

FFT スペクトル解析の研究

白 崎 智 義*

A Study on Image Analysis of FFT Spectra

Chiyoshi SHIRASAKI

Fourier Transform is well-known as one of the image processing technique.

Studies have been made to develop an algorithm extracting a picture character on computer display with this transformation.

Among advancing this study, the following items were confirmed.

The complicated spectra obtained by Fourier Transform should have been influenced periodically by a correlation of the picture element locations. This phenomenon has been experimentally confirmed by graphics.

In this study, 1-dimensional Fourier Transform was used.

1. まえがき

フーリエ変換は画像処理技術の一つとしてよく知られている。そこで、この変換を画像文字の形状認識並びに抽出に応用することを考えたが、この研究の過程の中で、非常に複雑な形をしているフーリエ変換のスペクトルが、画素相互間の位置関係によってどのように周期的影響を受けているかを、グラフィックス的に知ることが出来た。尚、本研究のフーリエ変換は一次を使っている。

2. 理論

一般にN分割された複数個の離散的画素データ $f_d[L]$ ($L=0 \sim N-1$) が一列に配置されていると考えた場合、このデータ一つ一つに回転子 (W) の $-LI$ 乗を乗じたものを総計して、

$$F_d[I] = \sum_{L=0}^{N-1} f_d[L] W^{-LI} \quad (1)$$

とする。ここで、回転子は、

$$W = e^{-j(2 \cdot \text{pai} \cdot I/N)} \quad (: \text{pai は } +\pi \text{ か } -\pi)$$

と表されるから、(1)式は、

$$F_d[I] = \sum_{L=0}^{N-1} f_d[L] (\cos(2 \cdot \text{pai} \cdot LI/N) - j \sin(2 \cdot \text{pai} \cdot LI/N)) \quad (2)$$

* 電気工学科

となる。

次に、(1) 式の計算速度を速める為に、離散画素データの並びを奇数番目毎と偶数番目毎の2グループに分けた並びに変更して、それぞれのグループでの積算をすると、

$$= \sum_{L=0}^{N/2-1} f_d[2L]W^{-2LI} + \sum_{L=0}^{N/2-1} f_d[2L+1]W^{-2LI} \cdot W^{-1} \quad (3)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} B[I] &= \sum_{L=0}^{N/2-1} f_d[2L]W^{-2LI} \\ C[I] &= \sum_{L=0}^{N/2-1} f_d[2L+1]W^{-2LI} \end{aligned} \quad (4)$$

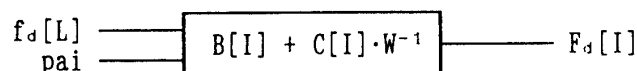
とおくと、

$$= B[I] + C[I] \cdot W^{-1} \quad (5)$$

となる。この高速フーリエ変換(FFT)を次のような手法で利用する。

(図-1) のボックス内に (5)式に従うソフトを入れておき、これによってフーリエ変換を行う。そして、画素データ ($f_d[L]$)と pai を入力するとそれに応じた変換出力が得られる。

pai は $+\pi$ か $-\pi$ である。ここで、もし pai が $+\pi$ ならば変換出力はスペクトルである。引き続き、この出力をビット反転し、これをそのまま $f_d[L]$ として新たな入力とする場合、併せて pai を $-\pi$ とすれば逆変換の出力が得られて元の画像が復元される。



(図-1) FFTのブロック図

本研究では、元画像がフーリエ変換された時に生ずるスペクトルの波形が何に基づいて変化しているかを解析する。

3. 1次元と2次元の変換比較

画像に対するフーリエ変換は、X,Y 両方向の2次元で行うのが通例であるが、X あるいは Y の一方向の1次元だけでも変換できる。例えば、 16×16 の画像平面の中に、

