

回転曲げ疲労強度に関する解析的検討

田 知 清 夫*・織 田 勉*・武 道 輝 一**

Analytical Study on the Fatigue Strength by Rotary Bending

Kiyoo Tachi, Tutomu Oda and Kiichi Budo

In this paper, it regard forced vibration of one degree of freedom system as to the fatigue strength by rotary bending and it defined a deflection magnification. It was theoretical calculation as the one which influence fatigue strength. As a result, it examined an influence with the deflection magnification to exert on the fatigue strength in doing various simulation on the based of mathematical model.

1. 緒言

疲労強度は、材料の機械的性質や組織、荷重の種類や切欠きの有無、寸法の大小や表面性状、環境状態などによって同一材料でも異なった値をとる。このように機械部品等は、種々の要因により疲労強度に影響を受け、寿命予測が困難である。それ故に金属材料の疲労強度と寿命の関係を求めるためにS-N曲線が重要視されている。

また、疲労強度に影響を与えるものとしては、材料自体の発熱現象が挙げられる。これは金属が繰り返し応力を受けると結晶内にすべり線を生じ、内部摩擦エネルギーの消耗が熱エネルギーに変わるものと考えられる⁽¹⁾。その結果として、金属自体の発熱現象が見られ、それが疲労強度に影響を及ぼす要因の一つと推測される。

本研究は、回転曲げを1自由度系の強制振動とみなしてたわみ倍率を考え、疲労強度に及ぼすそのたわみ倍率の影響をコンピュータ・シミュレーションにより解析するため計算式を理論的に誘導し検討を行った。

計算式は、S-N曲線の応力振幅と繰り返し数の関係を基にたわみ倍率を導入し、回転軸の疲労強度を表示する数学的モデルである⁽²⁾⁽³⁾。そして、たわみ倍率をパラメータとすることで疲労強度に影響を及ぼす種々の要因について検討した。

* 機械工学科 ** 機械工学専攻大学院生

2. S-N曲線の解析

2・1 S-N曲線の計算式

材料の基本的な疲労特性を示すS-N曲線の座標は、縦軸に応力振幅、横軸にその応力振幅のもとで材料が破壊するまでの繰返し数の対数をとって表し、その曲線は、時間強度を表す傾斜部と疲労限度を表すほぼ水平な二つの部分からなる。いま、回転曲げ疲労試験におけるS-N曲線の応力振幅 σ は繰返し数 N の関数として次式で表されるものとする。

$$\sigma = f(N) \quad \dots\dots\dots (1)$$

いま、式(1)が成立するためには多くの実験結果から、

$N \rightarrow$ 大のときは $\sigma \rightarrow$ 小、

$N \rightarrow$ 小のときは $\sigma \rightarrow$ 大、

となる傾向であることがわかっている。すなわち、

$$d\sigma/dN < 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

という減少関数である。そこで、式(2)は次式で表されると仮定する。

$$d\sigma/dN = -a\sigma \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 a は、 N の適当な範囲で材質や形状等によって決まる係数とし、疲労係数と呼ぶことにする。

回転曲げにおいて、応力振幅が小さくなるにしたがって破壊までの繰返し数が増加するが、応力振幅がある値以下になるといくら繰返しても破壊しない領域があるものと考えられている。これを疲労限度といい、S-N曲線においては、ほぼ水平になる応力振幅である。この領域における変化率 $d\sigma/dN$ はほぼ零であるとして、時間強度の変化率は、時間強度 σ と疲労限度 σ_F の差の応力振幅の区間で表れる現象と考えて、式(3)を改めて次式のように表す。

$$d\sigma/dN = -a(\sigma - \sigma_F) \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(4)を積分して、

$$-a \int dN = \int \frac{1}{\sigma - \sigma_F} d\sigma + C_1 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore aN = -\ln(\sigma - \sigma_F) + C_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を得る。

いま、初期条件として、繰返し数 $N=0$ のときの応力振幅は、材料の引張強さであるとして式(6)に、 $N=0$ 、 $\sigma=\sigma_t$ を代入すると、 C_1 は次のようになる。

$$C_1 = \ln(\sigma_t - \sigma_F) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\therefore e^{-aN} = (\sigma - \sigma_F) / (\sigma_t - \sigma_F) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\therefore \sigma = (\sigma_t - \sigma_F) e^{-aN} + \sigma_F \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。

