

von Mises の降伏条件に等価なすべりの条件について

原 洋 一

The Slip Criterion Equivalent to the Yield Condition by von Mises

Yoichi HARA

Yielding phenomena of a polycrystalline metal can be dealt with as generation of slips in a homogeneous and isotropic material, macroscopically ignoring the heterogeneity of crystals. From this point of view the stress criterion of generation of slip must be equivalent to the yield condition.

In this paper the criterion of slip, which is equivalent to the yield condition of shearing strain energy by von Mises, is derived from considerations on states of stresses on critical planes at the initiation of yield. The criteria is proved to be dependent on a newly defined "intermediate deviator stress" which is a deviation from the intermediate principal stress.

From this theory, subsequent yield surfaces after any initial yielding stress states are reasonably calculated.

1. 緒言

多結晶金属の降伏は巨視的に見て均質で等方性の物質中にすべりが発生する現象と考えることができる。このように考えた場合、すべり発生の力学的条件はいわゆる降伏条件と等価でなければならない。

最大せん断応力説と呼ばれるTrescaの降伏条件は、均質等方性の物質中に考えられる無数の面のうちのいずれかの面(すべり面)において、そこに働くせん断応力 τ がある臨界値 τ_0 に達した時に降伏するという条件から導かれたものである。したがってTrescaの降伏条件に等価なすべりの条件は

$$\tau = \tau_0 \quad (1)$$

で表される。このすべり条件を基に構築された塑性理論¹⁾はすべり理論と呼ばれている。

したがって、すべり理論は、従来、Trescaの降伏条件に対応する理論であるが、せん断ひずみエネルギー説と呼ばれるvon Misesの降伏条件に等価なすべりの条件が求められれば、Misesの降伏条件に対応する新しいすべり理論を構築することができる。

すべりの条件はすべり面に働く応力値にたいする条件であるが、すべり面に働く応力成分はすべり面に対して垂直方向の直応力 σ_n とすべり面に対して平行なせん断応力 τ とであるから、一般にすべりの条件は σ_n と τ のある関数 $\omega(\sigma_n, \tau)$ の値がある臨界値 ω_0 に到達するという事で表される筈である。すなわち

$$\omega(\sigma_n, \tau) = \omega_0 \quad (2)$$

この関数 $\omega(\sigma_n, \tau)$ および臨界値 ω_0 をMisesの降伏条件と矛盾しないように定めることが本論文の主たる目的である。

2. Von Misesの降伏条件に等価なすべり条件の誘導

2.1 2次元問題に対する考察

Misesの降伏条件はせん断ひずみエネルギーがある一定値に達したときに降伏するということから、3次元の座標軸方向の応力成分を用いて、一般に次式で表される。

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_0^2 \quad (3)$$

ただしは単軸降伏応力である。

(3)式で表される降伏条件を満足した状態においてすべり面上の応力成分 σ_n と τ の間に成立する関係がすべり条件であるが、これを求めるため、まず2次元問題を考えてみる。

2次元問題の応力状態は一般に σ_x 、 σ_y および τ_{xy} の3個の成分で表されるが、この3個の未知数に対する基礎式は、(3)式に対応する(σ_x 、 σ_y および τ_{xy} の3成分で書き表された)降伏条件と次式で表される応力の平衡条件式の合計3個の式である。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

この3元連立方程式は1つの2階偏微分方程式に帰着する。一般に2階偏微分方程式は双曲線型のとき2群の特性曲線を持つ。2次元問題における特性曲線は、物理的にはすべり面としての諸性質を備えており、すべり線と呼ばれていることは周知の通りである。そこでこの特性曲線によって表されるすべり面上の応力状態について以下に考察してみる。

まず平面塑性ひずみの場合には、z方向の塑性ひずみが零であることから

$$\sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \quad (5)$$

また2次元応力状態であることから

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (6)$$

(5)および(6)式を(3)式に代入することにより、平面塑性ひずみ状態に対する降伏条件は次

式となる。

$$3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 12\tau_{xy}^2 = 4\sigma_0^2 \quad (7)$$

(4)式と(7)式とから得られる2階偏微分方程式は双曲線型であって、その特性方程式は次式となる。

$$(\sigma_x - \sigma_y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\tau_{xy}\frac{dy}{dx} + (\sigma_y - \sigma_x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0 \quad (8)$$

