

トラスを破壊に導く部材とその部材上の先発降伏断面 を求める構造解析法

江 上 外 人

Structural Analysis to Find out the Yield Position on the Yield Member of the Statically Determinate Truss

Hokato EGAMI

This paper describes on structural analysis to find out the yield section on the member exist in the truss, under static loading, by means of energy method.

The yield point on the axis of the bar are determined, so that strain energy W_A saved in the left side bar from the yield point D are much the same as strain energy W_B saved in the right side bar. By this theory, it is possible to find out the yield member exist in the truss, and find out the yield section on this member.

1. 前 が き

断面が一樣な棒の両端に大きさ等しくて向きが相反する一組の外力 P を加えると、棒軸に垂直な総ての断面には均等で等しい応力度が誘発する。外力が増大して誘発した応力度がその材の降伏応力度 σ_0 の値に至ると、棒は材軸に添う総ての断面で同時に降伏して同時に破壊することとなる。ところが実験では、必ず材軸上の特定の位置の断面で最初に降伏が起こり、その断面で破壊する。この特定の位置の断面を「先発降伏断面」と名付ける。

ここでは、先発降伏断面の位置を求める構造解析法を試みる。次に、静定トラスが破壊するとき、最初に降伏を始める材を「トラスの先発降伏部材」と名付け、その部材を含みトラス軸に垂直な断面を「トラスの先発降伏断面」と名付ける。トラスの先発降伏部材とその部材の先発降伏断面の位置を求める構造解析法を次の仮定を設けて試みる。

- i 外力は0から徐々に増加する。
- ii 圧縮部材の降伏応力度はその材の降伏応力度に係数を掛けたものとする。
- iii 棒についての本理論はトラスについても適用できる。

2. 軸方向力を受ける棒についての外力のなす仕事と棒のひずみエネルギー

図1(b)のように断面積が一定 A で、長さが l ・ヤング係数が E の棒の両端に、大きさ等しくて向きが反対の一組の外力 P が0から順次増加して作用すると棒の伸びが順次増加し、外力 P の大きさが弾性範囲内の大きさであれば、外力のなす仕事の全部が棒材中にひずみエネルギーとし

て蓄えられる。この状態から、外力を順次除いて行くとひずみエネルギーは順次回収される。この状態を(a)図に示す。(a)図について、外力 P_1 から dP_1 だけ増加したとき、伸び量は δ_1 から $d\delta_1$ だけ増加するとすれば、この間に外力 dP_1 がなした仕事 dV は4辺形 $abdc$ であるので、外力が0から P に至る迄になした仕事 V は式(1)となる。式(1)の仕事は棒材中に式(2)に示すひずみエネルギー W として蓄えられる。

$$V = \frac{P\delta}{2} \dots\dots (1) \quad W = \frac{P^2 l}{2AE} \dots\dots (2)$$

単位体積当りのひずみエネルギー w は W を Al で割って式(3)となる。

単位体積中には材の弾性限度(降伏応力度 σ_e) の大きさのひずみエネルギーまでが蓄えられるとすれば、材の降伏時に単位体積に蓄えられるひずみエネルギー w_e は式(4)となる。

$$w = \frac{\sigma^2}{2E} \dots\dots (3) \quad w_e = \frac{\sigma_e^2}{2E} \dots\dots (4)$$

降伏応力度 σ_e 及びヤング係数 E が等しい同質である棒部1(断面積 A_1 ・長さ l_1)と棒部2(A_2 ・ l_2)が図2の如く一直線上に在るときを考える。棒部1及び棒部2のそれぞれの単位体積当りに蓄えられるひずみエネルギーを w_1 及び w_2 とし、両者に生ずる応力度を σ_1 及び σ_2 とすると単位体積当りに蓄えられるひずみエネルギー w_1 及び w_2 は式(5)となる。

$$A_2 = nA_1, \quad \frac{P_e}{A_1} = \sigma_e, \quad w_1 = \frac{\sigma_e^2}{2E}, \quad w_2 = \frac{\sigma_e^2}{2En^2} \dots\dots (5) \quad w_2 = \frac{w_1}{n^2} \dots\dots (6)$$

式(5)の w_1 と w_2 とを比較すれば、式(6)となり、棒部2の単位体積当りに蓄えられるひずみエネルギー w_2 は棒部2の $1/n^2$ と小さいので、棒部1の単位体積当りに蓄えられるひずみエネルギーがその材の弾性の限度時の値に達し降伏に突入しても、棒部2の蓄えられるひずみエネルギーに余裕があるので、棒部1が先に降伏に入り先に破壊するが、棒部は弾性状態のままである。

