塑性変形の位相幾何学による表現について

原　　洋　一*

A Topological Representation of Plastic Deformations of Metals

Yoichi HARA

Deformations of metals are mathematically expressed as displacements of each particle in a 3-dimensinal Euclidean space.　These expressions do not distinguish between elastic deformations and plastic deformations.

Microscopically, metals are usually consist of crystals, and there are definite distinctions between elastic deformations and plastic deformations considering translations of atoms in crystals.

Plastic deformations of a single crystal with translations of atoms, i.e. movements of dislocatons, have been successfully delt with, mathematically expressing dislocations as singular points in a continuum or making approximations of continuously distributed dislocations. These continuum theories of plastic deformations naturally claim the continuum to be anisotropic, owing to the existence of crystal lattice.

To deal with plastic deformations of polycrystalline aggregate as a continuum,the body must be isotropic, macroscopically averaging many crystals in every directions.

In this paper plastic deformations of such isotropic continuum are described using the theory of topological manifold of 3-dimensions.　The plastic deformations are expressed as a curvatures of the manifold, which are quantified by connections of the tangent bundle, while the elastic deformations cause no curvature on the manifold.

This paper shows a mathematical method of continuum mechanics to describe plastic deformations intrinsically different from elastic deformations.

１．緒言

金属を巨視的にみてその変形を数学的に論じる場合、古くから用いられてきた一般的な方法は物体を３次元の均質な連続体と考えて、その各点の変位を３次元の座標系によって表すものである。各点のひずみはその変位量を各座標方向に微分することによって得られる。この方法では弾性変形（あるいはひずみ）と塑性変形（あるいはひずみ）との間に表現上の区別はない。応力と

＊機械工学科

ひずみの関係（構成方程式）において弾性域と塑性域との間の相違が現れるのであって、変形あるいはひずみそのものには弾性と塑性の違いがない。

しかし金属を結晶構造のレベルで微視的にみた場合、弾性変形と塑性変形との間には明確な相違があることはよく知られているとおりである。すなわち、塑性変形は結晶格子の原子配置の乱れである転移の運動であるのに対して、弾性変形ではそのような原子配置の変動はない。転移は不連続なものであるが、これを連続体力学として取り扱う方法もすでに確立している。その方法は二つの流儀に大別される。一つは転移を数学的な特異点とみなし、その周辺におけるひずみや応力の分布を連続体力学の手法によって計算するものである。これは塑性変形を物性論的に解明する立場から転移の運動を解析する場合に用いられる方法である。もう一つは微視的には不連続な転移を巨視的な立場から数学的に連続的に分布するひずみに置き換えて、巨視的な応力とひずみの関係を論じようとする方法である。[1],[2][3][4]　これは塑性変形を力学的に解明しようとする立場である。

この後者の方法は、金属を巨視的にみて均質な連続体と考え、その塑性変形を連続体力学の立場から解析の対象としているのであるが、しかしその場合転移の方向性、すなわち結晶の方向性が問題となっているので、この連続体は方向性を持ったものである。単結晶の金属を連続体力学の立場から取り扱う場合には、これが正しい方法であるといえる。しかし多結晶金属を力学的に巨視的に取り扱う場合には、さまざまな方向を向いた多数の結晶の集まりを考えているのであるから、個々の結晶の方向性は全体として平均化されて、均質かつ等方性の連続体と考えるべきである。したがってこの場合には転移を連続的に分布させる前述の方法とは異なった手法を必要とする。

本論文は、多結晶金属を巨視的に均質かつ等方性の連続体と考えてその塑性変形を数学的に表現する方法について考察するものである。冒頭に述べた古くからの一般的方法では前述のとおり弾性変形と塑性変形との間の違いがない。本論文では塑性変形によるひずみは物体を構成する3次元空間の曲がりであると考えることによって、曲がりを持たない弾性変形と明らかに区別する。

曲がりをもつ空間を数学的に表現するために、現代数学の各分野にわたって基本的な表現上の場となっている多様体を用いることとした。多様体ははじめ曲面概念の拡張として幾何学の対象として研究されたものであったが、その研究は急速に発展して、現在では幾何とか解析とかいう立場にとらわれずに数学に現れているいろいろな対象に統一的な視点を与える場となっている。[5]

このように発展した現在の多様体の理論は工学の分野に対しても魅力的な手段を提供しているように思われる。多様体理論を利用することによって、塑性変形をその本質を損なわずに連続体の変形として表現することができた。

2．可微分多様体

数学においては多様体はきわめて一般的な概念として論じられているが、物体の塑性変形を論じる際には、多様体は現実の物体を表すものとしてその一般性を制限した形で用いることになる。

本節では、本論文で用いられる制限された多様体がどのようなものであるかを明らかにしておく。

本論文で取り上げる物体は３次元の均質な等方性の連続体である（以後塑性体と呼ぶ）。これは３次元の可微分多様体で表現することができるものと考えられる。

一般にｎ次元の可微分多様体は、厳密性を多少犠牲にして簡潔に述べれば、次のように定義されている。ｎ次元ユークリッド空間R^nの開集合と同相な近傍(座標近傍)U_α ,$\alpha \in A$によって被覆され、近傍同士が重なる領域における座標変換の関数が微分可能（塑性体を対象とする場合、４回連続微分可能であれば十分である）なハウスドルフ空間である。

