

電気機械座標変換解析の一考察

村 上 吉 繁*

An Application of Coordinate Transformation to the Analysis of Synchronous Machine

Yoshishige Murakami

Abstract

Recently, power electronics has been applied for many kinds of motors, for the higher response and precise speed and position control, and furthermore for the higher efficiency. For the analyses and designs for these motor systems, general treatments of analyses become possible by using two phase machine coordinate transformation method. In this paper, this method is applied for the analyses of synchronous machines for both types of permanent magnet and field winding rotors.

はじめに

近年パワーエレクトロニクスが電気機械の制御に広く適用されるとともに、電気機械の解析も座標変換法による事が不可欠となっている。本稿では、この解析法を分類整理しそれぞれの特徴と適用領域を考察するとともに、正確な定式化と物理的な現象の把握にも著しい利点があることを明らかにする。

1. 電気機械座標変換法⁽¹⁾

各種の座標変換法：次の条件を前提とする。

(1) 固定子回転子とも一相または二相で、各相の巻線密度は正弦波状、したがって各相通電時の起磁力も正弦波状に分布する。巻線の厚みは無視でき、固定子または回転子表面に密着している。その抵抗は外部に直列接続の抵抗により表示する。磁軸は互いに直交する。

(2) 鐵心構造部の透磁率は無限大である。

(3) 突極構造による自己及び相互インダクタンスの空隙円周に沿った変化は、フーリエ級数展開によって表示する。この場合、自己インダクタンスは、第二調波まで、相互インダクタンスは基本波のみで表す。これに対応して、空隙透磁率が変化していると考ええる。

a-b系：固定子、回転子それぞれに付着した直交座標系、固定子は d_s-q_s 系、回転子は a_r-b_r 系によって定式化する。したがって、各座標軸を磁軸とする巻線の誘導起電力は、各巻線の鎖交磁束の時間微分によって生じる。回転子の回転による起電力も回転角度についての時間微分に含まれる。

d-q系：固定子に付着した座標系 d_s-q_s 系、及び回転子も同じ座標系 d_r-q_r 系によって定式化する。回転子が鎖交磁束を切ることにより速度起電力を生じる。

$\gamma-\delta$ 系：回転磁界に付着した座標系で、固定子、回転子それぞれ、 $\gamma_s-\delta_s$ 、 $\gamma_r-\delta_r$ 系とする。座標系から見て、巻線導体が回転する鎖交磁束を座標の回転と反対方向の

*電気工学科

同速度で切ることにより，速度起電力を生じる。

これらの座標系の電圧と電流の関係はインベ-タ'ンステンソルにより

$$v=Zi \quad (1)$$

と表され，別の座標系によっては Z の座標変換を適用して

$$v'=CZCi', i=Ci' \quad (2)$$

と表される。ここで，下添字 t は行列の転置

以下では，同期機の方程式を取り扱う。

2. 同期機定常特性の方程式

同期機は，界磁が固定子または回転子の構造に大別される。さらに，界磁回転子の場合大形高祖機では円筒状，小型機では突極状となる。界磁の突極性を考慮して解析するには，界磁が固定子として静止し，突極の中心軸を d 軸に取る $d-q$ 解析が適している。しかし電動機応用において，最近効率の優れた突極永久磁石回転子構造が広く応用されるようになった。界磁の静止する $d-q$ 解析ではその特性が理解しにくい。

そこで本稿では，界磁とともに回転する $\gamma\delta$ 座標系を同期機解析に適用する方法と結果を報告する。

2. 1 永久磁石同期機⁽²⁾⁽³⁾

近年，小型突極永久磁石同期電動機は希土類元素をはじめとする優れた永久磁石材料の高い磁界保持力及び磁束密度を応用した高効率と可変リクタンストルクによる広い運転速度範囲の特徴を活用して省エネルギー機器として広く用いられようとしている。永久磁石同期電動機は，固定子三相巻線電機子，回転子永久磁石の構造である。電機子に三相平衡電流を通電すると同期速度で回転する回転磁界が生じ，永久磁石回転子はこの磁界に同期して回転する。表面磁石形 (SPSM: Surface Permanent Magnet Synchronous Motor) 及び埋め込み磁石形 (IPMSM: Interior Permanent Magnet Synchronous Motor) に大別される。直軸自己インダクタンス L_d と横軸自己インダクタンス L_q の大きさについて，前者は $L_q > L_d$ ，後者は $L_q < L_d$ の関係がある。