上記のことから次のことがわかる。

〔性状1〕

棒部1と2からなる1本の棒は、棒1と2の2本の棒を一直線上に接合した状態と等しい。

3. 断面一樣な棒の先発降伏断面の位置

A. 対称条件のもとでの挙動

ヤング係数が E の均等質材で、断面積が A 、長さが l の棒 AB の両端に、図3(a)のように大きさ等しく向きが反対の一組の外力 P が、0から増加して P に至ると、棒の応力度 σ が棒材の弾性範囲内の間は、棒 AB は外力の大きさに比例して式(7)に示す δ だけ伸びて(b)図の A_1B_1

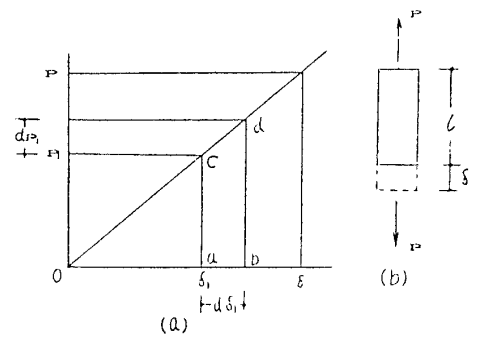


図1 棒に加わる外力のなす仕事とひずみエネルギー

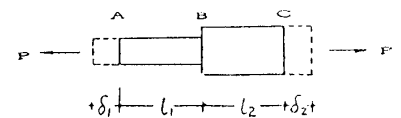


図2 変断面の棒

となる。対称の条件からC点は移動せず、棒部AC及びCBの伸び量 AA_1 及び BB_1 は等しくて式(8)

となる。棒ABを δ だけ伸す迄に外力のなした仕事 V 並びに棒部AC及びCBをそれぞれ $\delta/2$ だけ伸すために外力のなし

た仕事 V_1 及び V_2 は(d)図中の $\triangle ABB_1$ 並びに $\triangle ACA_1$ 及び $\triangle CBB_1$ となり、それぞれ棒 A_1B_1 並びに棒部 A_1C 及び CB_1 内にひずみエネルギー W 並びに W_1 及び W_2 として蓄えられ

る。このとき外力が更に増加して降伏荷重 P_e に至ると外力のなした仕事及びひずみエネルギーが $V_e \cdot V_{1e} \cdot V_{2e}$ 及び $W_e \cdot W_{1e} \cdot W_{2e}$ となり、これらを式(9)及び(10)に示す。

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \dots\dots (7) \quad AA_1 = BB_1 = \frac{\delta}{2} = \frac{Pl}{2AE} \dots\dots (8)$$

$$V_e = \frac{P_e \delta}{2}, \quad V_{1e} = V_{2e} = \frac{P_e \delta}{4} \dots\dots (9) \quad W_e = \frac{\sigma_e Al}{2E}, \quad W_{1e} = W_{2e} = \frac{\sigma_e Al}{4E} \dots\dots (10)$$

外力が P_e を境として、特定点Cを含む断面が先発降伏断面となりその応力度が(i)図のA点(σ_e)を越してB点の方へ降り断面は破壊へ進む。このときその他の断面では(i)図のA点から0点の方へ降り、棒部 A_1C 及び CB_1 は弾性状態のままそれぞれ単独で収縮して(c)図の棒 A_2C_1 及び C_1B_2 となる。この場合、棒部 A_1C 及び CB_1 を伸して両材にひずみエネルギーとして蓄えるためになされた仕事 V_{1e} 及び V_{2e} は解除される。同所に蓄えられたひずみエネルギー W_{1e} 及び W_{2e} も回収され、式(11)の関係にある(a)図のM・N点は(b)図の $M_1 \cdot N_1$ 点となり、切断され

