

周期粗さ要素の粗面の円管摩擦損失評価法

藤 井 貴 広*・三 宅 裕**

A prediction method of flow resistance in a pipe having periodic roughness elements

Takahiro Fujii and Yutaka Miyake

Modeling of a practical rough surface is required in CFD to meet with limited computer power. Authors intend to create a model of a rough surface in which effects of roughness elements are represented by plane circles having adequate normal and shear stress. In this report, a prediction method of the flow resistance in a pipe flow having periodic roughness elements is proposed to give a basis of validity of the modeling. This simple and novel method is applicable to calculate the flow resistance in pipe flows in the practice of engineering.

1. はじめに

円管粗面壁の摩擦損失を見積もることは実際の工業において極めて重要で、様々な分野で需要が大きい。Nikuradse[1]は粗面円管の管摩擦係数 λ の、さまざまな粗さ高さ k と幅広いレイノルズ数 $Re=V_m d/\nu$ に対する実験を行った。ただし、 V_m は円管内平均流速、 d は円管直径、 ν は動粘性係数である。この実験は滑面に粒径のそろった砂粒粗さを均一に貼り付けた人工的な粗面についての実験で、粗面は準定型粗面であるが、粗さの振舞いに関する普遍的な物理を明らかにしている。粗さ高さが粘性底層を超えるかどうかが決定的な要因で、超える場合は完全粗面となって λ は k のみの関数で、レイノルズ数には無関係に一定になる。またこの測定結果をもとにムーディ線図[2]が作られて実用管に応用されている。これは実用管の粗さを砂粒粗さで表した等価相対砂粒粗さを指定し、実用管におけるレイノルズ数に対する管摩擦係数を簡便に算定できるようグラフ化したものである。この算定方法は、迅速、簡便に管摩擦係数を算出できるため有用ではあるが、経験値からの大まかな値であり、高い精度が求められる最近においては十分な方法ではない。近年、電子計算機の発達に伴い、様々な現場で数値シミュレーションを用いて流れを予測することが可能になってきている。この手法は粗面の流れにも適用が試みられており、たとえば管内流については、粗面上の各粗さ要素の抗力を詳細に計算の基礎としているため、精度の良い管摩擦係数の算出が期待できる。しかし一般的な粗面壁は不規則な凹凸の集合体であり、全ての凹凸を解像した数値シミュレーションを行うためにはスーパーコンピュータレベルの容量の計算が必要で、粗さ要素をモデル化した計算手法が不可欠である。現状の粗面壁のモデル化手法には半球等の定型粗さ要素が規則的に配置された粗面についてであり、Taylorら[3]やTarada[4]は、その粗さ要素の個々の高さ方向に離散的に抗力のモデル式を与えるという手法を提案している。この方

* 応用理化学専攻大学院生 ** 機械工学科

法では要素ごとに局所レイノルズ数 $Re_d = \hat{u}_d d_p / \nu$ を定義し、それぞれに局所抗力係数 $C_{Da} = 2D / \rho \hat{u}^2 A_p$ のモデル式を与えてそれぞれの粗さ要素の抗力を推定する。ただし、 \hat{u} は粗さ要素高さでの速度、 d_p は分割された粗さ要素の代表寸法、 D は抗力、 ρ は密度、 A_p は粗さ要素の前面面積である。このモデルは定型粗面の、円管などの簡単な断面管については実用上十分な精度が得られるが、不規則粗面に対する適用は難しい。したがって、数値シミュレーションを用いた手法は不規則粗面に適用するには未だ問題があり、定型粗面に対しても計算コストが過大である問題が残されている。筆者らは不規則粗面のモデル化について研究を進めており、実用上の不規則粗面に対して流体力学的に重要な粗さを抽出し、抽出された粗さを適当な粗さ要素に置き換え、さらにその領域の底面にせん断応力と法線方向の力を与え、それらの抗力を面で定義する不規則粗面のモデル化を検討している。そこで、この不規則粗面モデル化の考え方の妥当性を確認するため、ここでは周期的定型粗さ要素の粗面の円管において、粗さ要素単体の抗力係数を面で定義し、独自のアルゴリズムで摩擦損失を評価する。得られた結果は文献で得られるデータと比較して検証する。この手法は、実験によらず数値シミュレーションで粗さ要素の抗力を評価し、定型粗面における円管の管摩擦係数を簡便に算出するために利用することができる。