1 行目 (a) => 0 0 0 3 5 5 0 0 0 0 0 0 0 0

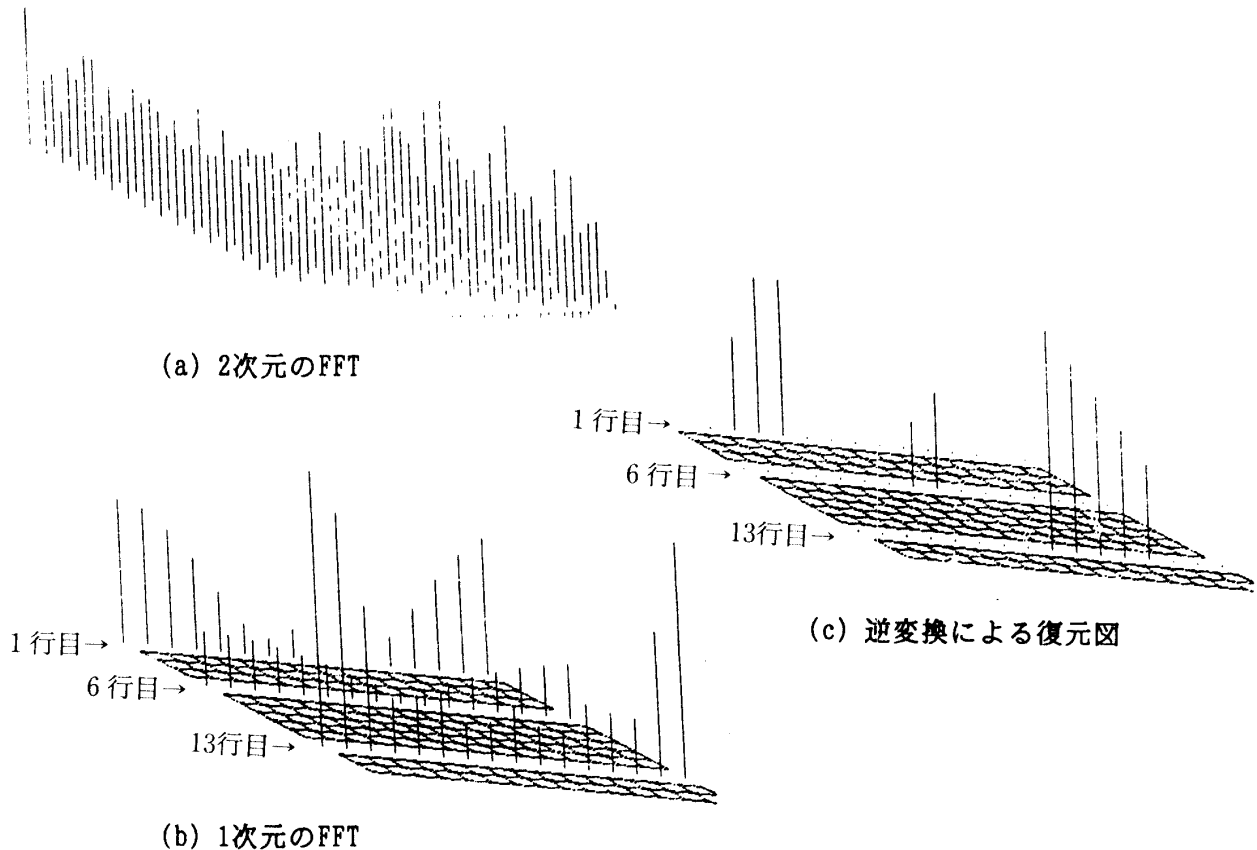
6 行目 (a) => 0 0 0 0 0 0 0 2 3 0 0 0 0 0 0

13 行目 (a) => 0 0 0 0 0 0 0 0 7 6 5 4 3 0 0 0

のような画像データが含まれていると仮定した場合、これらに対するフーリエ変換の結果は、

(図-2) のようになる。即ち、(a) 図は 2次元の場合において、(b) 図は 1次元の場合における FFTの結果である。そして、両者とも逆FFTの結果は同じ(c)図となる。つまり、FFTに継続して逆FFTを行うことで元の画像を復元するだけならば、たとえデータが画像であっても、一方向しか変換しない1次元で十分であり、演算処理時間がかなり少なくてすむ利点

がある。そしてまた同図から多数に点在する画素の位置とスペクトル波形との関連性が確実に把握できることから、本論では、一次元を利用してスペクトル波形の実態を追求している。



(図-2) 1次元と2次元のスペクトル比較

4. 画素の位置変化によるスペクトル周期の変化

画像に対する一次元FFTの場合、その画素の位置がスペクトルの周期に及ぼす影響は次の通りである。

尚、説明の都合上、扱う離散的画素データは、すべて分割数できまっている N 個の並びをしている1元的なものとして考えている。従って、この一連の画素並びの中には、濃度が0であろうとなかろうと、すべてが含まれている。そして、このような一連の画素並びを1グループとして扱っている。