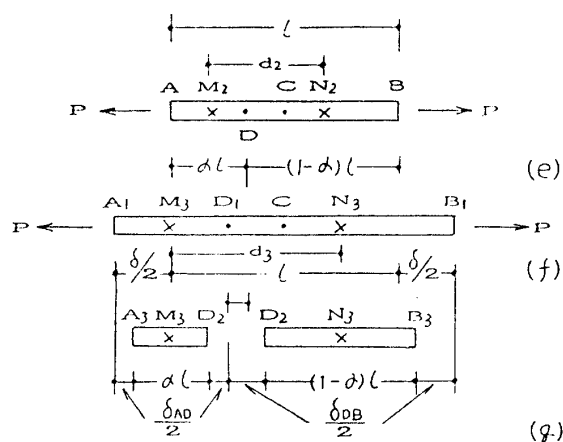
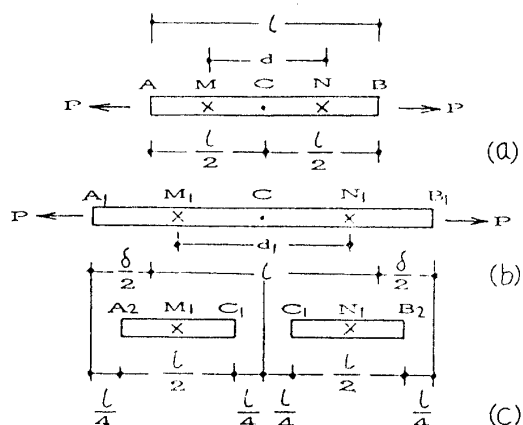
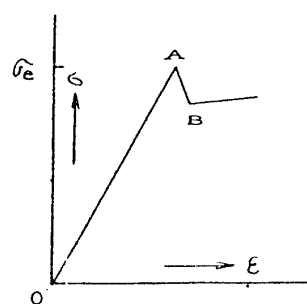
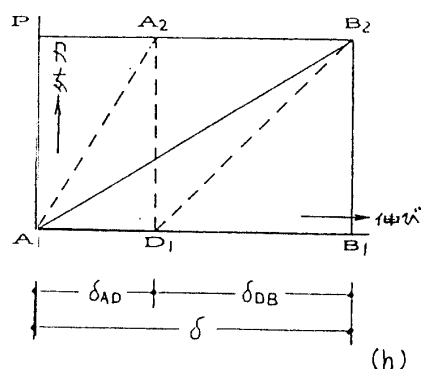
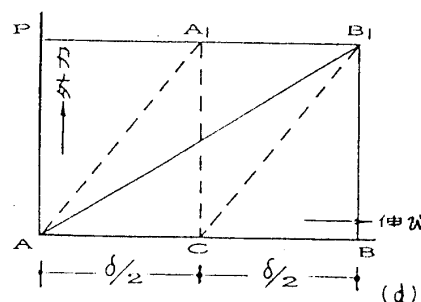


図3 断面一樣な棒の先発降伏断面の位置



(i) 本論に使用する理想化された応ひずみ度曲線



たときも (b) 図の $M_1 \cdot N_1$ 点と同じ位置のまま (c) 図のように 2 材は M_1 点 N_1 点を中心とした元の長さ ($l/2$) に縮まる。

$$\left. \begin{array}{ll} AM = MC = CN = NB & MN = d = \frac{l}{2} \\ A_1M_1 = M_1C = CN_1 = N_1B & M_1N_1 = d_1 = \frac{l+\delta}{2} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

上記のことから次のことがわかる。

〔性状 2〕

i) 均等質で一定断面 A 、長さ l の棒 AB の両端に外力を加えて引張ったときは、 C 点は移動しなく棒 AB は棒 A_1B_1 と伸び、両端での伸量は等しい。この状態で外力を増大して棒の応力度 σ が、その降伏応力度 σ_e に達すると、 C 点の移動はなく C 点を含む断面が先発降伏断面となって切断する。このとき切断される棒部 A_1C 及び CB_1 は弾性状態のまま収縮を始めて切断と同時に C 点に対して対称な M_1 及び N_1 点を中央とする元の長さ に等しい棒 A_2C_1 と C_1B_2 に収縮する。これにより、外力のなした仕事と貯えられたひずみエネルギーとの関係は完全に消滅する。故に、棒長の中央点 C を含む断面が先発降伏断面となる。

ii) 先発降伏断面をはさむ 2 つの棒部に蓄えられるひずみエネルギーは相等しい。

B. 棒軸上の中央点 C を除く任意の D 点で切断されると仮定したもとの挙動

図 3 (e) の D 点を含む断面が先発降伏断面となり、ここで切断するとの仮定は、(e) 図の棒部 CD の C 点を固定して式 (12) に示す δ_{CD} だけ伸ばして、(e) 図の D 点を (f) 図の D_1 点に移動し、 D_1 点を含む断面が先発降伏断面であるということである。

i) (e) 図の棒部 AD 及び DB は D_1 で固定されて式 (13) に示す δ_{AD} 及び δ_{DB} だけ

$$DD_1 = \delta_{CD} = \frac{P}{AE} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) l \dots\dots\dots (12)$$