2. 粗さ要素の抗力計算

粗さ要素として滑面上の半球を考える。粗面乱流の粗さ要素では、粗さ要素頂点の高さでの近寄り速度 \tilde{u} と粗さ高さ k で作るレイノルズ数 $Re_k = \tilde{u}k / \nu$ が約 600 以上で完全粗面になると考えられるが、滑面への遷移領域では層流にもなりうる。そこで、単一の半球の抗力をこれら二つの場合に分けて算定する。

2.1. 層流の場合

図1に示すように、平面上に置かれた半径 a の半球を考える。半球の中心に原点をおき、直角座標系 x, y, z を考え、流れ(x)方向に L_x 、高さ(y)方向に H 、幅(z)方向に L_z の直方体の計算領域を考える。 x, z 方向には原点に関して対称に境界壁をとり、 y 方向には壁面を底面として上半面を考え、 $y = H$ の面に速度 V で移動する平面壁を置く。半球を置かないときの流路内の流れ(基礎流れ)はポアズイユ流れとし、粗さ高さレイノルズ数 $Re_k = \tilde{u}a / \nu$ を定義する。基礎流れの速度

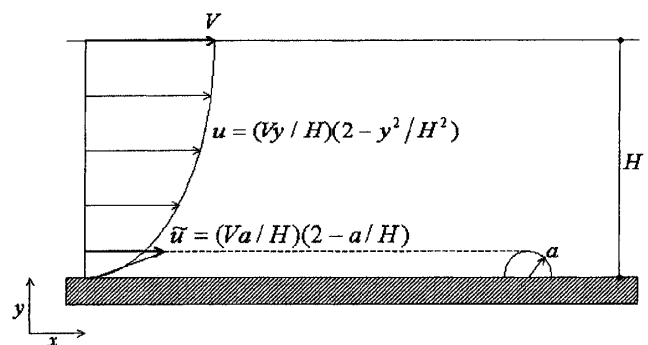


図1. 流路と粗さ要素

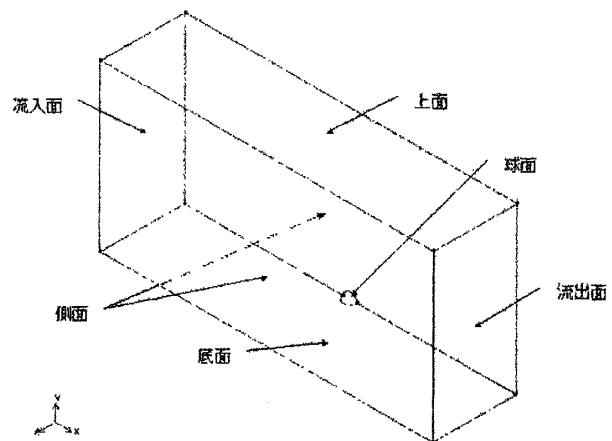


図2. 計算モデル図

分布は $u = (Vy/H)(2 - y/H)$ であるから $\tilde{u} = (Va/H)(2 - a/H)$ で、壁面の摩擦応力は $\tau_{w0} = 2\rho\nu W/H$ である。ただし、 ρ は流体の密度である。粗さ要素の高さを壁関数で表した無次元高さは $a^+ = au_\tau/\nu = a\sqrt{2V/\nu H}$ である。実際の計算に使用したモデルを図 2 に示す。 (x) 方向に流入、流出面を設け、底面、半球面は静止壁、上面を移動壁、側面をフリースリップ面としている。計算は、FLUENT 社の FIDAP を用いた。