2. 2 定常方程式

磁石磁軸（直軸 d 軸）とその垂直方向軸（横軸 q 軸）それぞれの自己インダクタンス L_d および L_q が異なるため，電機子三相電流を座標変換により磁石磁軸 d 軸方向とその垂直方向の磁軸 q 軸に対応する二相電流に変換したうえ，磁石とともに同期速度 ω で時計方向に回転する座標系 $\gamma\delta$ 系から観測する磁界及び電圧電流について方程式を導く方法をとる。 $\gamma\delta$ 系で観測すると回転子は静止，磁界分布は，定常時静磁界，電圧電流は直流となって静止し電機子導体は反時計方向に同期速度 $-\omega$ で回転する。

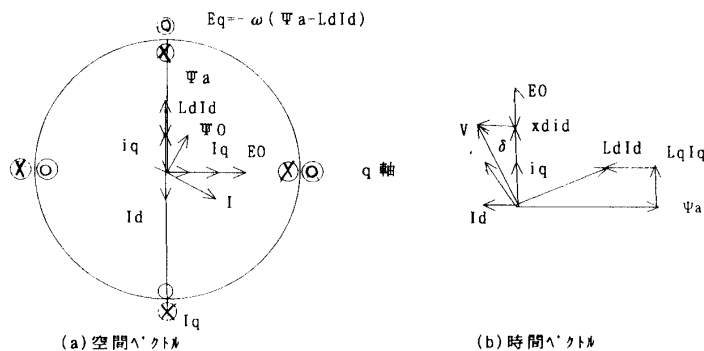


図1 同期電動機ベクトル図

PE論文⁽²⁾にあわせて， $\gamma\delta$ 軸をそれぞれ垂直方向の d 軸および水平方向の q 軸にとり，諸変数の $\gamma\delta$ 系空間の磁軸の位相関係を描くと図1(a)図のようになる。

この空間間ベクトルは静止し，磁界に鎖交する導体が $-\omega$ で回転していると見える。この静止した導体から見ると，電圧電流

は時間的に正弦波状に変化する交流である。その位相関係が (b) 図の時間ベクトル図となる。時間ベクトルは、反時計方向に速度 ω で進む位相 $\theta = \omega t$ でベクトルが表示されている。

空間ベクトル図を参照しながら定常方程式を導く。図の大円は電機子内周、外側小円は導体電流方向、内側小円は導体電圧方向を示すものとする。回転磁界は q 軸を磁軸として回転するから、d 軸方向を向く回転子永久磁石は回転磁界に引っ張られて回転する。

0印が正の電圧または電流方向を示す。例えば、d 軸方向の永久磁石による鎖交磁束 Ψ_s を $-\omega$ で導体が切ると誘導起電力はローレンツ則 $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ によって 0 方向に生じる。d 軸電流 i_d の磁軸は d 軸である。固定子 d 軸電流は進みで減磁作用をする。d 軸方向に誘導起電力を生じる磁束鎖交は、d 軸と直交する電機子反作用磁束 $\Psi_r = L_r i_q$ 、q 軸方向誘導起電力は q 軸に直交する磁束 $\Psi_d = \Psi_s + L_d i_d$ によって生じる。

以上に留意して 0 方向に d 軸電流を流すための印加電圧と誘導起電力は 0 方向に相加わり抵抗電圧降下に対抗するとして

$$v_d + e_d = R_a i_d, \quad e_d = \omega L_q i_q, \quad v_q = -\omega L_d i_d + R_a i_q \quad (3)$$

同様に q 方向印加電圧は

$$v_q + e_q = R_a i_q, \quad e_q = -\omega (L_d i_d + \Psi_s), \quad v_d = \omega L_d i_d + \omega \Psi_s + R_a i_d \quad (4)$$

この両式をまとめてかくと PE 論文⁽²⁾ (1) 式

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & -\omega L_q \\ \omega L_d & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \Psi_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