そして、さらに、略記号として、 N 個に分割された画素並びに対する名前を a, b 、画素の長さを画素の数で表すことにして $L(a), L(b)$ 、そして、これによって生ずるスペクトルの周期を $P(a), P(b)$ 、さらにスペクトルの形状を $S(a), S(b)$ で表わすこととする。尚、分割数は、 $N=16$ とした。従って、扱う画素平面の広さは16行16列となる。

- (1) 2つのグループにおいて、両者における画素並びの長さが等しい時は、同じ周期のスペクトル波形となる。即ち、2つの画素並びである $(a), (b)$ の長さが、 $L(a)=L(b)$ ならば、周期

においても、 $P(a)=P(b)$ となる。

例えば、第1行の画素並び(a)と、第9行の画素並び(b)を、それぞれ

1 行目 (a) \Rightarrow 0 0 5 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

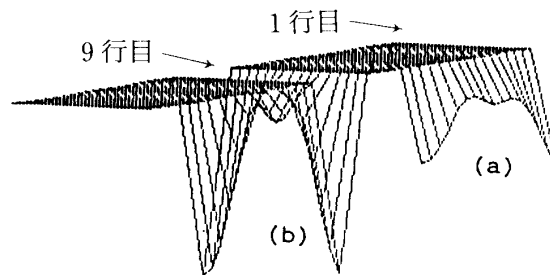
9 行目 (b) \Rightarrow 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 5 3 0 0

とした場合、それぞれの有効画素の長さが、

$$L(a) = 521$$

$$L(b) = 553$$

で、ともに同じ連続3画素であるから、それぞれの $P(a), P(b)$ は、(図-3) が示すように同じ周期となる。



(図-3) 連続3画素のスペクトル周期

尚、上の考察の発展として、次の各場合が成り立つ。

(ア) 一行の画素グループ内で考えた場合、ある一つの画素列は、その行内ならどこにあってもスペクトルの周期に変更は無い。

例えば、下記のデータは、 $L(a)$ のデータ (500005, ※) が一つにまとまっているのに対して、 $L(b)$ では 500005 の並びが右端の (5000, ※1) と、左端の (05, ※2) の2つに分けられている。ここで、(b) の方は、データ並びの両端が外回りで接続されていると考えれば、両者のスペクトル周期 $P(a), P(b)$ は同じになる。(図-4 参照)

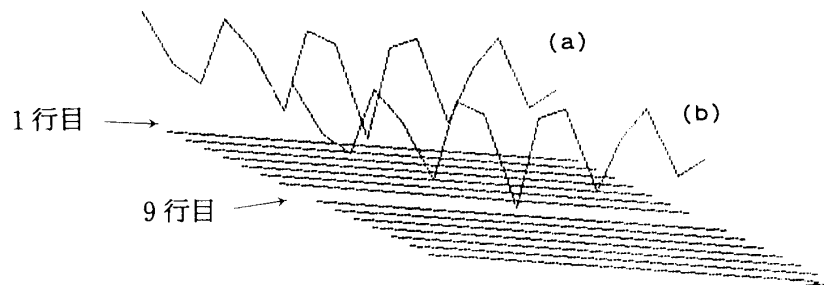
1 行目 (a) \Rightarrow 0 0 0 0 0 5 0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 0

$L(a) ※$

9 行目 (b) \Rightarrow 0 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 0 0 0

$※2$

$L(b) ※1$



(図-4) $P(a), P(b)$ の周期の比較 ($L(a)=L(b)$ の場合)

ともあれ、 $L(a)[※1] = L(b)[※2]$ が成立するならば、この2つのスペクトル周期は同じである。

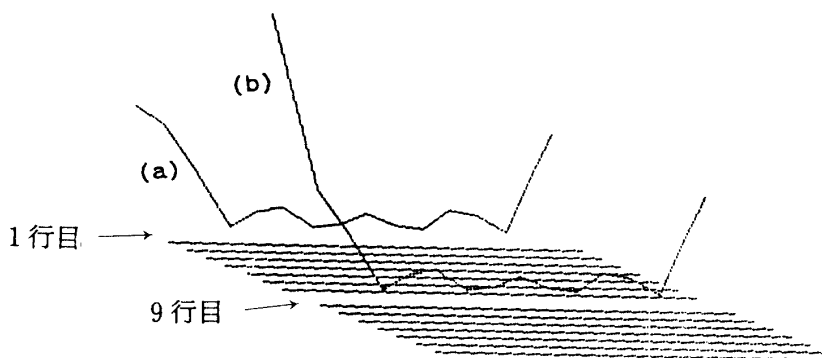
(イ) 次の2つも、第1行と第9行のデータであるが、※1の長さは $L(a)=5$ で、※2の長さは $L(b)=11$ であるから、 $L(a)[※1]$ と $L(b)[※2]$ は等しくはないが、これも同じスペクトル周期となる(図-5参照)。ところが、周期は同じであっても、(b)は(a)に比べて直流成分が大きくなっている。