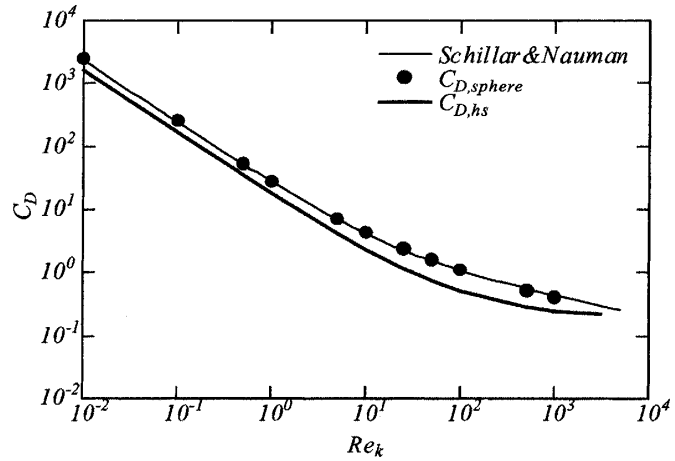


図 3. 単一半球抗力係数

粗さレイノルズ数 $Re_k = \tilde{u}a/\nu$ に対する抗力係数の計算結果を図 3 に示す。図中の●印は、図 2 に示す計算モデル図において底面の境界条件をフリースリップ条件とした、一様流中の球抗力係数 $C_{D,sphere} = 2D_{sphere} / \rho\tilde{u}^2\pi a$ の計算結果で、細い実線は Schiller & Nauman[5] の実験結果を示す。両者の結果は良く一致しており、計算精度が高いことが分かる。また太い実線は壁面上に置かれた半球の抗力係数 $C_{D,hs} = 4D_{hs} / \rho\tilde{u}^2\pi a$ の計算結果で、一様流中の球と比較し小さい値を示すが、レイノルズ数に対して抗力係数の変化の推移は基本的に同様に变化する。この結果から、壁面上に置かれた半球単体の抗力係数とレイノルズ数との関係式

$$C_{D,hs} = \frac{17}{Re_k} (1 + 0.0794 Re_k^{0.543} + 0.0105 Re_k) \quad (1)$$

を得ることができる。

2. 2. 乱流の場合

乱流計算の計算モデルを図 4 に示す。乱流の場合、粗さ要素の後流は層流のそれに比べて長くなり、半球抗力を見積もるためにはその影響を無視できない。したがって、図 4 に示すように、単一半球の中心間無次元距離 $L_x = 6$ とした無限に半球が存在する条件に変更する。すなわち、流れ方向 $L_x = 6$ の両端面を周期条件とし、スパン方向の計算領域を $L_z = 3$ とする。高さ方向は層流計算と同様である。また乱流モデルは標準 $k-\varepsilon$ モデルを使用する。計算結果を図 5 に示す。●は(1)式で、△と□は周期条件で行った層流計算の結果で $Re_k \leq 50$ の範囲における計算結果である。ただし△は代表長さを \tilde{u} で定義し、□は半球頂点高さにおける面の平均流速 \bar{u} で定義している。すなわち、△の抗力係数は $C_{D,hs} = 4D_{hs} / \rho\tilde{u}^2\pi a^2$ で□の抗力係数は $C_{D,hs} = 4D_{hs} / \rho\bar{u}^2\pi a^2$ で

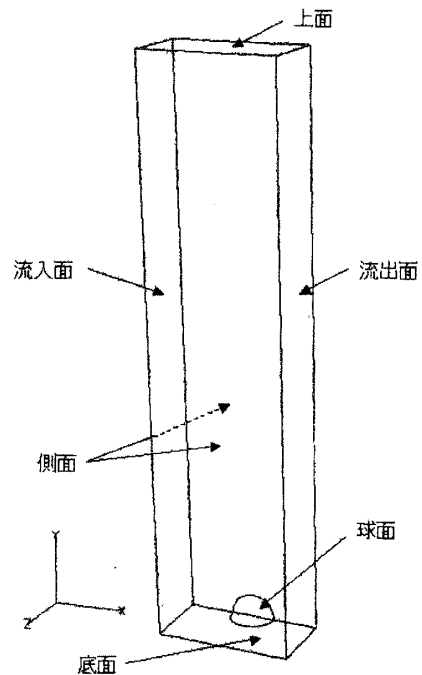


図 4. 計算モデル図

定義される。単一半球の場合と、 \bar{u} を代表速度に用いた周期条件の場合の抗力係数の結果はほぼ同じであり、層流域での粗さ要素の干渉は見られない。周期条件の計算では \bar{u} の値は計算過程で若干の変化があるため \bar{u} で無次元化することが望ましいが、 \square がその結果である。この場合も単一半球の抗力係数と大きな違いが見られない。したがって、 \bar{u} の変動は少ないことがわかる。 \blacktriangle と \blacksquare は周期条件で乱流計算を行った結果で、それぞれ \bar{u} と