また、繰返し数 N については、式(9)から次式となる。

$$N = \frac{1}{a} \ln \frac{\sigma_t - \sigma_F}{\sigma - \sigma_F} \quad \dots\dots\dots (10)$$

2・2 疲労係数 a の検討

まず、式(9)中の σ と a の大小関係を調べる。 N を一定とすれば、

$a \rightarrow$ 大のときは $\sigma \rightarrow$ 小、

$a \rightarrow$ 小のときは $\sigma \rightarrow$ 大、

となる。

そこで、疲労係数 a はたわみ倍率 M_f の関数であると仮定し次式で表す。

$$a = f(M_f) \quad \dots\dots\dots (11)$$

そこで、式(11)の a と M_f の関係から式(9)が成立するためには、

$M_f \rightarrow$ 大 (変形 \rightarrow 大) のときは $a \rightarrow$ 大となり $\sigma \rightarrow$ 小、

$M_f \rightarrow$ 小 (変形 \rightarrow 小) のときは $a \rightarrow$ 小となり $\sigma \rightarrow$ 大、

とならなければならない。すなわち、

$$da/dM_f > 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる増加関数である。

ところで、たわみ倍率が M_f のときの疲労係数を a とし、たわみ倍率が $M_f + \Delta M_f$ のときの疲労係数を $a + \Delta a$ であるとする。いま、それぞれの変化率の比を、

$$(\Delta a/a)/(\Delta M_f/M_f) = h \quad \dots\dots\dots (13)$$

とする。この h を疲労弾性と呼ぶこととし、このとき M_f の適当な範囲で一定と見なせるならば、その極限値を考えて、

$$(da/a)/(dM_f/M_f) = h \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。

式(14)を積分して、

$$\int \frac{da}{a} = h \int \frac{dM_f}{M_f} + C_2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\therefore \ln a = h \ln M_f + C_2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $C_2 = \ln C$ とおくと、

$$\therefore a = C M_f^h \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。

式(17)を式(9)に代入すると式(18)になる。

$$\sigma = (\sigma_t - \sigma_F) \exp(-C N M_f^h) + \sigma_F \quad \dots\dots\dots (18)$$

2・3 疲労限度 σ_F の検討

次に、式(18)の要素の一つである疲労限度 σ_F について検討を加える。式(18)中の疲労限度

σ_F は、さまざまな要因の影響が考えられる。一般に引張強さ σ_t と疲労限度 σ_F の関係はかなりばらつきはあるが、ほぼ比例的関係にあるとされている⁽⁴⁾。実験データ⁽⁵⁾などから引張強さが大きくなるにつれ疲労限度の増加傾向はある程度緩やかになるが、部分的な範囲では比例的関係にあると考えることができる。そこで、疲労限度 σ_F は、ある一定の範囲で材料の引張強さ σ_t とたわみ倍率 M_f の関数であると仮定し、次式で表せるものとする。

$$\sigma_F = f(\sigma_t, M_f) \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 σ_t は材質によって決まる定数であると考えて、

$$\sigma_F / \sigma_t = \sigma' = f(M_f) \quad \dots\dots\dots (20)$$

とする。式(20)の成立要件は、

$\sigma' \rightarrow$ 大となるためには、 $M_f \rightarrow$ 小。あるいは、 $M_f \rightarrow$ 小のときは $\sigma' \rightarrow$ 大

$\sigma' \rightarrow$ 小となるためには、 $M_f \rightarrow$ 大。あるいは、 $M_f \rightarrow$ 大のときは $\sigma' \rightarrow$ 小

となる減少関数である。つまり、

$$\Delta \sigma' / \Delta M_f < 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