塑性体の変形は、上述の定義においてｎ＝３とした３次元可微分多様体Ｂによって、完全に記述することができる。すなわち変形前の状態において定義された座標近傍によって物体Ｂ上の各点は初期座標を持ち、変形を受けた後に各点はもう一つの変形後の座標を持つことになる。Ｂは変形前と変形後の二つの座標近傍系によって被覆されている。それぞれの座標近傍系において近傍同士が重なる領域における微分可能性と同時に、二つの座標系の間の同一の点に対する座標変換に対しても４回以上連続微分可能であることが変形の連続性から必要である。これらのことはＢが３次元可微分多様体として自然に満足することのできる条件である。これが３次元可微分多様体によって塑性体を表現しようとした理由である。

３．塑性体の変形の表現

塑性体の変形が、前節に述べたような３次元可微分多様体Ｂに関する数学的概念によってどのように表現されるかについて述べる。

Ｂ上の任意の点$p \in U_\alpha$は、U_αにおける座標関数$\phi : B \to R^3$によって$\phi(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p))$へ微分同相的に写像される。

同様に、塑性体が変形を受ける前の状態を表す座標関数をϕ_0で表し、 $\phi_0(p) = (x_0{}^1(p), x_0{}^2(p), x_0{}^3(p))$とする。

ϕ_0からϕへの変形には弾性変形と塑性変形が含まれている。

まず弾性変形は点ｐにおけるＢの接ベクトルがϕ_0からϕへの変形によって受ける変化であると考えられる。これは接ベクトルが各点における結晶格子を表しているという考えが根拠となっているもので、従来の連続的に分布する転移に関する理論において普通に用いられている仮定である。本論文においては結晶構造について論じることはないが、弾性変形や弾性応力は各点における結晶の中の原子間の距離の変化に起因することには違いがないので、この仮説を採用することに問題はないと思われる。

点ｐにおける接ベクトルの全体は接空間B_pを作る。B_pは３次元ベクトル空間であって、その３個の基としてはＢの座標関数から誘導されるベクトルを用いることができる。すなわちϕ_0から誘導される基$v_{0ip} = (\partial / \partial x_0{}^i)_p$, （ｉ＝１,２,３）が、$\phi_0$から$\phi$への変形によって、$\phi$から誘導される別の基$v_{ip} = (\partial / \partial x^i)_p$, （ｉ＝１,２,３）へと弾性的に変形したと考えられる。この変形による弾性ひずみは材料力学で通常用いられている初等的な方法で求められる。

すなわち、Bのリーマン計量gを、各点pにおけるB_pの内積$g_p(v_{0ip}, v_{0jp})$が実際の物理的な計量値(長さと角度)を表すように決められているとしたとき、点pの弾性ひずみの座標系ϕ_0方向の各成分は次式によって表される。

$$\varepsilon_{ij} = (g_p(v_{ip}, v_{jp}) - g_p(v_{0ip}, v_{0jp}))/2 \qquad (1)$$

このひずみに対応する応力値も上式のひずみ成分から通常のフックの法則によって求められる。

各点における接空間のリーマン計量がその点の弾性ひずみを表しているのに対して、塑性ひずみは近接する2点の弾性ひずみの間の関係において現れる。すなわちある点におけるひずみが弾性的であって塑性ひずみの成分が全く含まれていない場合には、その点における接空間とその点に十分に近接する点における接空間とは重なり合った同一のベクトル空間となるが、その2点をいかに近づけても食い違いの成分が残るとき、それが塑性ひずみを表すことになる。近接する2点の接空間の間の関係を示す数学的な概念が接続である。数学的な概念である接続が物理的な塑性ひずみとどのように対応するかについて以下に述べる。

接続の定義には、B上の全ての点pにおける接空間B_p全体の集まりである接バンドルT(B)が用いられる。

$$T(B) = \bigcup_{p \in B} B_p \qquad (2)$$

T(B)にはBとR^3の直積空間としての位相を導入することにより、T(B)もまた可微分多様体となっている。T(B)の元は$(p, v), v \in B_p$で表される。T(B)からBへの射影πが次のように定義されているものとする。

$$\pi : T(B) \rightarrow B, \quad \pi(p, v) = p \qquad (3)$$

Bの座標近傍U_αにおける座標関数$\phi = (x^1, x^2, x^3)$によって$B_p, p \in U_\alpha$における座標関数$\phi_* = (\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$が誘導されていることから、接バンドルT(B)にも次のような自然な座標関数が定義されていると考えることができる。すなわち$T(U_\alpha) = \pi^{-1}(U_\alpha)$を座標近傍として、$T(U_\alpha)$の任意の点$(p, v)$を$(p^1, p^2, p^3, v^1, v^2, v^3) \in R^6$、ただし$p^i = x^i(p), v = v^i \partial/\partial x^i$、に対応させる座標関数である。これは、pを固定して考えれば、次のような微分同相写像で表すことができる。

$$\phi_{\alpha,p} : B_p \rightarrow R^3, \quad \phi_{\alpha,p}(v) = (v^1, v^2, v^3) \qquad (4)$$

