見渦は一般流に流されるという流体力学上の常識を破る現象について、剛体回転流体を用いて偏心渦を擾乱とみなす本報告の方法は、この面白い物理現象を良く表していると考えられる。

文献

- 1) 松岡春樹・赤澤 孝 (1976) : 円筒容器内の水の偏心渦の挙動 (I) . 福井大学教育学部紀要第Ⅱ部 第26号, 1-26
- 2) 松岡春樹・赤澤 孝 (1981) : 円筒容器内の水の偏心渦の挙動 (Ⅱ) . 福井大学教育学部紀要第Ⅱ部 第30号, 15-57
- 3) 赤澤 孝 (1982) : 円筒容器内の水の偏心渦の挙動 (Ⅲ) . 福井県立敦賀高等学校研究集録 第18号 55-82
- 4) Lord Kelvin(1880):Vibrations of a columnar vortex. Phil.Mag., 10,155-168

(平成24年3月31日受理)