となる。本来の $\gamma \delta$ 系方程式では、文献 (1)(4.75)P.256 において回転速度 $\omega_m = \omega$ として得られる式の第 1,2 行

$$\begin{aligned} v_{\gamma s} &= (R_s + pL_s) i_{\gamma s} - \omega L_{\delta s} i_{\delta s} + pM i_{\gamma r} - \omega M i_{\delta r} \\ v_{\delta s} &= \omega L_{\gamma s} i_{\gamma s} + (R_s + pL_s) i_{\delta s} + \omega M i_{\gamma r} + pM i_{\delta r} \end{aligned}$$

に、定常および突極条件

$$p=0, \quad \gamma s \text{ の自己インダクタンス } L_d, \quad \delta s \text{ の自己インダクタンス } L_q, \quad M i_{\gamma r} = \Psi_s, \quad R_s = R_a$$

を適用して導出される。

2. 3 トルク

v_d, v_q から機械出力に関係する速度起電力を取り出すと d 軸および q 軸について位置ベクトルで電流のきと起電力の向き一致すると、通電のための印加電圧はそれだけ減じることとを考慮して次の方程式が成り立つことがわかる。

$$v_d + e_d = R_a i_d = 0, \quad v_d = -e_d = -\omega L_q i_q, \quad v_q + e_q = R_a i_q = 0, \quad v_q = -e_q = \omega \Psi_s + \omega L_d i_d = E_0 + \omega L_d i_d \quad (5)$$

ここで、 e_q は無負荷誘導（速度）起電力に $i_d > 0$ の場合（ i_q より $\pi/2$ 遅れ）は、増磁の d 軸電機子反作用による起電力を加えたもの、 $i_d \leq 0$ の場合（ i_q より $\pi/2$ 進み）は、減磁の d 軸反作用起電力を加えたものである。機械出力 P_m は、d, q 軸速度起電力それぞれに各電流を乗じて和を取り、漏洩インダクタンスは L_d, L_q に含め $R_a = 0$ とすれば、 $P_e = P_m$ と考えて好いから、増磁の場合について求めると

$$P_m = v_d i_d + v_q i_q = -\omega L_q i_d i_q + \omega \Psi_s i_q + \omega L_d i_d i_q = \omega \Psi_s i_q + \omega (L_d - L_q) i_d i_q \quad [\text{synchronous } W] \quad (6)$$

となり、通常の場合 $L_d > L_q$ の場合には第 2 項のリアクタンストルクがトルクに寄与することを示している。

最近の多くの埋め込み磁石回転子は、逆突極性構造となることが多い。逆突極性 $L_q > L_d$ の場合には、通常突極では減磁となる負の d 軸電流を取ってリアクタンストルクを生じるようにしている。このことを以下に説明する。図 1 ベクトル図における電流ベクトル I_d は、減磁作用を持

つ進み電流 i_d (負) を成分とする電流で, q 軸よりの進み角度 β で減磁となり, $i_d = -I_s \sin \beta$, $i_q = I_s \cos \beta$ を (6) に適用すると

$$T = P / (\omega / p) = p \Psi_a i_q + p (L_d - L_q) i_d i_q = p \Psi_a I_s \cos \beta - \frac{1}{2} p (L_d - L_q) I_s^2 \sin 2\beta = T_m + T_r \quad (7)$$