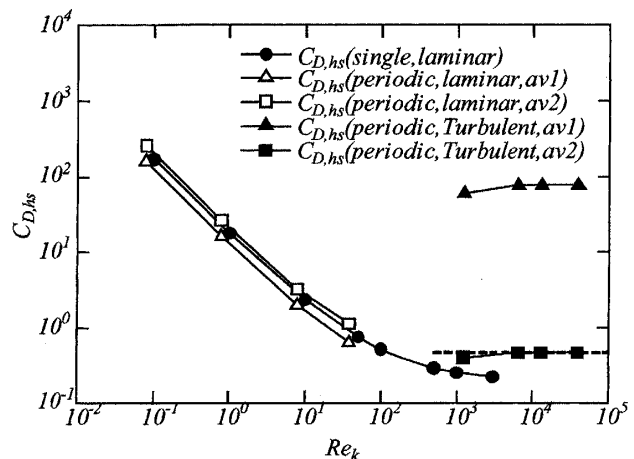


図 5. 半球抗力

\bar{u} により抗力係数を定義したものである。両者は大きく異なり、 \bar{u} による抗力係数は単一半球の抗力係数とも大きく異なる。これは乱流の場合の \bar{u} の評価が層流の場合のように適切な値を与えないことを示しており、 \bar{u} で抗力係数を評価すべきである。 \blacksquare の計算結果は $Re_k = 1000$ 程度以上ではほぼ一定値を示しており、流れの半球表面からの剥離位置が安定する。壁面上に置かれた半球の周りの流れは層流から乱流まで幅広く変化し、その渦構造は Re_k とともに徐々に変化すると考えられる。したがって、抗力係数の見積もりは、適当な Re_k で層流域と乱流域に区別することが望ましい。遷移域の詳細な計算が必要であるが、ここでは図中の破線で示すように、 $Re_k = 500$ 程度を層流域と乱流域の境界とする。すなわち、以下の粗面乱流の管摩擦抵抗の予測シミュレーションでは、完全粗面になりうる $Re_k \geq 500$ の範囲では乱流の周期条件の結果である $C_{D,hs} = 0.46$ の一定値を採用し、 $Re_k < 500$ の範囲では単一半球の層流における抗力係数の計算式(1)を採用することにする。

3. 円管摩擦損失の計算法

周期粗さ要素の粗面をもつ円管の摩擦損失を、個々の粗さ要素の抗力の集積から平面摩擦抗力に置き換えて予測する、簡便な計算法を提案する。ここでは例として粗さ要素は半球とし、管摩擦係数 λ を求める。計算に使用する諸式と計算手順を以下に示す。

3-1. 単一半球の抗力係数

個々の半球の抗力は $Re_k < 500$ では(1)式、 $Re_k \geq 500$ の範囲では $C_{D,hs} = 0.46$ の一定値を用いて評価する。

3-2. 円管内平均流速

$$\frac{\bar{U}}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{Re_d \bar{u}_\tau}{\bar{U}} + c - \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}_\tau} + \frac{\Pi}{\kappa} w \left(\frac{2y}{d} \right) \quad (2)$$

円管内平均流速 \bar{U} は(2)式のように表され、後流関数 w の係数 Π は円管の場合十分小さいと仮定できるため無視する。また粗さ関数 $\Delta \bar{u}^+ = 0$ の場合滑面の平均流速を表す。ここで、後流関数を見捨てた誤差を係数 κ と c で補うと、 $1/\kappa = 2.46$ 、 $c = 0.29$ となる。また、 $\bar{u}_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ は平均摩