である。いま、 σ' の増加率 $\Delta \sigma' / \sigma'$ と M_f の増加分 ΔM_f の間にある一定の関係があるとし、その極限を考えると、

$$d \sigma' / d M_f = -b' \sigma' \quad \dots\dots\dots (22)$$

これを積分して次のようになる。

$$\int \frac{d \sigma'}{\sigma'} = -b' \int d M_f + C_3 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\therefore \ln \sigma' = -b' M_f + C_3 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、積分定数 C_3 については、次の二通りの場合が考えられる。

(i) 初期条件として、 $M_f = 1$ の場合には、つまり、 $\omega = 0$ 、つまり、 $N = 0$ のとき、 $\sigma_F = \sigma_t$ とすると、

$$\ln (\sigma_t / \sigma_t) = -b' + C_3 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\therefore C_3 = b' \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\therefore \sigma_F = \sigma_t \exp [-b' (M_f - 1)] \quad \dots\dots\dots (27)$$

(ii) 次に、 $M_f \rightarrow 0$ のとき、つまり、 $\omega \rightarrow \infty$ のときも $\sigma_F = \sigma_t$ であるとする、

$$C_3 = \ln (\sigma_t / \sigma_t) = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\therefore \sigma_F = \sigma_t \exp (-b' M_f) \quad \dots\dots\dots (29)$$

以上のように、 σ_F と σ_t の関係は、(i)の場合は、静止の特別な状態とすれば、一般的には、(ii)の式(29)で表示できるものとする。

2・4 係数 C の検討

次は、式(18)中の係数 C について検討を加える。ここで、

$$C = f(J) \quad \dots\dots\dots (30)$$

とおく、ただし、 J はたわみ係数として次式で定義する。

$$J = NM_f^{\wedge} \quad \dots\dots\dots (31)$$

いま、たわみ係数が J のときの係数を C であるとし、たわみ係数が $J + \Delta J$ のときの係数を $C + \Delta C$ であるとすれば、 $\Delta J / J$ はたわみ係数 J の変化率であり、 $\Delta C / C$ はそれに対する係数 C の変化率である。

$$(\Delta C / C) / (\Delta J / J) = (J / C) (\Delta C / \Delta J) \quad \dots\dots\dots (32)$$

式(32)の極限值をとれば次式となる。

$$(J / C) (dC / dJ) = \alpha \quad \dots\dots\dots (33)$$

この α を疲労の弾力性と呼ぶこととする。

いま、 J の適当な範囲で α が一定とみなせるならば、 C と J の関係は式(33)を解いて次のようになる。

$$\int \frac{dC}{C} = \alpha \int \frac{dJ}{J} + C_4 \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで、 $C_4 = \ln D$ とおけば、式(34)から

$$C = D J^{\alpha} \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる。式(31)を代入すれば次式となる。

$$C = D (NM_f^{\wedge})^{\alpha} \quad \dots\dots\dots (36)$$

式(18)に式(36)を代入して、

$$\sigma = (\sigma_t - \sigma_F) \exp [-D (NM_f^{\wedge})^{\alpha+1}] + \sigma_F \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで改めて $D = D^{\alpha}$ 、 $\alpha + 1 = \alpha$ とおけば次式となる。

$$\sigma = (\sigma_t - \sigma_F) \exp [-(DNM_f^{\wedge})^{\alpha}] + \sigma_F \quad \dots\dots\dots (38)$$

式(29)を代入すれば式(39)となる。

$$\therefore \sigma = \sigma_t \{ [1 - \exp (-b' M_f)] \exp [-(DNM_f^{\wedge})^{\alpha}] + \exp (-b' M_f) \} \quad \dots\dots\dots (39)$$

また、式(39)から N は次式となる。

$$N = \frac{1}{DM_f^{\wedge}} \left[\ln \frac{\sigma_t - \sigma_t \exp (-b' M_f)}{\sigma - \sigma_t \exp (-b' M_f)} \right] 1/\alpha \quad \dots\dots\dots (40)$$

2・5 数値計算とその検討

数値計算を行うにあたり、計算条件については、JIS や機械学会の実験データ⁽⁶⁾などを参考に、回転の円振動数 $\omega = 360\text{rad/s}$ 、直径 $d = 12\text{mm}$ 、試験材料の長さ・直径比 $n (= \ell / d) = 7$ 、減衰比 $\zeta = 4$ の場合とし、このときのたわみ倍率 $M_f = 0.98$ として計算を行った。