(8)式によって定まる特性曲線すなわちすべり線はよく知られているとおり主応力方向を2等分する互いに直交する2群となり、このすべり線上の垂直応力 σ_n とせん断応力 τ は次式のようになる。

$$\sigma_n = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

(5)式を考慮して

$$= \sigma_z \quad (9)$$

$$\tau = \pm(1/2)\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

(7)式を考慮して

$$= \pm\sigma_0/\sqrt{3} \quad (10)$$

次に平面応力の場合について考える。この場合の応力状態は $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ によって表される。したがって(3)式の降伏条件は次式のようになる。

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (11)$$

平衡条件(4)式と降伏条件(11)式とから次のような τ_{xy} に関する2階偏微分方程式を得る。

$$(2\sigma_y - \sigma_x)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - 6\tau_{xy}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + (2\sigma_x - \sigma_y)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = f(\tau_{xy}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}) \quad (12)$$

(12)式は

$$9\tau_{xy}^2 - (2\sigma_y - \sigma_x)(2\sigma_x - \sigma_y) > 0 \quad (13)$$

の範囲で双曲線型であって、その特性方程式は次式となる。

$$(2\sigma_y - \sigma_x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\tau_{xy}\frac{dy}{dx} + (2\sigma_x - \sigma_y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0 \quad (14)$$

(14)式から定まるすべり線の勾配は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\tau_{xy} \pm \sqrt{9\tau_{xy}^2 - (2\sigma_y - \sigma_x)(2\sigma_x - \sigma_y)}}{2\sigma_y - \sigma_x} \quad (15)$$

簡単のために、 x - y 軸を応力の主軸に一致する方向に採る。 x 軸方向の主応力を σ_1 、 y 軸方向の主応力を σ_2 とすると、すべり線と x 軸とのなす角 ψ は、(15)式より

$$\tan \psi = \pm \sqrt{(2\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 - 2\sigma_2)} \quad (16)$$

(15)および(16)式の根号の中が負になったり、 ∞ になったりすることがないことは(13)式によって保証されている。

このすべり線方向の垂直応力 σ_n とせん断応力 τ は

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (1/2)(\sigma_1 + \sigma_2) - (1/2)(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\psi \\ &= (2/3)(\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}\quad (17.1)$$

$$\begin{aligned}\tau &= (1/2)(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\psi \\ &= \pm(1/3)\sqrt{(2\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - 2\sigma_2)}\end{aligned}\quad (17.2)$$

降伏条件(11)式は現在の座標系においては次式となる。

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad (18)$$

(17), (18)式から σ_1, σ_2 を消去すると、 σ_n, τ に関する次式を得る。

$$\sigma_n^2 + 4\tau^2 = (4/3)\sigma_0^2 \quad (19)$$

(19)式が平面応力の場合のすべり線上での垂直応力とせん断応力の間の関係、すなわちすべりの条件であるである。

2.2 一般の3軸応力状態におけるすべり条件

一般に降伏条件は等方応力（静水圧応力）の変化に対して不変であるから、すべりの条件も等方応力に対して不変でなければならない。したがって上に検討した平面応力の場合のすべりの条件は、 σ_h なる任意の等方応力を付加した、 $\sigma_1 + \sigma_h, \sigma_2 + \sigma_h, \sigma_h$ なる3主応力を持つ3軸応力状態におけるすべり条件を表していると言うことができる。ただしこの場合すべり線上の垂直応力も $\sigma_n + \sigma_h$ となっているから、(19)式の σ_n には垂直応力から等方応力を差し引いたものを用いなければならない。

逆に、任意の3軸応力状態におけるすべりの条件は、3つの主応力のうちの一つが零になるような偏差応力場を考え、そこで前項で求めた平面応力状態の場合の結論を適用すればよい。

いま3つの主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ のうち σ_3 を等方応力と考えた偏差応力場 $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3, 0$ をもって平面応力状態として、前項の結論を適用する場合、特性曲線が存在するための条件(13)式は次式のようになる。

$$\{2(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)\} \{2(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_2 - \sigma_3)\} < 0$$

これは

$$2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) > 0$$

と変形されるから、少なくとも次式が成立するときにはこの条件は満足される。（十分条件）

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$$

これは $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ または $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$ 、すなわち3つの主応力のうち σ_3 は大きさが中間の値をもったものであることを示している。