擦速度で $\bar{\tau}_w$ は平均摩擦抗力である。

3-3. 円管内速度分布

円管内速度分布は、壁近傍には壁の効果を表す減衰係数を採り入れ、完全粗面でない場合も含めて取り扱いできるように Van Driest 型[6]の関数を用いる。混合長 l_m を導入し、渦動粘性係数 ν_T を用いて

$$\frac{\bar{\tau}_w}{\rho} = (\nu + \nu_T) \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad \nu_T = l_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (3)$$

と表す。また粗さ高さの増大によって粘性底層の厚さが減少する減衰関数を次式に示す。

$$l_m = \kappa y^+ \{1 - \exp(-y^+/A) + \exp(-60y^+/Ak^+)\} \quad (4)$$

ただし、 $y^+ = y\bar{u}_\tau/\nu$ で y は壁からの距離を表す。また A は経験値で $A=27$ である。この時、 $k^+=60$ で粘性底層が消失する混合長モデルを修正し、 $A=\Delta\bar{u}^+/\alpha$ で完全粗面になると考え次式のように定義する。

$$l_m = \kappa y^+ \{1 - \exp(-y^+/A) + \exp(-\alpha y^+/\Delta\bar{u}^+)\} \quad (5)$$

(3) (5) 式を用いると速度分布の式を得る。

$$\frac{d\bar{u}^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + [1 + 4\kappa^2 y^{+2} \{1 - \exp(-y^+/A) + \exp(-\alpha y^+/\Delta\bar{u}^+)\}^2]^{1/2}} \quad (6)$$

$\Delta\bar{u}^+$ を仮定し、 $y^+=0$ で $\bar{u}^+=0$ とする境界条件で上式を積分する。得られた速度分布の、十分大きな y^+ の位置での $\Delta\bar{u}^+$ と、初めに仮定した $\Delta\bar{u}^+$ が一致しなければならないが、そのような α を探索すると次式が得られる。

$$\alpha = 0.0039\Delta\bar{u}^{+3} - 0.0652\Delta\bar{u}^{+2} + 0.272\Delta\bar{u}^+ + 0.1929 \quad (7)$$

図 6 は (6) 式を積分して得られる速度分布で、破線は滑面の対数則から得られる速度分布を示し、実線は上から $\Delta\bar{u}^+ = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ における粗面の速度分布で、最下線は $\Delta\bar{u}^+ = 6.82$ で完全粗面の速度分布である。 $\Delta\bar{u}^+$ が大きくなると粘性底層の厚さが小さくなり、 $A=\Delta\bar{u}^+/\alpha$ のとき減衰が消失して完全粗面になる。そのような $\Delta\bar{u}^+$ の値は (7) 式を用いると $\Delta\bar{u}^+ = 6.82$ となる。そこで、 $\Delta\bar{u}^+ \leq 6.82$ では (6) 式を積分して速度分布を求め、

$\Delta\bar{u}^+ > 6.82$ では以下に示す滑面の速度分布に粗さ関数を採り入れた計算式で算出する。

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + C_0 - \frac{\Delta\bar{u}}{u_\tau} \quad (8)$$