2・5・1 引張強さ σ_t と疲労限度 σ_F の関係

図1は、式(29)から引張強さ σ_t と疲労限度 σ_F の関係を求めたものである。式(29)中の係数 b' は、焼入れ、焼もどしの場合は 0.55、焼ならし、焼なましの場合は 1.2とした。ここで、

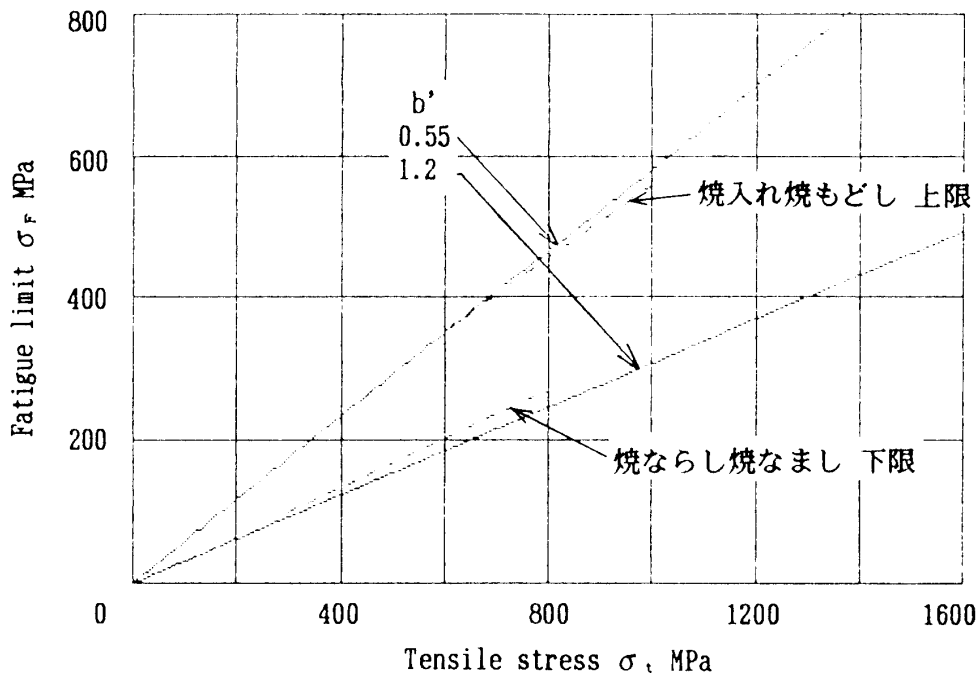
Fig.1 Relation between σ_t and σ_F

図1中の上の破線は焼入れ、焼もどしの場合の上限を示し、下の破線は焼ならし焼なましの実験データ⁽⁵⁾のばらつきの範囲の下限を示している。

図1は、焼入れ、焼もどしと焼ならし、焼なましの実験データが、係数 $b' = 0.55 \sim 1.2$ による計算の範囲内に入ることを示す。係数 b' の大小により疲労限度が変化することから、 b' は鋼の熱処理によって変化する係数と考えることができる。以上のように、式(29)は、引張強さと疲労限度の関係について部分的な範囲ではあるが実験の傾向を近似的に表しているものと考えられる。

2・5・2 引張強さ σ_t をパラメータとした計算例

図2は、式(39)中の各係数について、S10C（焼ならし）の実験データ⁽⁶⁾のばらつきの範囲の下限を基に、 $b' = 0.6$ 、 $D = 5 \times 10^{-6}$ 、 $h = 2$ 、 $\alpha = 0.5$ と設定した。

図2は、S10C、S30C、S50C（各焼ならし）の3材料をパラメータとした計算例である。引張強さはこの3材料のそれぞれ下限の値⁽⁶⁾である $\sigma_t = 320\text{MPa}$ 、 480MPa 及び 620MPa を用いて計算を行った。また、図2中の折れ線は、機械学会の実験データのばらつきの範囲を示すS10Cの下限とS50Cの上限を表している。