結局、中間の大きさの主応力を σ_{II} で表すと、一般の3軸応力状態におけるすべりの条件は、(19)式において σ_n の代わりに $(\sigma_n - \sigma_{II})$ を用いればよい。すなわち

$$(\sigma_n - \sigma_{II})^2 + 4\tau^2 = (4/3)\sigma_0^2 \quad (20)$$

が一般のすべり条件である。

(20)式は平面応力状態のすべり条件から導かれたが、平面塑性ひずみ状態のすべり条件も包含していることはすぐ分かる。すなわち平面塑性ひずみ状態の場合には(5)式より σ_z が中間主応力であり、したがって $\sigma_n - \sigma_{II} = \sigma_n - \sigma_z$ となり、これは(9)式により零である。故に平面塑性歪の場合のすべり条件(10)式は、一般のすべり条件(20)式に、特別の場合として含まれている。

3. 平面応力状態における降伏曲面の計算

すべりの条件が定まると、それを用いて逆に降伏条件を計算することができる。応力成分間の比を一定に保ったまま負荷を増加させるいわゆる比例負荷を考えた時、物質中の無数の面のうちのいずれかにおいて初めてすべりの条件を満足したときの応力値がその負荷方向の降伏応力を与える。比例負荷の方向を次々と変えていって求められた降伏応力値をつなぎ合わせると、いわゆる降伏曲面が得られる。

すべりはある面の上でその面に平行なある方向に起きるものであるから、すべりの条件はすべての面とその上のすべての方向について検討することが必要である。図1で面を表す単位法線ベクトル n とその面の上のすべり方向を表す単位ベクトル t の組み合わせ(これをすべり系と呼ぶ)は3つのパラメータ ϕ, α, β で表される。この3つのパラメータの組み合わせを、コンピュータにより $0 < \phi \leq \pi/2$, $0 < \alpha \leq 2\pi$, $0 < \beta \leq 2\pi$ の範囲でそれぞれ $\pi/40$ の間隔で変化させれば、 ϕ について $(\pi/2)/(\pi/40) = 20$ 通り、 α について $(2\pi)/(\pi/40) = 80$ 通り、 β について同じく80通りの合計(累乗)12万8千個のすべり系が得られる。

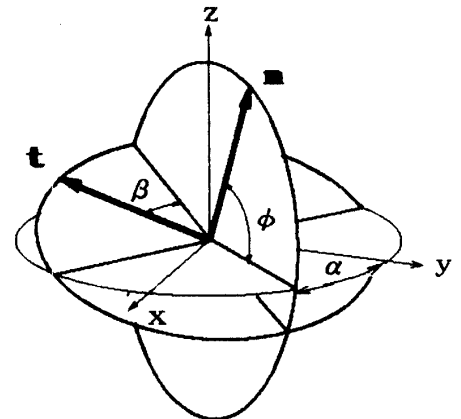


図1 すべり系

このすべてのすべり系に対して(1)式あるいは(2)式のすべり条件を満足するときの比例負荷の応力値を計算してその最小値を求めれば、これが最初にすべり条件を満足する応力値であるから、その比例負荷方向の降伏応力を与えることになる。

この方法によれば、初期の降伏曲面を求めるのと全く同じ手順で、無理な仮定を用いずに、予めある降伏応力以上の負荷を与えた後の降伏曲面を求めることができる。予負荷によって降伏応力を超過しているので無数のすべり系のうちのあるものにおいてはすべり条件式における臨界値((1)式における τ_0 , あるいは(20)式における σ_0)を超過した応力状態となっている。そのようなすべり系に対しては予負荷時の超過した値をもって新たな臨界値とみなし、その後の負荷においてはこの新たな限界値に到達するまではすべりを生じないと考える。予負荷時に初期の臨界値, τ_0 あるいは σ_0 ,を越えていないすべり系に対してはそのまま初期の臨界値が有効であると考ええる。このようにして一部のすべり面に対する臨界値を修正することによって、初期の降伏曲面を求めるときと全く同じアルゴリズムで、予負荷後の降伏曲面を計算することができる。

そのようにして求めた降伏曲面の平面応力状態におけるいくつかの例を以下に示す³⁾。

平面応力状態の場合、座標軸 x, y, z をそれぞれ三つの主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 (= 0)$ に一致するように取ると、Misesの降伏曲面は、(11)式において $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \tau_{xy} = 0$ とすることにより

$$\sigma_{12} - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_{22} = \sigma_0^2$$