1 行目 (a) \Rightarrow $\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
 $\frac{L(a) \times 1}{}$

9 行目 (b) \Rightarrow $\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & & & & & \times 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & L(b) & \times 2 \end{array}$

この場合は、両者の間に次式が成り立っている。

$$L(a)[\times 1] + L(b)[\times 2] = 16$$



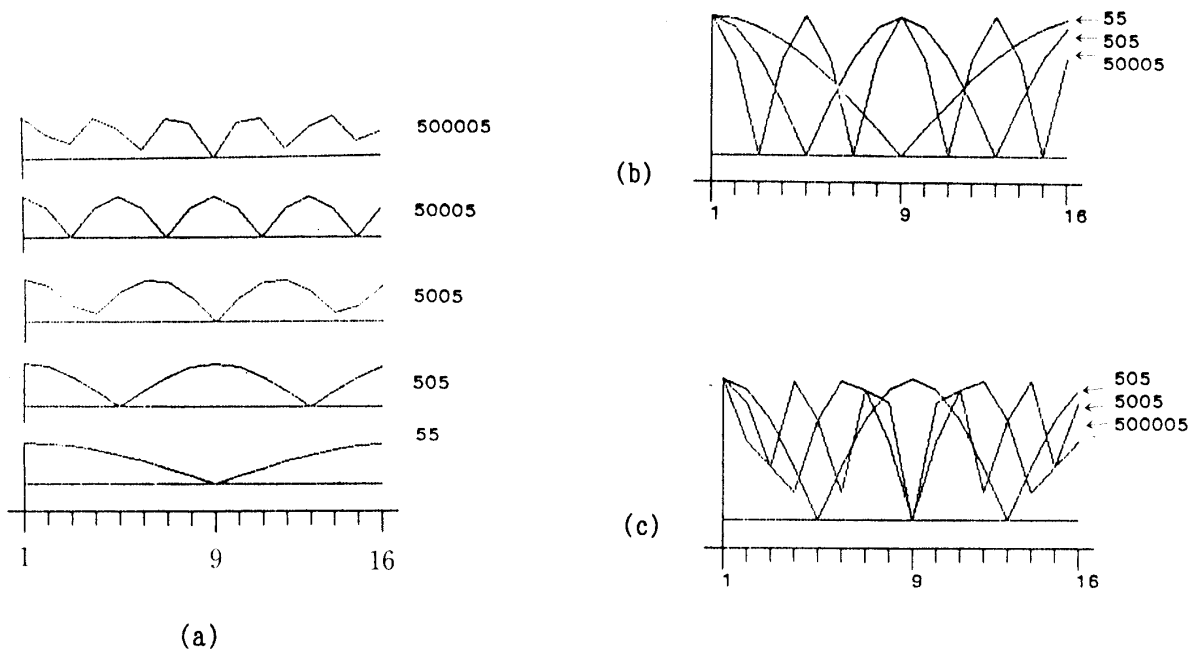
(図-5) $P(a)$, $P(b)$ の周期の比較 ($L(a)+L(b)=16$ の場合)

(2) 画素の位置変化による周期の逐次変化の状態を調べる為、いろいろの画素並びについて、2個の画素の間をすべて濃度をもたない 0 データにしておく。そして、この 0 の個数が多くなるに従い、スペクトル周期の変化を逐一追っていくと、スペクトルの波数が漸次多くなっていることが分かる。例えば、下の例が示すように、両端だけが濃度 5 で、その間の 0 の個数を順次増大すると周期の変化が見られる。

$$L(a) = 55$$
$$L(b) = 5 \ 0 \ 5$$
$$L(c) = 5 \ 0 \ 0 \ 5$$
$$L(d) = 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5$$
$$L(e) = 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5$$