伸びて (f) 図中の A_1D_1 及び D_1B_1 となる。

$$\delta_{AD} = \frac{P}{AE} \alpha l, \quad \delta_{DB} = \frac{P}{AE} (1-\alpha) l \dots\dots\dots (13)$$

この間に外力のなした仕事は式 (15) の V であって (h) 図の $\triangle A_1B_1B_2$ である。この中で (e) 図の棒部 AD 及び DB を (f) 図の A_1D_1 及び D_1B_1 に

$$A_1D_1 = \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right) \alpha l \quad D_1B_1 = \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right) (1-\alpha) l \dots\dots\dots (14)$$

$$V = \frac{P\delta}{2} \quad V_1 = \frac{P\delta_{AD}}{2} \quad V_2 = \frac{P\delta_{DB}}{2} \dots\dots\dots (15)$$

$$W_1 = \frac{\sigma^2}{2E} A \alpha l \quad W_2 = \frac{\sigma^2}{2E} A (1-\alpha) l \dots\dots\dots (16)$$

伸ばすために外力のなした仕事は図式の V_1 及び V_2 であって、(h) 図の $\triangle A_1D_1B_2$ 及び $\triangle D_1B_1B_2$ である。式 (15) の V_1 及び V_2 は式 (16) に示すひずみエネルギー W_1 及び W_2 であって (h) 図の $\triangle A_1D_1A_2$ 及び $\triangle D_1B_1B_2$ であり棒部 A_1D_1 及び D_1B_1 内に蓄えられる。

ところが、(e) 図の D 点を (f) 図の D_1 迄移動させるために行った仕事 V_3 は式 (17) であり、 V_3 は式 (18) に示すひずみエネルギー W_3 として棒部 CD_1 内に蓄えられることになって CD 部

$$\text{の単位体積当りのひずみエネルギー } w_3 \text{ は式 (19)} \quad V_3 = \frac{P\delta_{CD}}{2} \dots\dots (17) \quad W_3 = \frac{\sigma^2}{2E} A \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) l \dots\dots (18)$$

$$\text{となり他の部分の単位体積当りのひずみエネルギー } w_1 \text{ 及び } w_2 \text{ の 2 倍 と} \quad \left. \begin{aligned} w_3 &= \frac{\sigma^2}{E} \\ w_1 &= w_2 = \frac{\sigma^2}{2E} \\ w_3 &= 2w_1 = 2w_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

なる。このことは、外力のなした仕事 V_3 と棒に蓄えられたひずみエネルギー W_3 とがあり得なくなり矛盾があるので不合理である。

- ii) 外力が増して P_e となり、棒の応力度 σ が降伏応力度 σ_e になった瞬間に、 D_1 点を含む断面に降伏が先発し、同時に (f) 図の棒部 A_1D_1 及び D_1B_1 は弾性状態のまま (g) 図の M_3 及び N_3 を中央として収縮し、それぞれ元の長さ αl 及び $(1-\alpha)l$ の A_3D_2 及び D_2D_3 となる。このとき棒部 A_1D_1 及び D_1B_1 に作用している外力は式 (20) に示す仕事 V_{1e} 及び V_{2e} を放出し、同時に式 (21) に示すひずみエネルギー W_{1e} 及び W_{2e} は回収される。

$$V_{1e} = \frac{P_e \delta_{AD}}{2}, \quad V_{2e} = \frac{P_e \delta_{DB}}{2} \dots (20) \quad W_{1e} = \frac{\sigma_e^2}{2} A \alpha l, \quad W_{2e} = \frac{\sigma_e^2}{2} A (1-\alpha) l \dots (21)$$

しかし、 D_1 を元の D へ戻すためのひずみエネルギーがないので、 D_1 は D へ戻れなくなり棒 AB は、 DD_1 だけ移動したままとなって破壊することとなる。ところが棒を DD_1 だけ移動させるための外力の仕事はなされていないので不合理である。このことは、外力のなす仕事と回収されるエネルギーとが一致しなくなり、エネルギーの法則に反することとなるので不合理である。