ただし、 $1/\kappa=2.46$ 、 $C_0=5.5$ である。

3-4. 粗さ要素高さ面内での平均流速

一つの粗さ要素が受け持つ粗面部分での壁面総抗力は、一つの粗さ要素の抗力をその部分に平均化して定義した抗力と、

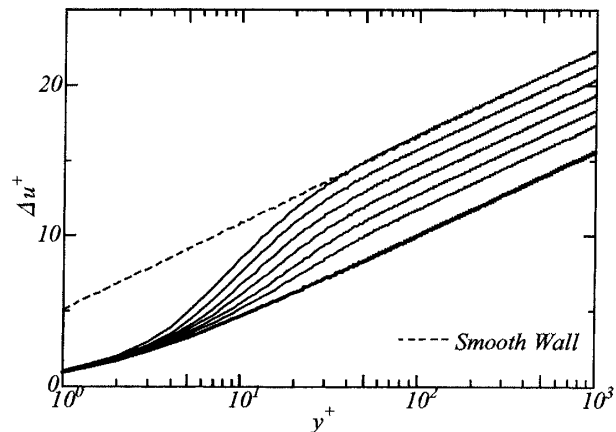


図 6. 速度分布

元々の滑面における壁面応力から粗さ要素部分を差し引いた抗力を、足し合わせることで得られ、次式で与えられる。

$$\tau_w = \frac{\pi a^2 C_{D,hs} \rho \tilde{u}^2}{4L_x L_z} + \tau_{ws} \left(1 - \frac{\pi a^2}{L_x L_z} \right) \quad (9)$$

ここで滑面の壁面摩擦応力 $\tau_{ws} = C_f \rho \bar{U}^2 / 2$ を算定するためにブラジウスの式 $C_f = 0.0791 \text{Re}^{-0.25}$ を用いると、

$$\frac{\tilde{u}}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1 - (1 - \pi a^2 / L_x L_z) \zeta \text{Re}_d^{-0.25} (\bar{U} / \bar{u}_\tau)^2}{(\pi / 4) C_D (a^2 / L_x L_z)} \right]^{1/2} \quad (10)$$

となる。ただし、 $\zeta = 0.3164 / 8 = 0.0395$ である。また Re_d は計算条件として与えられ、 Re_k は Re_d の関数で

$$\text{Re}_k = \frac{a}{d} \text{Re}_d \frac{\tilde{u} / \bar{u}_\tau}{\bar{U} / \bar{u}_\tau} \quad (11)$$

と表される。

3-5. 管摩擦係数

速度分布が \bar{u}_τ を用いて表されているとき、 λ は速度分布を積分して得られる管流量の関数になる。速度分布を平滑管のそれに粗さ関数を加えた形で表すと、 λ は次式になる。

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = C_1 \log(\text{Re}_d \sqrt{\lambda}) + C_2 - C_3 \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}_\tau} \quad (12)$$

を用いる。ただし、 $C_1 = 2$, $C_2 = -0.8$, $C_3 = 1/\sqrt{8}$ である。この式は、滑らかな円管に対しては、乱流の広いレイノルズ数の範囲で成り立つプラントル・カルマンの式に帰する。

3-6. 計算手順

まず計算に必要な変数 Re_d , a/d , L_x/d , L_z/d を与え、また初期値として $\Delta \bar{u}^+$ の推定値を与える。そこで(2)式を用いて管内平均流速を求めるが、ここでは適当な \bar{U}^+ を与えて計算して得られる新たな \bar{U}^+ と比較し、同じ値になるまで繰り返し計算を行う。次に、 $\Delta \bar{u}^+ \leq 6.82$ の場合は(6)式を用いて、 $y=0$ から $y=a^+$ までシンプソン法により積分し \tilde{u}^+ を求め、 $\Delta \bar{u}^+ > 6.82$ では(8)式より \tilde{u}^+ を求める。得られた \tilde{u}^+ を粗さ要素高さ面内での平均流速を求める(10)式に代入することにより新たに管内平均流速 \bar{U}^+ を得る。これを先に求めた \bar{U}^+ と比較し、同じ値になるまで $\Delta \bar{u}^+$ を修正しながら収束値を得るまで繰り返す。収束したら(12)式を用いて、適当な λ の初期値を与え収束するまで繰り返し計算を行い、管摩擦係数 λ を求める。

4. Scaggs らの実験結果と計算結果の比較

Scaggs ら[7]は円管内乱流において、半球や円錐台の粗さ要素を壁面に千鳥状に並べその抗力を精密に測定している。したがって、今回の計算結果をこの半球の実験結果と比較することによりこの計算法の妥当性を確認することができる。Scaggs らの実験条件を表1に示す。Aの実験は $a=1.2\text{mm}$ 程度の粗さ高さの条件で粗さ要素の中心間距離を $L=5, 10, 20\text{mm}$ 程度とした実験であり、それぞれ A-1, A-2, A-3 面としている。BはAの実験に対して粗さ要素高さや粗さ要素間距離を