ここで、 $L(a)=55$ が基本の周期であると考え、 $L(b)$ は2周期、 $L(c)$ は3周期、 $L(d)$ は4周期といった具合に周期が大きくなる。とはいっても、 $L(c)$ の3周期は、波形が大きく歪んでいて、きれいでない。この現象は、基本周期のスペクトル波形を順次分周したものと考えることが出来るが、データが離散的であることから、2の倍数になる周期だけがなんと

が正常な波形を保っている。(図-6)の中で、(a)図は各スペクトルの変化が分かるように上下にならべてある。(b)図は周期が2の倍数となる場合の $L(a)$, $L(b)$, $L(d)$ を、(b)図はそれ以外の場合の $L(c)$, $L(e)$ のスペクトルを示している。なお、(b), (c)両図とも倍率を同じ数値で表示している。



(図-6) 画素の位置と周期との関係

尚、当然ながら、上の例において、0の部分すべて0でない濃度で置き換えても、スペクトル周期に変化は無いが、濃度が違ってくるので振幅が大きく変化する。

(3) 下に示すような4通りの配列をした画素グループの間には次の関係がある。即ち、各グループのスペクトル輝線の位置は、(図-7)が示すように、一行に並ぶ16画素の中の状態に注目すると、

(ア) 60 を6回繰り返す(a)データの場合の周期は、 $P(a)$

(イ) 6600 を4回繰り返す(b)データの場合の周期は、 $P(b)$

(ウ) 66660000を 2回繰り返す (c)データの場合の周期は、 $P(c)$

(エ) 6666666600000000 だけの(d)データの場合の周期は、 $P(d)$

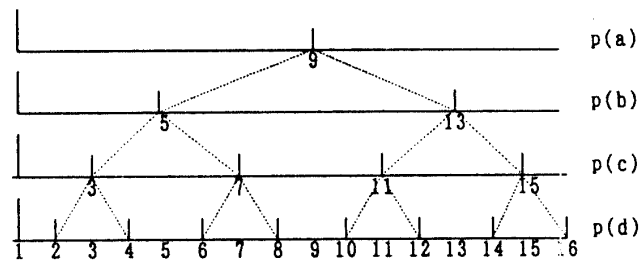
のようになっている。そして、9 を境に左右対象な波形になっている。

(例) (a) => 6 0 6 0 6 0 6 0 6 0 6 0 6 0 6 0

(b) => 6 6 0 0 6 6 0 0 6 6 0 0 6 6 0 0

(c) => 6 6 6 6 0 0 0 0 6 6 6 6 0 0 0 0

(d) => 6 6 6 6 6 6 6 6 0 0 0 0 0 0 0 0



(図-7) 繰り返す画素配列の場合の周期

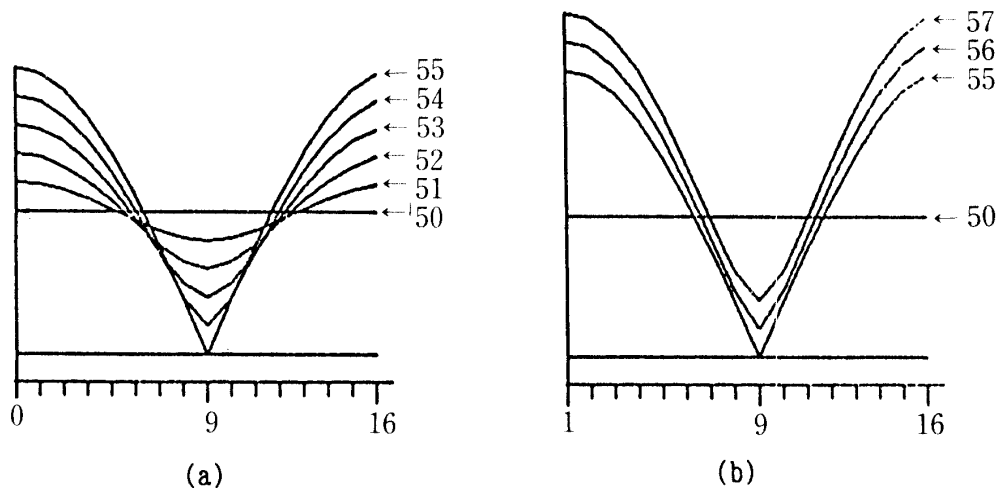
5. 画素の濃度によるスペクトル波形の関係

スペクトルの波形の振幅が画素の位置に影響を受けている実態が次のように分かった。

2つの画素並びの間においては、それぞれの長さが同等の場合周期が同じであるが濃度の違いによってスペクトルの振幅が上下に伸び縮みする変化がある。

(1) 連続2データの場合

例えば、50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57 なる各連続2データで考えた場合、各スペクトルの形状は(図-8)のようになる。この現象によると、2桁数値の右側の濃度だけを順次1から上げると、50の場合に発生する横に一直線のラインを境に、凹み線の外側のラインは上昇一方なのに対し、内側のラインは下降し続ける(a)。そして、0レベルのラインに達すると反対に上昇している(b)ことが分かる。