〔性状 3〕

上記 i) 及び ii) から、均等質で一定断面 A 長さ l の棒 AB を引張ったとき、棒を CD_1 だけ移動するために更に仕事 V_3 を行うが、これは CD_1 部のひずみエネルギーとして蓄えられない。そのため、 C 点以外の D 点で降伏が先発するとひずみエネルギーは回収されるが、棒の位置は移動したままの位置で破壊することになり、エネルギーの法則に反するので、中央点 C を除くいかなる位置をも含む断面も先発降伏断面とはなり得ない。

C. 結 語

性状 1 ～ 3 により次の結語を得る。

- i. 一直線上に結合された 2 つの棒部を持つ 1 つの棒とみなしてよい。
- ii. 断面形が一樣で均等質の棒の両端に大きさ等しく反対向きの一組の外力を加えて引張ったとき、棒軸の中央点が先発降伏断面となりその断面で切断するが、性状 3 により中央点を除くいかなる位置の断面も先発降伏断面となり得ない。故に、この場合は必ず棒軸の中央点を含む断面が先発降伏断面である。
- iii. 先発降伏断面をはさむ相隣れる 2 個の棒部に蓄えられるひずみエネルギーは相等しい。

4. 同一線上に連結された棒（鎖構造）の先発降伏断面の位置

A. 断面が等しく長さが異なる 2 つの棒からなる鎖構造

断面 A ・ヤング係数 E ・
降伏応力度 σ_e がそれぞれ
等しく、長さ l_1 及び l_2
の場合を図4(a)に示す。

「結語 i」により長さ l の
一本の棒として解析する。

先発降伏断面の位置を
 D とすれば「結語 iii」
により、棒部 AB と BD
部に蓄えられるひずみエ
ネルギー W_1 と W_2 の和
は棒部 DC に蓄えられる

ひずみエネルギー W_3 に等しいので、式 (22) 及び (23) となる。このことは、(b) 図の $\triangle ABB_1$
と $\triangle BCC_1$ の和は $\triangle CDD_1$ に等しいことで示される。式 (23) において $l_1 + x = \alpha l$ であるので、
先発降伏断面の位置 x は B 点から式 (24) の距離にある。

$$W_1 = \frac{\sigma_e^2}{2E} A l_1, \quad W_2 = \frac{\sigma_e^2}{2E} A x, \quad W_3 = \frac{\sigma_e^2}{2E} A(1-\alpha) l \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\sigma_e^2}{2E} A l_1 + \frac{\sigma_e^2}{2E} A x = \frac{\sigma_e^2}{2E} A(1-\alpha) l \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\therefore x = \frac{l_2 - l_1}{2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

B. 長さが等しく断面が異なる2つの棒からなる鎖構造

長さ $l/2$ ・ヤング係数 E ・降伏応力度 σ_e がそれぞれ等しく、断面が A_1 及び A_2 の2個の棒からなる鎖構造を図5(a)に示す。「結語 i」により長さ l の一つの棒として解析する。棒部 AD ・ DB ・ BC に蓄えられたひずみエネルギー W_1 ・ W_2 ・ W_3 は式 (25) となり、(b) 図の $\triangle ADD_1$ ・ $\triangle DBB_1$ ・ $\triangle BCC_2$ で表せる。

$$W_1 = \frac{\sigma_e^2}{2E} A_1 \alpha l, \quad W_2 = \frac{\sigma_e^2}{2E} A_1 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) l, \quad W_3 = \frac{\sigma_e^2}{4En} A_1 l \quad \dots\dots\dots (25)$$

「結語 iii」を使って、(b) 図より $\triangle ADD_1 = \triangle DBB_1 + \triangle BCC_2$ となるので α は式 (27) となり、先発降伏断面は棒 AB の A 端からの距離が式 (27) の位置にある。

$$\frac{\sigma_e^2}{2E} A_1 \alpha l = \frac{\sigma_e^2}{2E} A_1 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) l + \frac{\sigma_e^2}{4En} A_1 l \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$x = \alpha = \frac{n+1}{4n} \quad \dots\dots\dots (27)$$