で表される楕円となり、またTrescaの降伏曲面はこの楕円に内接する六角形となつて、この両者は図2のように表されることはよく知られている。ただし図2の両軸のスケールは σ_0 で基準化してある。

上述のアルゴリズムによりTrescaのすべり条件(1)式を用いて計算した降伏曲面およびMisesのすべり条件(20)式を用いて計算した降伏曲面は図2の楕円および六角形にそれぞれ一致することが確認された。同時に、すべり系を表すパラメータ ϕ, α, β をそれぞれ $\pi/40$ 間隔で変化させることによって、十分な精度の降伏曲面が得られることも確認された。

次に予負荷を与えた後の降伏曲面の例として $\sigma_{1P}/\sigma_0 = 1.3, \sigma_{2P}/\sigma_0 = 0$ および $\sigma_{1P}/\sigma_0 = 1.2, \sigma_{2P}/\sigma_0 = 1.2$ の二通りの予負荷を与えた後のTrescaの降伏曲面を図3および図4にそれぞれ示す。この場合、予負荷後の降伏曲面は予負荷を表す点から初期降伏曲面に接線を引いた形になっている。このことは解析的に証明することができる²⁾。

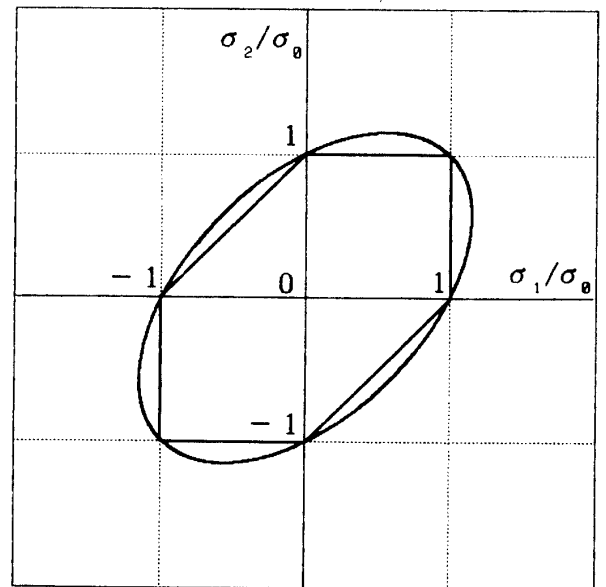


図2 TrescaおよびMisesの降伏曲面

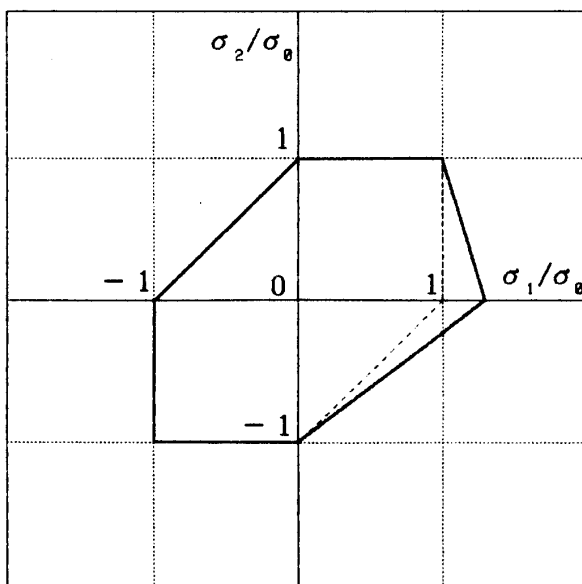


図3 予負荷後のTresca降伏曲面
($\sigma_{1P}/\sigma_0 = 1.3, \sigma_{2P}/\sigma_0 = 0$)

