数学教育における練習問題の構成原理とその方法

宮　本　一　郎

The Principle and its Method of Constructing Exercises in Mathematical Education

Ichiro MIYAMOTO

Although various books or dictionaries about the excercises for mathematics are published nowadays, many teachers often hesitate which to select the suitable problem for the purpose of exercise or the evaluation of students. This is due to the lack of analysis of solution of problem and to the inadequate selection or arrangement of exercises. This paper deals with how to construct the series of exercises, considering the fundamental conditions for the construction, with some concrete examples.

ま え が き

現今，数学に関するテキスト，演習書や問題集または解法辞典など数多くのものが出版されているが，いざ学生に練習させたり，あるいは学力評価のための適当な問題を選ぶとなると，いろいろ苦労することは多くの教師の体験するところである。これは多くの書物において問題の選択と配列が著書の勘や好みによってなされ，問題の解法に関する分析が十分なされていないことに起因すると考えられる。これを能率化することをねがって，本論文は練習問題の構成のための要件を基礎的に考察し，その構成の方法について具体例を添えて論述する。

1．数学教育における練習問題の位置

数学教育の目標は詳細にはいろいろあるが，その主要なものは論理的思考能力と数学内容の適用能力の育成にあるといえよう。そして前者は後者に依存して達成されるので，まず数学内容の理解がその基礎であると考えられる。ここで「理解」というのは，単に概念的にわかるだけでなく，いろいろの側面からその実体をつかむところまで要求される。これが十分でないと適用能力は期待できない。また数学的概念や記号は一般常識にくらべてなじみにくいので，何回も反復してこれに慣れることが必要である。数学教育において「練習問題」はこれらの要請にこたえるもので，大きく二つの機能をもつ。

(1)　教授内容の消化，理解を助け，基礎的な適用能力をもたせる。

(2)　特定の技能に習熟させ，これを身につけさせる。

一般に学校数学における「問題」は次のように分けて考えることができる。

$\begin{cases} \text{単純問：一つの学習内容に焦点をしぼった問題} \\ \text{複合問：いくつかの内容を組み合わせた問題} \\ \text{応用問：洞察力，推理力など応用力を必要とする問題} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{1次問：基礎的事項を理解していれば解ける程度の問題} \\ \text{2次問：1次問の結果を利用しないと解きにくい問題} \\ \text{高次問：2次問の結果をさらに利用して解く問題を3次問，さらに4次問…} \end{cases}$

たとえば不定積分の問題について示せば，

$$\int \frac{2}{x^2+4}dx\ \text{（単純問）},\quad \int \frac{2}{x^4-1}dx\ \text{（複合問）},\quad \int \frac{4x}{x^4+4}dx\ \text{（応用問）}$$

$$\int \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx\ \text{（1次問）},\quad \int \frac{3x^3}{(x^3+1)^2}dx\ \text{（2次問）}$$

一般に「演習問題」といわれるものは，これらすべてを含むが，本論文で取扱う「練習問題」は高度なものを避けた基礎的なもので，1次問，単純問，複合問を主とし，これにごく簡単な応用問を添えたものに止めることとする。数学教育においてこの部分が重要な役割をなすからである。

2．練習問題構成の要件

練習問題を構成するのに基礎となる事項について考察する。

(1) 問題の内容と形式

ある一つの学習内容（単元）をいろいろの側面からとらえるため問題に変化をもたせる。

① 類型変更

同種の問題のあり得る型を分析し，これをいろいろに変えて問題を構成する。

たとえば，有理関数の部分分数分解は次のような型分けが考えられる。分母の因数の形により，

$\begin{cases} \text{a：1次因数}\quad x-\alpha \\ \text{b：2次因数}\quad x^2+px+q \end{cases}$　　A：重複度をもつ1次因数 $(x-\alpha)^n$

　　　　　　　　　　　　B：重複度をもつ2次因数 $(x^2+px+q)^n$

$[p^2-4q<0]$　　　　　　$[p^2-4q<0]$

のように表わすこととすると，その組合せによりａA，ａｂ，ａB，Ａｂ，ｂB，ABなどの型ができる。

たとえば，

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}\qquad \text{はａB型である。}$$

ただしこれらの型の間に教育的に差別する必要のないものは適宜合併してよい。

またこれは問題の内容によるばかりでなく，解答の段階において生じるいろいろのcaseについても検討することが望ましい。

たとえば，部分積分の計算

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx \qquad \left[G(x) = \int g(x)\,dx\right]$$