5. 静定トラスの先発降伏断面及び先発降伏部材とその先発降伏断面

静定トラスの部材の中で先発降伏断面を持つ部材を「先発降伏部材」とし、先発降伏部材を含

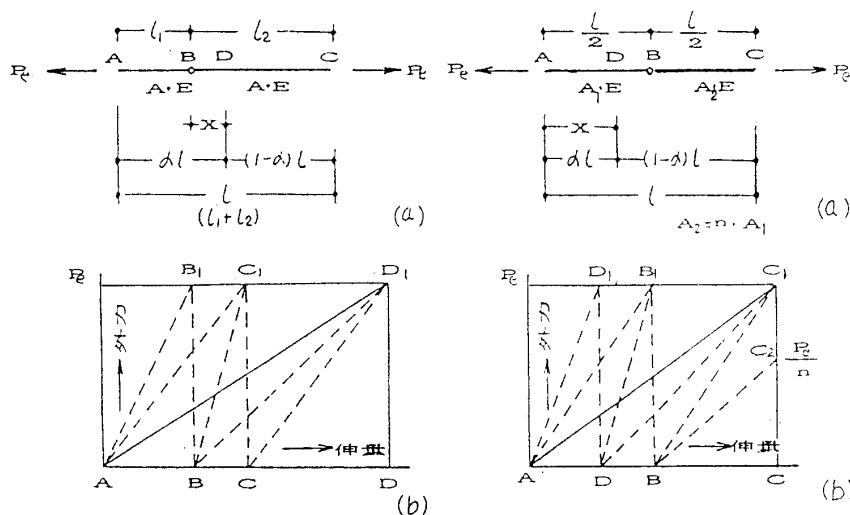


図4 断面等しく長さが異なる2材
からなる鎖構造

図5 断面相違し長さが等しい2材
からなる鎖構造

トラスの軸に垂直な断面を「トラスの先発降伏断面」と名付けた。

先述した「性状 i ~ iii」及び「結語」並びに「4. 同一線上に連結された棒」の理論を応用して、トラスの先発降伏部材及びその部材の先発降伏断面の位置を算定できる。その手順を述べる。

i) トラスに誘発する総ての部材力 S_i を算定する。

ii) 部材力の最小な部材 m の応力度が降伏応力度 σ_e となるように式 (28) より断面積 A_m を定める。

$$\sigma_e = \frac{S_m}{A_m} \quad A_m = \frac{S_m}{\sigma_e} \quad \dots\dots\dots (28)$$