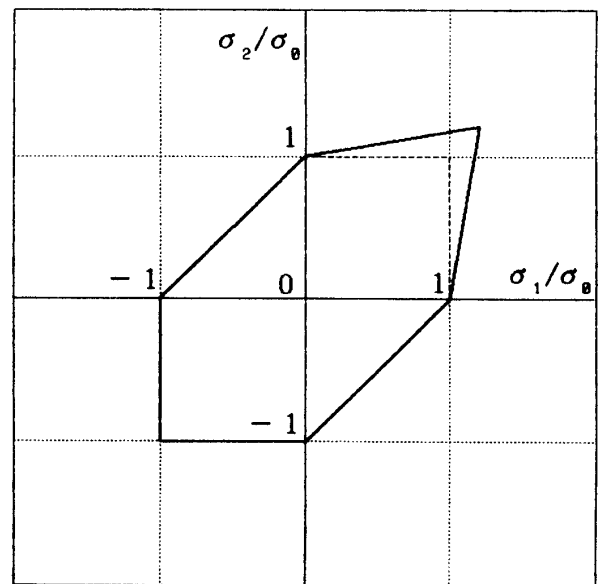


図4 予負荷後のTresca降伏曲面
($\sigma_{1P}/\sigma_0 = 1.2, \sigma_{2P}/\sigma_0 = 1.2$)

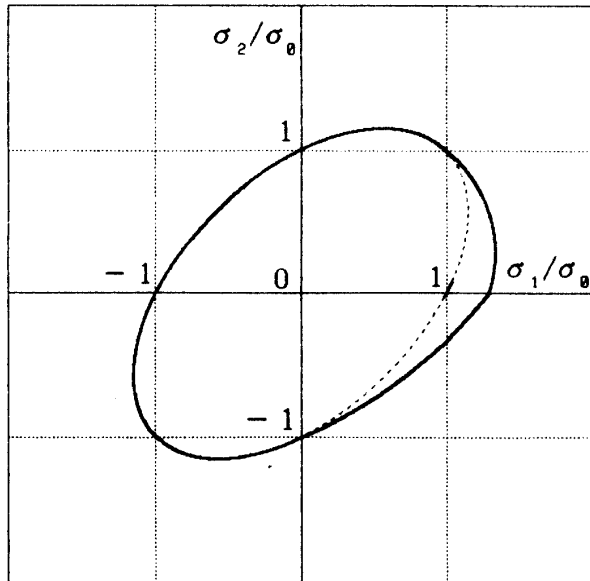


図5 予負荷後のMises降伏曲面

($\sigma_1^p/\sigma_0 = 1.3, \sigma_2^p/\sigma_0 = 0$)

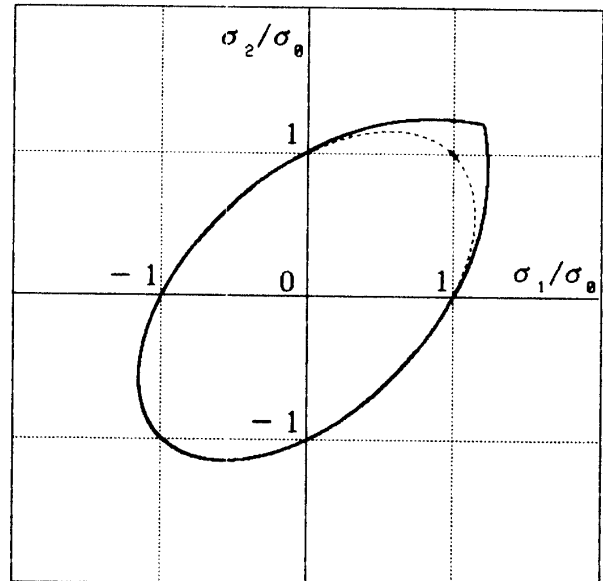


図6 予負荷後のMises降伏曲面

($\sigma_1^p/\sigma_0 = 1.2, \sigma_2^p/\sigma_0 = 1.2$)

Mises の降伏条件に対応するすべり条件を用いて、図3および図4と同様な予負荷を与えた後の降伏曲面を図5および図6に示した。図にみられるとおり、この場合には初期降伏曲面に対して予負荷点から直線的に接線を引いた形ではなく曲線でなめらかに接することがTrescaの場合と異なる特徴である。

4. 結言、今後の展開の方向

本論文ではまず Misesの降伏条件と等価なすべりの条件を、2次元問題における特性曲線上の応力条件を一般の3軸応力場に拡張することによって求め、次にこのすべりの条件を用いて平面応力状態における降伏曲面を計算を行った。予負荷のない初期状態における降伏曲面としてはよく知られている通りの楕円が得られ、本論文で得たすべりの条件が Misesの降伏条件に等価であることを示している。さらに2通り(単軸引張りと面内等方引張り)の予負荷を与えた後の降伏曲面の計算を行い、興味ある結果を得た。