U_α中の異なる2点p, qに対してB_pからB_qへの微分同相写像が次のように定義される。

$$r_{\alpha,pq} = \phi_{\alpha,q}^{-1} \cdot \phi_{\alpha,p} \qquad (5)$$

さらにB上の異なる二つの座標近傍U_α, U_βにそれぞれ属している2点p, qに対してB_pからB_qへの微分同相写像を次のように定義することができる。

$$r_{\alpha\beta,pq} = \phi_{\beta,q}^{-1} \cdot \phi_{\alpha,p} \qquad (6)$$

本論文で取り扱う塑性体においては全ての点において均質、等方性であるから、任意の2点p, qが、$r_{\alpha,pq}$あるいは$r_{\alpha\beta,pq}$によって数学的に微分同相である上に、この微分同相写像によって(1)式に示される弾性ひずみとそれに対応して生じる応力との関係が保存されると考えてよい。あるいは逆に、この関係が保存される物質を塑性体と定義すると考えてもよい。

T（B）もまた可微分多様体であるから、T（B）上の任意の点xにおいて接空間が考えられる。T（B）をPという記号で表した場合、PからBへの射影πに対して、Pの接空間P_xからBの接空間$B_{\pi(x)}$へのベクトル空間としての線形写像π_*が誘導される。線形写像π_*の核を$V_x(P)$で表すと、$V_x(P)$はP_xのベクトル空間としての部分空間になっている。したがって

$$P_x = V_x(P) + Q_x \quad (\text{直和}) \tag{7}$$

の形に書き表すことができる。P_xのベクトルの$V_x(P)$に属する成分を垂直成分、Q_xに属する成分を水平成分という。

P上すなわちT（B）上の全ての点xにおいてQ_xが与えられたとき、可微分多様体Bに接続が定義されたことになる。すなわちB上の近接する2点における接ベクトルを、π_*^{-1}によってT（B）上の接ベクトルに持ち上げたとき水平的なベクトル場でつなげることができる場合に、このB上の2点における接ベクトルは平行であるとみなすことができる。このようにしてB上の近接する2点における接空間の間の関係がつけられることになる。

B上の各点の弾性ひずみがその点における接空間に現れているとき、近接する2点における接空間のひずみが上述の意味で水平的であれば塑性ひずみは存在せず、そうでなく垂直成分を持つとすればそれが塑性ひずみを表すことになる。

4．結言

均質で等方性の物体である塑性体の変形およびひずみを3次元の可微分多様体によって表現する方法について考察を行った。

各点の弾性変形はその点における接空間の座標関数の変換によって表される。その変形に対応する弾性ひずみは接空間に定義されたリーマン計量の変化によって表される。そしてその点における応力はこの弾性ひずみに対してフックの法則から求められる。

塑性ひずみは互いに近接する点の接空間同士の関係を表す接続によって表現される。弾性変形のみで塑性ひずみが発生していない場合には、多様体としての接続は平坦、すなわち多様体は平坦であるが、塑性ひずみが一部に発生すると多様体は曲がりを持つようになる。3次元多様体の曲がりは、3次元世界に住む我々にとってはイメージしにくいことであるが、各点における接空間の中の弾性ひずみを隣接する点におけるそれと比較するときに目に見える数値となって現れることになる。

本論文においては可微分多様体の理論が塑性体の変形を表現するのに適していることを示すことに主眼をおいたため、数学的展開が中心となった。実際に種々の形状を持った物体のさまざまな変形について具体的に弾性ひずみと塑性ひずみを求め、そして応力を計算してみて、実験のデータなどと比較することが重要であるが、次の機会に試みたい。

参 考 文 献

1) B.A.Bilby,L.R.Gardner,A.Grinberg and M.Zorawski : Continuous Distributions of Dislocations, Proc. Royal Soc., 292A(1966), p105

2) V.L.Berdichevskii and L.I.Sedov : Dynamic Theory of Continuously Distributed Dislocations. Its Relations to Plasticity Theory, J. App. Math. and Mech., vol.31(1967), p.989

3) C.C.Wang : On the Geometric Strucrures of Simple Bodies, a Mathematical Foundation for the Theory of Continuous Distributions of Dislocations, Arch. Rational Mech. Anal., vol.27(1967), p.33

4) K.Shiozawa and M.Ohnami: Study on Flow Stress of Metal by Means of the Geometrical Aspect of the Continuously Dislocated Continuum, Symp. Mechanical Behavior of Materials, Kyoto(1973), p.93

5) 志賀浩二 ： 多様体論、岩波書店 (1990)

(平成４年12月19日受理)