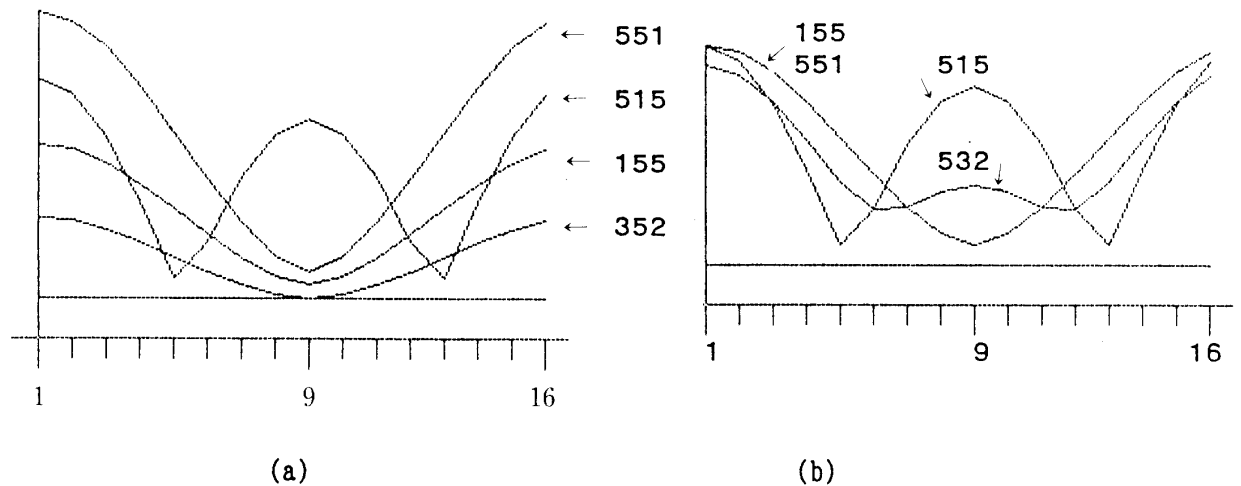


(図-8) 連続2画素の濃度と振幅との関係

(2) 連続3データの場合

一つの画素並びの両端だけを交換してもスペクトルの振幅に変更は無い。(図-9)の(a)は連続3データの場合における濃度と振幅との関係を示したものである。この中で、例えば、 $L(a) = 5\ 5\ 1$, $L(b) = 1\ 5\ 5$ について考えると、 $L(b)$ は $L(a)$ の両端を交換し

たものだが、倍率を同じくして表示した(図-9)(b)によると、それぞれの振幅は同じである。尚、両端に挟まれた中の数値を、例えば、 $L(c) = 515$ のように変更すると周期が同じでも、振幅が変化する。



(図-9) 画素データの変更による振幅の変化

6. まとめ

今回の研究で、一次元に於けるフーリエ変換のスペクトル波形の複雑さの基本構造が次のようなものであることが分かって来た。

- (1) 画素の位置関係でスペクトルの周期がきまる。そして、その周期の基本型は連続2データの場合に示されるスペクトルである。
- (2) 画素の濃度はスペクトルの振幅の大きさに影響を与える。
- (3) 従って、画素の位置と濃度の組合せ混合では、大変に複雑なスペクトル波形が発生する。
- (4) ところで、一組の画素データが分割された領域内なら何処にあってもスペクトルの周期、振幅ともに変化はない。しかし、位相関係でそれぞれの違いが起きている。

実際には、多数の画素の相互位置関係で決まる複雑多岐な周期と、濃度の大きさの違いで変化する千差万別なスペクトルの振幅が混在し、さらに位相関係のデータが加わってより一層複雑なものになっている。

参 考 文 献

- (1) 白崎智義: フーリエ多数回変換に関する研究, 福井工業大学研究紀要, 第24号(1994), 7~14

(平成6年12月17日受理)