において $f'(x)$，$G(x)$ の計算の対象となる関数がそれぞれ，整関数，有理関数，三角関数，指数関数，対数関数などのいずれであるか，その計算の難易度，またその結果が比較的簡単なものになるか，複雑な形になるか，などのきめの細かい類型化も考えられる。

② 場面変更

定理・公式の適用場面や関数の種類などを変えることにより，認識を深めてその適用能力を身につけさせることが望ましい。アメリカのテキストなどはこの種の問題が豊富に盛られているが，わが国では一般にこの点が乏しいように思われる。（小・中学校まではよいが，高校・大学レベルではこの配慮が不十分である。）たとえば微分法の応用として最大最小問題は重要なポイントであるから，通常よくある直方体，直円柱の体積や表面積のような図形的な問題ばかりでなく，日常の身近な問題や物理学，工学に関する問題（ただし，ごく簡単なものに限る）などを入れてもっと視野を広めるとよいと思われる。

例1．部屋数100のホテルがあって，料金は1泊5,000円である。200円値上げするたびに空き部屋が1つずつ増すという。1泊いくらにすると収入が最大となるか[8]。

例2．てこの一端を支点とし，そこからaの距離にかかる重量Wを上げるために，他端に力Fを必要とする。てこの目方を単位長当りwとすれば，力Fを最小にするためには，てこの長さをいくらにすればよいか[7]。

例3．船を運航させるのに必要な単位時間あたりの石炭の量は，速さの3乗に比例するという。流速vの川を流れにさからって一定距離を運航するとき，最も経済的な船の速さを求めよ[6]。

例4．幅b，厚さhの長方形断面のはりの強さは断面係数 $bh^2/6$ に比例する。円柱形の丸太から最も強い角材をとるには，横幅と厚さとの割合をどのようにすればよいか[9]。

③ 出題方式の変更

出題の表現や形式をいろいろ変えることも，学習の過程において有意義と考えられる。

ア）設問形式の変更

学習者のレベルに応じて取り組み易くするためには，次のような配慮をするとよい。

・誘導的な小設問形式にする

たとえば，前記例1において次のような小設問に分ける。

（i）1泊料金をx円としたとき，空き部屋がいくつできるか。

（ii）このときのホテルの収入y円はxのどんな式で表わされるか。

（iii）収入が最大となる宿泊料はいくらか。

・未知問題を確認問題にする。

たとえば，「$|x|$ が小さいとき $\sqrt{1+x+x^2}$ の近似式を求めよ。」を次のように変える。

「$|x|$ が小さいとき，次の近似式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{1+x+x^2} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2 \qquad \text{」}$$

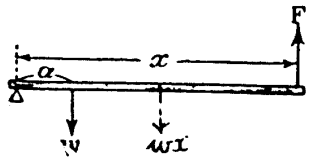
・文字変数になるべく簡単な数値を与える。

たとえば，前記例2においてａ＝10cm，Ｗ＝160ｇ，w＝２ｇとして出題すれば，途中の計算が簡単となり，しかも答が40cmと簡単な結果となる。

・出題の叙述をなるべくくわしく，わかり易い文章とする。

・必要に応じて図を添える。

たとえば，前記例２に次の図を添えると考え易い。



逆にレベルの向上に応じて，これらを適宜逆方向に戻して抵抗を与え，問題解決力を養うことが必要である。たとえば，上記例１を次のように一般化する。

「部屋数ｎのホテルがあり，料金は１泊ａ円である。これをｂ円値上げするごとに空き部屋が一つずつ増すという。収入最大となる宿泊料を求めよ。」

イ）文字変更

変数は通常x，yを用いることが多いが，これは本来place holderなので便宜的なものに過ぎず，どんな文字でもよいはずである。実際，応用場面においていろいろの文字が使用される。たとえば，前記例４において極値を求めるのに，角材の強さをＰとすると，ｄＰ／ｄｂを求めることになる。またロピタルの定理の証明において