表 1. Scaggs らの実験項目

	管直径 (mm)	粗さ要素間距離 (mm)	粗さ要素高さ (mm)
A-1	51.46	5.10	1.25
A-2	51.46	10.20	1.25
A-3	51.54	20.25	1.15
B-1	54.88	2.50	0.65
B-2	51.54	5.05	0.60
B-3	51.63	10.10	0.55

半分程度とした実験で、B-1, B-2, B-3 の粗面としている。また λ は $Re_d = 1 \times 10^4$ から 7×10^5 のレイノルズ数範囲で λ が計測されている。本方法による予測と実験値との比較を図 7, 8 に示す。図 7 は、半球の抗力として、粗さ高さレイノルズ数 $Re_k = \tilde{u}a/\nu$ に関係なく式 (1) のみを用いた場合で、図 8 は 3.1 に述べたように使い分けた場合である。いずれの図においても、●, ▲, ■印はそれぞれ Scaggs らによる A1, A2, A3 の実験結果で、白抜きの記号はそれぞれ B1, B2, B3 の実験結果である。また、実線は上から A1, A2, A3 の計算結果で、破線は上から B1, B2, B3 の計算結果である。図 7 では、すべての条件の λ の計算結果は Scaggs らの実験結果と比較してかなり小さい値になる。

また A-1, B-1 は、実験結果では完全粗面

と考えられるが、 λ の予測値は実験値とは程遠い。半球の周りの流れでは、層流でも乱流でも同様に剥離し、抗力には大きな違いは生じないと期待されるが、図 7 の結果は、レイノルズ数に無関係に層流剥離が生じるとする仮定は成り立たないことが分る。また、Scaggs らの実験は、レイノルズ数が高い範囲での実験結果であり、粗さ要素同士の干渉の影響も考えられる。 $Re_k \geq 500$ の範囲では $C_{D,hk} = 0.46$ の一定値を、 $Re_k < 500$ の範囲では単一半球の層流における抗力係数の計算式 (1) を用いた図 8 の結果は、すべての条件で実験結果と計算結果がよく一致しており、特に A1 と B1 の条件は完全粗面の結果であるが、計算結果でもそれが再現できている。しかし粗さ要素が離れて存在する A3 と B3 の粗面では若干の誤差が見られる。これは半球近くの壁面での流れの影響