が得られる。ここで, T : モータの全トルク, T_m : マグネットトルク(5)第1項, T_r : リラクトンストルク(5)第2項

3. 界磁回転子同期電動機⁽¹⁾

界磁回転子同期電動機の定常ベクトル図は, 永久磁石のそれと同じである。ただし, 鎖交磁束は $\Psi_a = M i_f$, i_f : 界磁電流である。

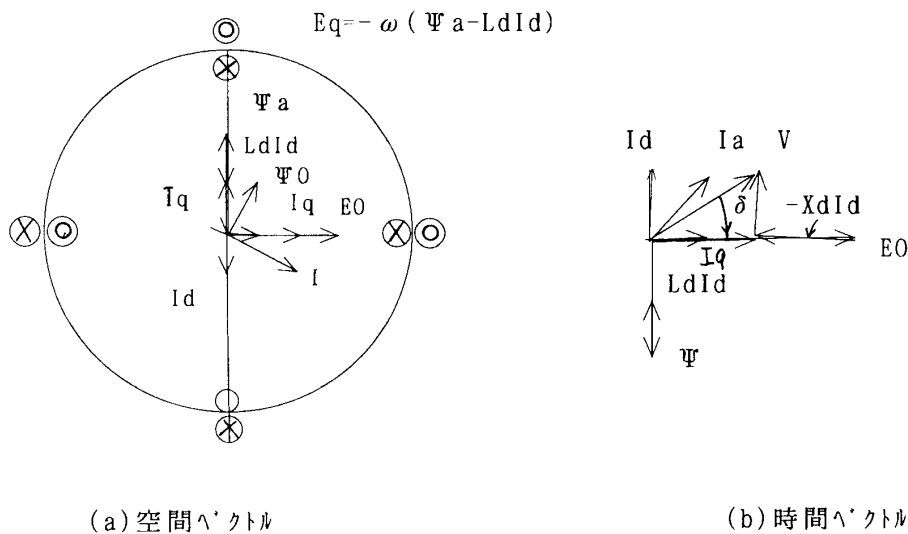


図2 同期電動機ベクトル図 (減磁)

3. 1 減磁の場合 (4)と図2ベクトル図より電圧, 電流実効値振幅について

$$V_d = V \sin \delta = \omega L_q i_q = x_q i_q$$

$$V_q = V \cos \delta = E_o - \omega L_d i_d = E_o - x_d i_d \quad (8)$$

より d q 軸電流

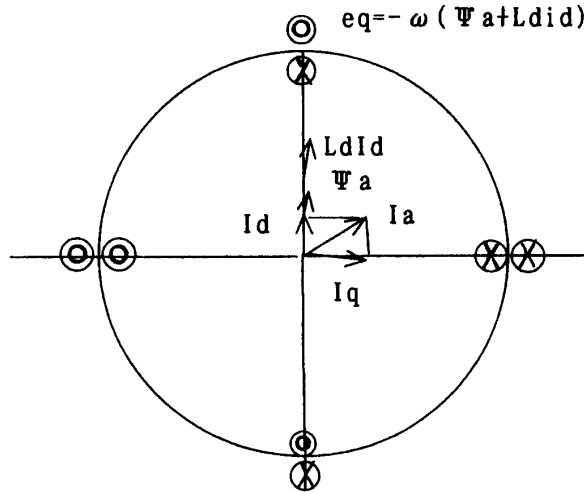
$$i_d = \frac{E_o - V \cos \delta}{x_d}, \quad i_q = \frac{V \sin \delta}{x_q} \quad (9)$$

ここで, $x_d = x_{ad} + x_l$, $x_q = x_{aq} + x_l$ (2.84)p89 としている。 x_{ad} , x_{aq} はそれぞれ直軸電機子反作用リアクタンス, 横軸反作用リアクタンス, x_l は電機子漏れリアクタンスである。

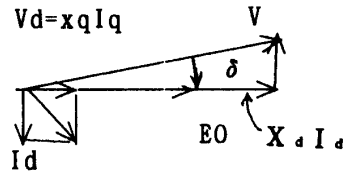
d 軸電気入力 $v_d i_d$, q 軸入力電力 $v_q i_q$ は

$$v_d i_d = V \sin \delta \left(\frac{E_o - V \cos \delta}{x_d} \right) = \frac{E_o V \sin \delta}{x_d} - \frac{V^2 \sin \delta \cos \delta}{x_d}, \quad v_q i_q = V \cos \delta \frac{V \sin \delta}{x_q}, \quad (10)$$

$$P_m = P_e = \frac{E_o V \sin \delta}{x_d} + \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) V^2 \frac{1}{2} \sin 2\delta \quad (1 \text{ 相当あたり}) \quad (11)$$



(a) 空間ベクトル図



(b) 時間ベクトル図

図3 同期電動機ベクトル図 (増磁)

3. 2 増磁の場合 図3ベクトル図から、電機子の無負荷速度 (誘導) 起電力 $E_0 = \omega \Psi_a$ 、子電圧 V は、 E_0 より δ だけ進んでいるとする。(3) とベクトル図より実効値振幅について

$$V_d = V \sin \delta = \omega L_d i_q = x_q i_q \quad (12)$$

$$V_q = V \cos \delta = E_0 + \omega L_d i_d = E_0 + x_d i_d \quad (13)$$

(6)(7) より dq 軸電流

$$i_d = \frac{V \cos \delta - E_0}{x_d}, \quad i_q = \frac{V \sin \delta}{x_q} \quad (14)$$