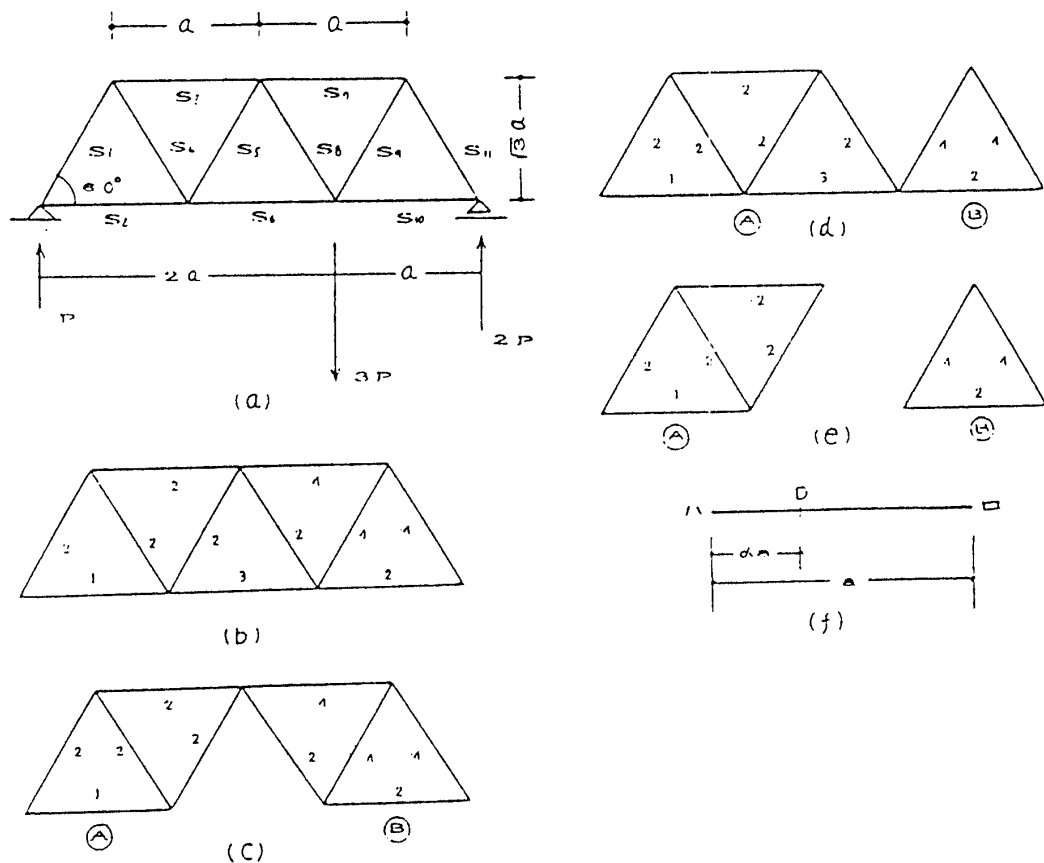


図6 静定トラスの先発降伏部材とその先発降伏断面の位置

iii) すべての部材 i については、式 (29) より n_i を算定する。

$$\sigma_e = \frac{S_m}{A_m} = \frac{S_i}{A_i} = \frac{n_i S_m}{n_i A_m} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 $S_i = n_i S_m$ $A_i = n_i A_m$

圧縮部材については仮定により降伏応力度の代りに挫屈応力度を使用するか、又は今後の研究によって定める係数を σ_e に掛けて使用する。

iv) 以上ですべての部材応力度が σ_e となったので、すべての部材のひずみエネルギー W_i を式 (30) を使って算定する。

$$W_i = \frac{\sigma_e^2 n_i A_i l_i}{2E} \quad \dots\dots\dots (30)$$

v) 棒理論の「結語」の iii をトラスに応用して、 m 個の部材で構成されるトラスの先発降伏断

面をはさんで左部 ㊤ と右部 ㊦ の各部材に蓄えられる式 (31) のひずみエネルギー W_A と W_B は相等しいことになるので式 (31) から式 (32) が成立する。

$$W_A = \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_e^2 n_i A_i l_i}{2E} \quad W_B = \sum_{i=k+4}^n \frac{\sigma_e^2 n_i A_i l_i}{2E} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$W_A = W_B \quad \therefore \sum_{i=1}^k n_i l_i = \sum_{i=k+4}^n n_i l_i \quad \dots\dots\dots (32)$$

トラスの先発降伏断面の位置を探すには、 $W_A - W_B$ の数値が最も小さい断面を選べばよい。ところで、トラス断面に含まれる 1 材を切断するとトラスは不安定となって破壊するので、 $W_A - W_B$ を最小にする材を選べばそれが先発降伏部材である。例えば、図 6 (c)・(d)・(e) の 3 種の部材を切断した場合について $W_A - W_B$ をそれぞれ計算して最小値の場合を選べばよい。

——例 題——

図 b (a) は、すべての部材が降伏応力度 σ_e に達した状態を示す。トラスの各部材力 S_i を算定する。それを使って式 (33) により各部材の n_i を算定する。

$$\frac{S_2}{A_2} = \frac{P_e}{\sqrt{3} A_2} = \sigma_e, \quad S_i = n_i S_1, \quad A_i = n_i A_2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

次に、 $n_i l_i / a$ の数値を算定して (b) 図に示す。式 (32) に近いトラスの断面は (c)・(d)・(e) 図の状態となるトラス断面である。(c) 図 ($\text{㊤}-\text{㊦}=-7$)、(d) 図 ($\text{〃}=4$)、(e) 図 ($\text{〃}=-1$) となり、(e) 図の値が最も小さいのでハロ材が先発降伏部材である。ハロ部材の先発降伏断面の (f) 図に示す位置は、式 (34) より $\alpha=0.75$ となる。

$$W_A + W_{HD} = W_B + W_{D=2} \quad \therefore 9+2\alpha=10(1-2) \\ \alpha=0.75 \quad \dots\dots\dots (34)$$

6. む す び

均一な棒を引張ったとき、棒長の中央部の断面に降伏が進行し破壊に至ることについて、外力のなす仕事とひずみエネルギーの関係を利用して解析法を試みた。これを応用して、静定トラスが降伏して破壊するとき、最初に降伏して破壊する部材とその部材の最初に降伏する断面の位置を求める解析法を提案した。

この理論解析法を使って、トラスは荷重状態に応じて、最初に降伏を起して破壊に導く部材とその断面位置を予想できることとなる。

(平成 3 年 10 月 3 日受理)