図2の計算結果より、式(39)は、S-N曲線の傾向を近似的に示していると考えられる。また、3つの材料による計算結果を比較すると、引張強さが大きい材料になるほど時間強度、疲労限度が共に大きくなる傾向にある。これは機械学会の実験データの傾向と一致すると考えられる。

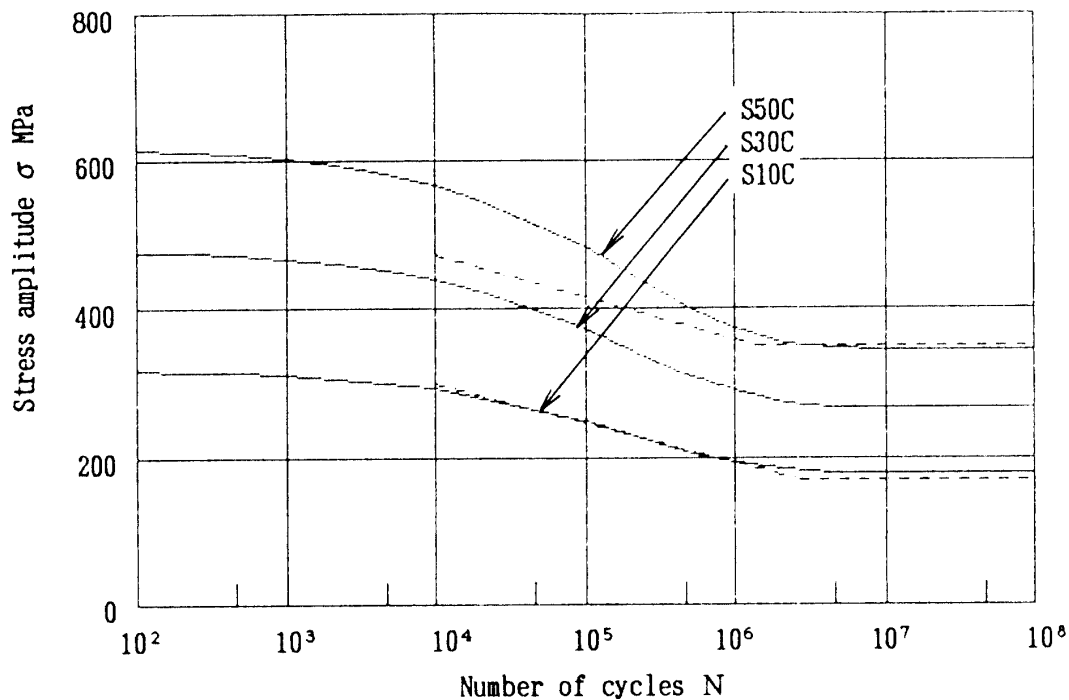


Fig.2 S-N Curves (S10C, S30C, S50C)

2・5・3 回転の円振動数 ω をパラメータとした計算例

図3は、回転の円振動数 ω をパラメータとした計算例である。式(39)中の各係数は図2と同じ値を用いた。また、引張強さについては文献(6)より、S10C(焼ならし)の上限と下限の平均値 $\sigma_t = 395\text{MPa}$ を用いて計算を行った。図3中の折れ線は、S10C(焼ならし)の実験データ⁽⁶⁾のばらつきの上限と下限を示している。

図3より、 ω が30~500rad/sでは、計算上ほとんど変化が現れない。これは、疲労強度において、回転速度が300~5000rpmではあまり変わらない⁽⁷⁾という傾向とよく一致する。また、 ω が3000rad/sになると、時間強度、疲労限度が共に大きくなる傾向がある。これは、疲労限度は荷重の繰返し速度が、標準試験より著しく速ければ上がる⁽⁷⁾という傾向とよく一致する。

このことについて、振動論の立場から検討すると、 ω が30~500rad/sでは振動数比 ω/p の変化が微小であり、それに対するたわみ倍率の変化も微小である。それによりこの間の差は計算上では殆ど現れない。また、振動数比とたわみ倍率の関係から、 $\xi \geq 1$ の場合、