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (a\leqq c\leqq x)$$

のような場面が出てくる。このような場面ですぐ順応できるためには，基礎的な計算練習の場において，x，yである程度やった後に文字をいろいろ変えた問題を与える配慮が望ましい。たとえば，指数関数の微分計算で，$y=x^2e^x$のようなもののほかに

$x=e^{-2t}\cos 3t$，$\mathrm{I}=\mathrm{I}_0 e^{-\lambda t}$　のようなものも入れるとよい。

(2) 問題の量

どれだけの問題を与えるかは，その単元内容によってweightづけすべきであるが，次のような内容のものは重点的に問題数を多くすることが必要である。

① 今後の数学の学習においてよく用いられ，習熟を必要とするもの

（例）数式の計算，方程式の解法，行列式の展開，微分計算　など

この種のものは，特に基本として同一形式の問題を大量に反復練習させる必要があるが，興味を失い易いので，時間を制限してやらせ成績記録をとるなどして意欲をもたせる指導が望ましい。またこれを統計的に標準化することも考えられる。

② いろいろの分野でよく用いられるもの

（例）曲線の概形，最大最小問題，微分方程式（変数分離形，定係数２階線形）など

この種のものは場面変更，出題方式の変更などにより問題を豊富に与え，十分な適用能力を養うことが肝要である。

③ 学習者が苦手とするもの

（例）一般２次曲線のグラフ，無限級数の収束発散・立体の体積・表面積　など

この種のものは問題を細密な類型分析をして作成し，学習者のつまずきが，どのようなところで起るかを検出できるようにすることが望ましい。

全般的に問題数をどれほどにするかは，学習者の能力と時間的制約等により一様に定めることはできないが，問題集の作成にあたっては，やさしい問題をできるだけ多く入れて過剰練習もできるようにし，その選択は教授者，学習者にゆだねるとよい。

(3) 問題の配列

練習問題は次の二系統に分けて取扱うと効果的である。

$$\begin{cases} \text{A：基礎的理解のためのもの} \cdots\cdots\text{単純問＋簡単な複合問} \\ \text{B：適用能力を養うためのもの} \cdots\cdots\text{複合問＋簡単な応用問} \end{cases}$$

従来多くのテキストや問題集もA，BあるいはA，B，Cに分けているものがいろいろあるが，その分類原理が明確でなく，また問題の配慮も感覚的になされているように思われる。ここでは上記のように明確に分けて考えることとする。

A：類型分析に基づき，難易度のレベルの順に従って配列する。

たとえば，整数係数の２次３項式は，$1 \neq a > 0$，$b > 0$，$c > 0$ として次の型に分けられる。

$$ax^2 - bx + c \ [\alpha\text{型}] \qquad ax^2 + bx + c \ [\beta\text{型}]$$

$$ax^2 - bx - c \ [\gamma\text{型}] \qquad ax^2 + bx - c \ [\delta\text{型}]$$

ここで b の符号を変えることにより，$\alpha \longleftrightarrow \beta$，$\gamma \longleftrightarrow \delta$ となるから，α，γ 型について練習させればよい。難易度については α 璘 γ で，また a，c の数因数の分解と組み合わせ方の難易により α は α_0 璘 α_1 璘 α_2 璘 α_3 璘 α_4 となるから（γ も同様），たとえば次の問題列が構成される。

①	$3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)$	$[\alpha_0]$	$(2^{\#})$	（ごく易しい程度）
②	$2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$	$[\alpha_1]$	$(2^{\#})$	
③	$3x^2 - 10x + 3 = (x-3)(3x-1)$	$[\alpha_2]$	$(3^{\#})$	（普通程度）
④	$6x^2 - 11x + 5 = (x-1)(6x-5)$	$[\alpha_3]$	$(3^{\#})$	
⑤	$3x^2 - 10x + 8 = (x-2)(3x-4)$	$[\alpha_3]$	$(3^{\#})$	

⑥　$8x^2-18x+9=(2x-3)(4x-3)$　$[\alpha_4]$　(4#)　(やや難しい程度)

⑦　$12x^2-29x+15=(4x-3)(3x-5)$　$[\alpha_4]$　(5#)　(難しい程度)

---

⑧　$3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$　$[\gamma_0]$　(2#)