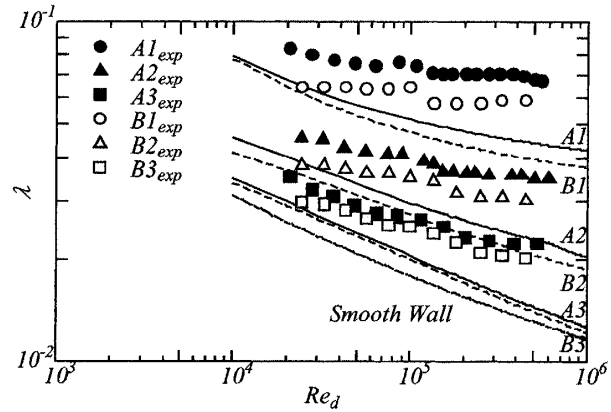


図 7. 管摩擦係数

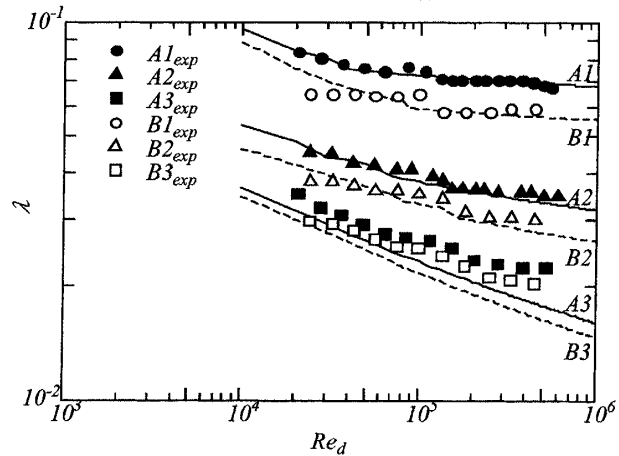


図 8. 修正後管摩擦係数

であるがこの修正は容易である。ただし粗さ要素が密に配置されている場合にはこの影響は非常に小さい。図9は計算結果から得られた Δu^+ と $a^+ = a\bar{u}_\tau / \nu$ との関係を示し、それぞれの結果はほぼ直線の右上がりの勾配を持ち、 Re_d が大きいほど原点から離れる。勾配は粗面の種類により異なるが、A1, B1は完全粗面であるから $1/\kappa = 2.46$ となるはずである。そこで、この図のA1とB1の勾配を調べてみると

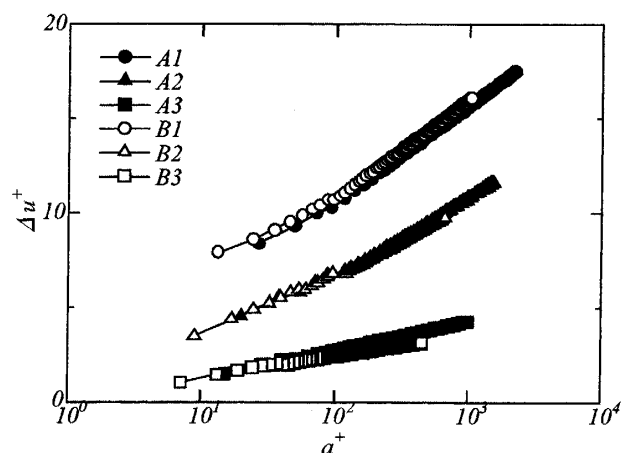


図9. 粗さ関数

$A1=2.23$, $B1=2.11$ 程度であり近い値を示している。したがって、定型粗さの粗面に対する円管摩擦損失を評価する今回の方法の妥当性が確認され、迅速にかつ簡易的に抗力計算するために極めて有効である。また粗面のモデル化に対して筆者らが考える平面に抗力を与える考え方も妥当であるといえる。

また、提案の手順による方法を用いれば、粗さ要素の抗力を求めておけば管内流の管摩擦係数を簡単な演算で求めることができる。粗さ要素の抗力は今日では上述のように、数値シミュレーションによって満足な精度で求めることができるので、提案の方法は実用上有用である。

5. まとめ

壁面上に置かれた単一半球のレイノルズ数と半球抗力係数の関係を求め定式化し、その式と過去の経験式等を用いて簡易的な定型粗面における円管内摩擦損失計算法を提案した。また千鳥状に粗さ要素を配置し精密な管摩擦係数の計測を行っている Scaggs らの実験結果と比較し妥当な結果を得てその有効性を確認した。また筆者らの考える粗面のモデル化の有効性も合わせて確認した。

6. 参考文献

- [1] J.Nikuradse, "Stroemungsgesetze in rauhen Rohren", VDI-Forschungsheft, 361 (1933).
- [2] Moody, L.F., "Friction factors for pipe flow", *Trans.ASME*, **66** (1944), p.671.
- [3] Taylor, R.P., Coleman, H.W., Hodge, B.K., "Prediction of Turbulent Rough-Wall Skin Friction Using a Discrete Element Method", *J.Fluid Eng., Trans.ASME*, **107** (1985), pp.251-257.
- [4] Tarada, F., "Prediction of rough-wall boundary layers using a low Reynolds number $k-\epsilon$ model", *Int.J.Heat and Fluid Flow*, **11** (1990), pp.331-345.
- [5] Schiller, L. and Naumann, A., "Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung", *VDI-Zeits.* **77** (1933), p.318.
- [6] Van Driest, E.R., "Sublayer function", *J.Aeron.Sci.*, **23** (1956), pp.1007-1011, 1036.
- [7] Scaggs, W.F., Taylor, R.P., Coleman, H.W., "Measurements and Prediction of Rough-Wall Effects on Friction Factor-Uniform Roughness Results", *J.Fluid Eng., TRANS.ASME*, **110** (1988), pp.385-391.

(平成17年11月28日受理)