実際に存在する多結晶金属材料の多くは初期降伏条件は Misesの条件に従うと見ることができ、本論文では均質で等方性の物質のすべりによって降伏条件を計算したところ初期の降伏条件についてはうまく説明することができた。このことは十分に小さくてランダムな方向性を持つ結晶の群からなる多結晶体は、巨視的な力学的条件としての降伏を考える場合には、均質な当方性の物質として扱うことができることを示している。

しかし予負荷後の降伏条件を求める場合には、一旦すべりを生じたすべり系におけるすべりの条件は履歴中の最大のもので置き換えられ、他のすべり系の影響は受けない(潜在硬化はない)という均質の物質としては一見合理的と思われる仮定を置いている。しかし降伏後の硬化についてのこの仮定は実験的な根拠に乏しい。予負荷による降伏後の降伏曲面については古くから様々な実験データがあつて一概に表現することが困難なほど多様である^{4) - 10)}。

初期の降伏については多結晶体を均質等方性の物質として扱うことができて、一旦降伏をした場合には有限の変形を生じるために結晶間の相互作用の影響が現れてもはや均質等方性体としての取扱いが成立しなくなるものと思われる。したがって本論文の今後の展開としては、すべりに対する力学的な条件だけでなく、変形にともなう幾何学的な条件も考慮して、今回求めた巨視的なすべり発生の条件と微視的な個々の結晶のすべりとの力学的および幾何学的な関係を明らかにすることが重要であろう。そのことはすなわち降伏点のみの問題ではなく、むしろ降伏後の応力と塑性変形の問題すなわち構成式の誘導へと向かうことになる。多結晶金属の塑性変形挙動については従来から数多くの研究がなされており¹¹⁾、いくつかの構成式も提案されているが¹²⁾、本論文で得られた巨視的なすべり条件を出発点とする視点から求める構成式と比較してどうなるかに興味がある。

参 考 文 献

- 1) S.B.Batdorf and B.Budiansky: A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip, NACA T.N. No.1871(1949)
- 2) 山田嘉昭: 塑性力学、日刊工業新聞社、1965、p.62
- 3) 柿原仁志、砂谷初、久国智、松村真澄: すべり理論による降伏曲面の計算、1991、
福井工業大学卒業研究
- 4) P.M.Naghdi, F.Essenbarg and W.Koff: An Experimental Study of Initial and Subsequent Yield Surfaces in Plasticity, J.App.Mech., Trans.ASME, vol.25(1958), p.201
- 5) A.Phillips and G.A.Gray: Experimental Investigation of Corners in the Yield Surface, J.Basic Eng., Trans.ASME, vol.83(1961), p.275
- 6) P.K.Bertsch and W.N.Findley: An Experimental Study of Subsequent Yield Surfaces - Corners, Normality, Baushinger and Allied Effects, Proc. 4th U.S.Nat.Cong.App.Mech., vol.2(1962), p.893
- 7) B.Paul, W.Chen and L.Lee: An Experimental Study of Plastic Flow Under Stepwise Increments of Tension and Torsion, Proc. 4th U.S.Nat.Cong.App.Mech., vol.2(1962), p.1031
- 8) J.Parker and M.B.Basset: Plastic Stress-Strain Relationships - Some Experiments to Derive a Subsequent Yield Surface, J.App.Mech., Trans.ASME, vol.31(1964), p.676
- 9) P.S.Theocaris and C.R.Hazell: Experimental Investigation of Subsequent Yield Surfaces Using the Moire Method, J.Mech.Phys.Solids, vol.13(1965), p.281
- 10) 白鳥英亮、池上皓三、他: 前に与えた塑性変形が、その後の降伏条件におよぼす影響について、機論(第1部)、33-245(s.42)p.1546、34-261(s.43)p.850、34-266(s.43)p.1683
- 11) 阿部武治、結晶塑性解析の発展、材料、28-305(S54.2)p.87
- 12) 徳田正孝、大野信忠、J.Kratochvil: 結晶塑性論に基づく多結晶金属材料の統一非弾性構成方程式の一提案、機論(A)、52-475(S61.3),p.758

(平成2年12月13日 受理)