$\omega/p \rightarrow \text{大のときは} M_t \rightarrow \text{小(変形} \rightarrow \text{小)},$

$\omega/p \rightarrow \text{小のときは} M_t \rightarrow \text{大(変形} \rightarrow \text{大)},$

となる。

以上のことから回転速度が大きい程、疲労強度が上がるということについては、定性的に説明できるものと考えられる。

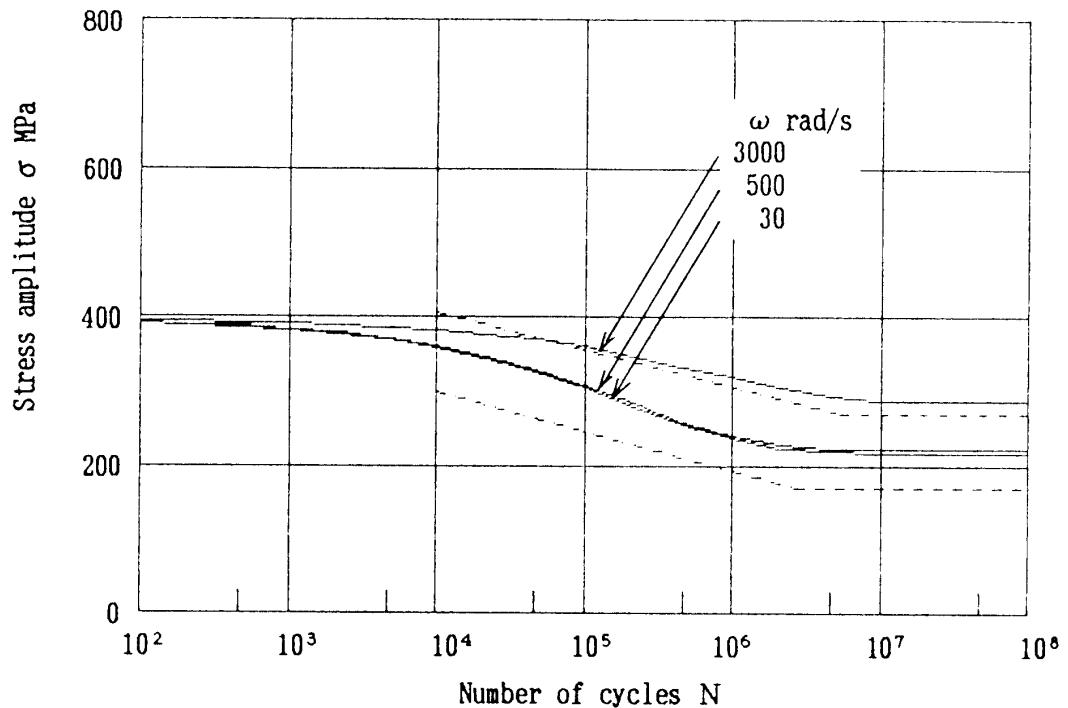


Fig.3 S-N Curves (S10C)

3. 結言

本報での回転曲げ疲労強度に関する解析的検討の結果を要約すると、次のとおりである。

- (1) 式(29)により、引張強さと疲労限度の関係は、実験の傾向と近似していると考えられる。
- (2) 式(39)は、S-N曲線の傾向を近似的に表示するものと考えられる。
- (3) また、式(40)から任意の応力振幅の材料の寿命を予測できるものと考えられる。
- (4) たわみ倍率 M_f を疲労強度の関数とすることで種々の因子による影響が理解しやすい。すなわち、 M_f は、回転軸系の質量、繰返し速度、外形寸法、断面形状、断面2次モーメント、ばね定数、弾性係数等から計算され、これらの影響をすべて包含するものと考えられる。

文献

- (1) 田知・奥村，機講論，No.95-10(1995)，268．
- (2) 田知・丁，機講論，No. 96-15(1996)，109．
- (3) 田知・武道，機講論，No.975-2，(1997)，19．
- (4) 金属材料疲労強度の設計資料 I，(1991)，2，日本機械学会．
- (5) 文献(4)のp13．
- (6) 文献(4)のp16．
- (7) 文献(4)のp5．

(平成10年12月1日受理)