⑨　$2x^2-3x-5=(x+1)(2x-5)$　$[\gamma_1]$　(2#)

⑩　$2x^2-9x-5=(x-5)(2x+1)$　$[\gamma_2]$　(3#)

⑪　$5x^2-7x-6=(x-2)(5x+3)$　$[\gamma_3]$　(3#)

⑫　$6x^2-11x-10=(2x-5)(3x+2)$　$[\gamma_4]$　(4#)

⑬　$12x^2-x-20=(4x+5)(3x-4)$　$[\gamma_4]$　(5#)

このように構成しておけば，できる生徒には逆順にやらせ，後のものができればその前のものはやらせなくてもよいことになる。

また簡単な複合問としては，たとえば次のような複2次の形をやらせるとよい。

⑭　$3x^4+2x^2-1=(x^2+1)(2x^2-1)$　[2因数]　(3#)

⑮　$2x^4+x^2-3=(x+1)(x-1)(2x^2+3)$　[3因数]　(3#)

⑯　$4x^4-17x^2+4=(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)$　[4因数]　(3#)

B：難易順は原則とするが，必ずしもこれにとらわれない。類型はむしろ混合して配列する。これはいろいろの場面や対象に対して，Aで学習した基礎事項のどれを用いるかを自ら選択，結合して適用し，さらに応用する能力を養うためのものである。たとえば，前記2次3項式の因数分解については次のような種類の問題が追加される。

①　$6x^2+xy-2y^2=(2x-y)(3x+2y)$　(3#)　文字追加

②　$8a^2-10ab-3b^2=(4a-b)(2a+3b)$　(3#)　文字変更

③　$pq-2p^2+3q^2=-(2p-3q)(p+q)$　(3#)　文字変更，順序変更

④　$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=(x-\frac{2}{3})(x-2)$　(3#)　分数係数

⑤　$\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}(3x+4)(3x-2)$　(3#)　aも分数係数

⑥　$60x^4-27x^2-54=3(4x^2+3)(5x^2-6)$　(4#)　複2次，共通因数

⑦　$2x^6-x^3-3=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+6)$　(4#)　他公式との複合

⑧　$(x^2+4x-1)(x^2+4x+2)-4$

$=(x+1)(x+3)(x^2+4x-2)$　(4#)　置　換

⑨　$(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)+24$

$=(x+2)(x-3)(x^2-x-8)$　(4～5#)　組み合せ，置換

※⑩　$(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$

$=(xy+x+1)(xy+y+1)$　(5#)　組み合わせ，置換

※⑪　$2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2$

$= (x-3y+2)(2x+y-1)$　　　(5*)　式の整理，文字係数

注：①②はAに入れて取扱うことも考えられる。

⑩⑪はA，B，Cに分けるときはCに入るものなので，Bに入れて※印を付けてある。

3．練習問題作成の方法

(1) 問題カードの作成

その単元内容に関する問題をいろいろなテキスト，問題集，演習書などから採取して，一問ごとにカードを作成し，これに分類，区分，解答，評価レベル，さらに要すれば出典，別解，類題加工（場面変更，出題形式変更）などを記入しておく。

例

$y=e^{-x}\sin x$　のとき，y'''を求めよ。　　（区分）Ⅱ 7 (2)② γ

（解）

$$y'''=(e^{-x})'''\sin x+\binom{3}{1}(e^{-x})''(\sin x)'+\binom{3}{2}(e^{-x})'(\sin x)''+e^{-x}(\sin x)'''$$

$$=-e^{-x}\sin x+3e^{-x}\cos x+3(-e^{-x})(-\sin x)+e^{-x}(-\cos x)$$

$$=2e^{-x}(\sin x+\cos x)=2\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

（別解）

$$y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$$

$$y''=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)=-2e^{-x}\cos x$$

$$y'''=2e^{-x}\cos x-2e^{-x}(-\sin x)=2e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

（類題）

$y=e^{-x}\cos x$のとき　$y'''=?$　　　$\left[2\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

（加工）

$x=e^{-t}\sin\omega t$のとき　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=?$　　　$\left[-(\omega^2+1)e^{-t}\sin(\omega t+\alpha)\right.$　ただし　$\left.\tan\alpha=\dfrac{2\omega}{\omega^2-1}\right]$

（評価）　3*　　　（出典）　ⓑ

ただし，このようなカードの作成には，かなりの時間と労力を必要とするので，グループの共同作業とするとよい。

(2) 分類整理

上記のカードを作成する過程において，既述のような類型分析を行ない，その記号番号を区分

の欄に追記する。[たとえば上例において，②γ（指数関数×三角関数)]。これと評価レベル（2#～5#）とによって，一つの単元内容に関する問題カードを順序づけして「問題ファイル」を作成する。

(3) 問題列の構成

基礎練習Aにおいては，問題ファイルの順に従って配列すればよい。ただし問題列構成にあたって，問題が不足しているときは，これを補足することも必要になる。練習Bにおいては前述のように，場面や対象によって関連したものをまとめる方が学習者に興味をもって取り組ませるのによく，また複合問にmixするのに有効である。たとえば，積分の応用として，回転体の体積と表面積はAにおいては別々に練習させるが，Bにおいては次の例のように，同時に入れてよい。

例. サイクロイド　$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$（$0\leqq t\leqq 2\pi$，$a>0$）をx軸のまわりに回転してできる立体の体積と曲面積を求めよ。

4．問題構成の一例

偏微分の重要な応用の一つである2変数関数$f(x, y)$の極値問題について練習問題を構成してみる。この基礎となる事項は

関数$z=f(x, y)$について，$f_x=0$，$f_y=0$の解(a, b)に対して

$\mathrm{A}=f_{xx}(a, b)$，$\mathrm{B}=f_{xy}(a, b)$，$\mathrm{C}=f_{yy}(a, b)$，$\mathrm{D}=\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}$ とおけば

$$\mathrm{D}<0 \quad \begin{cases} \mathrm{A}>0 \longrightarrow f(a, b)\ :\ \text{極小値} \\ A<0 \longrightarrow f(a, b)\ :\ \text{極大値} \end{cases}$$

$D>0$　のとき　$f(a, b)$は極値でない。

注. $\mathrm{D}=0$のとき不明で，直接(a, b)の近くの値をしらべる必要がある。

これについての基本例題（なるべく見易く，基本事項の内容をよく表わすもの）を設ける。

例. 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$z=x^3-3xy+y^3$　　(2)　$z=x^3+y^3$

（解）　(1)　$f(x, y)=x^3-3xy+y^3$

$f_x=3x^2-3y=0$，$f_y=-3x+3y^2=0$

これを解いて　$(x, y)=(0, 0)$，$(1, 1)$

$f_{xx}=6x$，$f_{xy}=-3$，$f_{yy}=6y$，

$\mathrm{D}=(-3)^2-6x\cdot 6y=9(1-4xy)$

$(x, y)=(0, 0)$のとき　$\mathrm{D}=9>0$　　極値ではない

$(x, y)=(1, 1)$のとき　$\left.\begin{array}{l}\mathrm{D}=-27<0\\ \mathrm{A}=6>0\end{array}\right\}$　極小値 $f(1, 1)=-1$

(2) $f(x, y) = x^3 + y^3$

$f_x = 3x^2 = 0$, $f_y = 3y^2 = 0$ より $(x, y) = (0, 0)$

$f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y$

$D = 0^2 - 6x \cdot 6y = -36xy$

$(x, y) = (0, 0)$ のとき $D = 0$, $f(0, 0) = 0$

hを微小な正の数とすると, $f(-h, 0) = -h^3 < f(0, 0) < f(h, 0) = h^3$

よって$f(0, 0)$は極値ではない。

[解終]

これに基づいて練習問題Aを構成するため，前述のように問題カードを作成し，これらを次のように類型分析を行った。

・判別式Dにより　$\alpha : D \gtrless 0$　$\beta : D = 0$

・結果より　⓪：極値なし　①：極大値をもつ　②：極小値をもつ

これらを組み合わせて類型を α_0, α_1, α_2, α_{12}, β_0, β_1, β_2 などで表わす。

たとえば上例については(1)はα_{02}, (2)はβ_0で表わされる。

これと評価レベルとによって，たとえば次のように問題列が構成される。

ただし［ ］は類型を示し，評価レベル3#は記載を略し4#，5#のみ付記してある。

（構成例）

［A］次の関数の極値を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 3y$　[α_2]

(2) $z = 1 + 4xy - 2x^2 - 3y^2$　[α_1]

(3) $z = x^2 + xy + y^2 - 5x - y + 1$　[α_2]

(4) $z = x^2 + 2xy - 3y^2 - 4x + 2y - 1$　[α_0]

(5) $z = x^3 + 6xy + y^3$　[α_{01}]

(6) $z = x^3 + y^3$　[β_0]

(7) $z = x^3 + 3x(y^2 - 1)$　[α_{12}]

(8) $z = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 5$　[α_{012}]

(9) $z = x^4 + x^2y^2 + y^4$　[β_2]

(10) $z = x^4 + y^4 + x^2 - 2xy + y^2 + 1$　[β_2]

(11) $z = e^{-x^2-y^2}$　[α_1]

(12) $z = e^x(x^2 - y^2)$　[α_{01}]

(13) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$　$(0 < x, y < \pi)$　[α_1]　4#

(14) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$　$(0 < x, y < \frac{\pi}{2})$　[α_1]　4#

［B］次の関数の極値を求めよ。

(1) $z = xy(a - x - y)$　$(a > 0)$　[$\alpha_{0_2 1}$]　（添え字は点の数を示す）

(2) $z = x^2y(4 - x - y)$　[$\alpha_{01}\beta_0$]　4#

(3)	$z = ax^2 + 2hxy + by^2$	$[\alpha_{1,2},\ \beta_0]$ 4 ♯（, は場合分け）
(4)	$z = x^3 - 3axy + y^3$	$[\alpha_{1,2},\ \beta_0]$ 4 ♯
(5)	$z = x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y + 4$	$[\beta_0]$ 4 ♯
(6)	$z = y^2 - 3x^2y + 3x^4$	$[\beta_2]$
(7)	$z = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2y^2$	$[\alpha_{2_2}\beta_0]$ 4 ♯
※(8)	$z = x^4 + y^4 - 10x^2 + 16xy - 10y^2$	$[\alpha_{0\,1_2\,2_2}]$ 5 ♯
(9)	$z = xy(x^2 + y^2 - 1)$	$[\alpha_{0_5\,1_2\,2_2}]$ 4 ♯
(10)	$z = (y - x^2)(y - 2x^2)$	$[\beta_0]$ 4 ♯
(11)	$z = \sin 2x + \sin 2y \quad (0 \leqq x,\ y \leqq \pi)$	$[\alpha_{0_2\,1_2}]$ 4 ♯
※(12)	$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2} \quad (a > b > 0)$	$[\alpha_{0_2\,1_2\,2}]$ 4～5 ♯
(13)	$z = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2$	$[\beta_1]$ 4 ♯

指導にあたっては，これらの中から適宜練習させればよいが，$[\beta_2]$ のものは少なくとも1題は含ませるようにしたい，というのは $[\beta_0]$ と扱い方が異なるからである。

おわりに

以上で練習問題を構成するための原理と方法について具体例を添えて詳述したが，実際にこれをやるのにかなりの時間と労力を要することは筆者の体験するところである。しかし一度このようなものが作られると，その利用価値が非常に大きいので，少しずつ遂次作成されることを切望するものである。

参考文献

1）島本静夫：数学教育概説（pp. 188－201），文明社，1936.
2）城戸幡太郎ほか：体系教育心理学辞典（pp. 150－153），岩崎書店，1951.
3）宮本一郎：数学教育課程における問題の構成と配置，富山工業高等専門学校紀要 Vol. 14，No. 1（pp. 193－202），1980.
4）宮本一郎：数学における問題の分析と配列，富山工業高等専門学校紀要 Vol. 17，No. 1（pp. 47－52），1983.
5）藤森貞明・小沢喜明・早川京而：数学科での問題作成，共立出版，1983.
6）笹部貞市郎：問題解法　微・積分学辞典，聖文社，1982.
7）高橋進一：工業技術数学（p. 120），三省堂，1944.
8）Carol Ash & Robert Ash（福島甫ほか訳）：The Calculus Tutoring Book（微分積分学教程）(p. 95)，森北出版，1989.
9）実業教育協会工業部会：応用数学（pp. 63－64），綜文館，1948.

（平成2年10月26日受理）