を得る。さらに $P_m = v_d i_d + v_q i_q$ において、図3ベクトル図に見るように $v_d = x_q i_q$ に対して i_d は逆位相より

$$v_d i_d = -V \sin \delta \left(\frac{V \cos \delta - E_0}{x_d} \right) = \frac{E_0 V \sin \delta}{x_d} - \frac{V \sin \delta \cos \delta}{x_d}, \quad v_q i_q = V \cos \delta \frac{V \sin \delta}{x_q} \quad (15)$$

で三相機の場合

$$P_m = 3 \left[\frac{E_0 V \sin \delta}{x_d} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) V^2 \sin 2\delta \right], \quad T = \frac{P_m}{\omega/p} \quad (16)$$

(2.110) と同じ結果となる。

4. 界磁回転子同期発電機

4. 1 増磁の場合 図4ベクトル図から

$$V_d = V \cos \delta = E_0 + x_d i_d, \quad i_d = \frac{V \cos \delta - E_0}{x_d}, \quad V_q = V \sin \delta = x_q i_q, \quad i_q = \frac{V \sin \delta}{x_q} \quad (17)$$

d 軸および q 軸出力は

$$v_d i_d = -V \sin \delta \left(\frac{V \cos \delta - E_0}{x_d} \right) = \frac{E_0 V \sin \delta}{x_d} - \frac{V \sin \delta \cos \delta}{x_d}, \quad v_q i_q = V \cos \delta \left(\frac{V \sin \delta}{x_q} \right) \quad (18)$$

$$P. (1 \text{ 相当あたり}) = \frac{E_0 V \sin \delta}{x_d} + \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) V^2 \frac{1}{2} \sin 2\delta \quad (19)$$

4. 2 減磁の場合 図5ベクトル図から

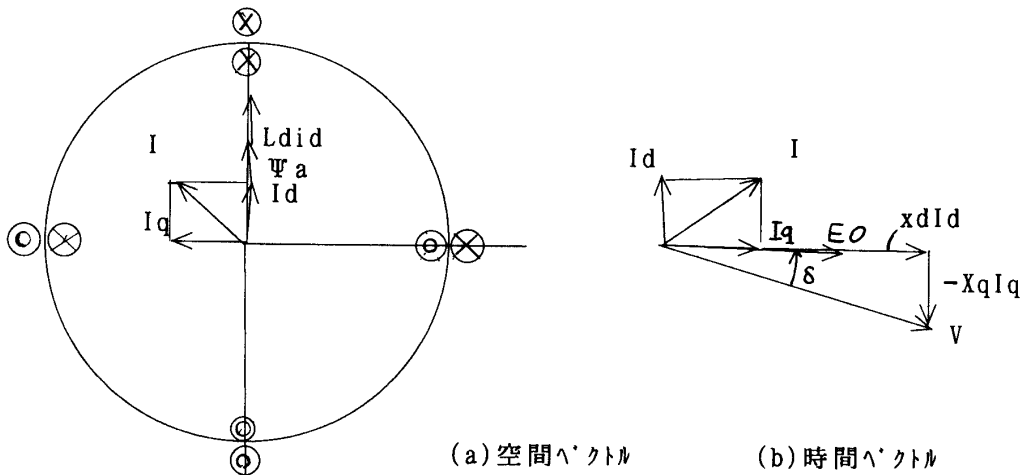


図4 同期発電機ベクトル図 (増磁)

$$v_q = V \cos \delta = E_0 - x_d i_d, \quad i_d = \frac{E_0 - V \cos \delta}{x_d}, \quad v_d = V \sin \delta = x_q i_q, \quad i_q = \frac{V \sin \delta}{x_q} \quad (20)$$

d 軸及び q 軸出力は

$$v_d i_d = V \sin \delta \left(\frac{E_0 - V \cos \delta}{x_d} \right), \quad v_q i_q = V \cos \delta \frac{V \sin \delta}{x_q} \quad (21)$$

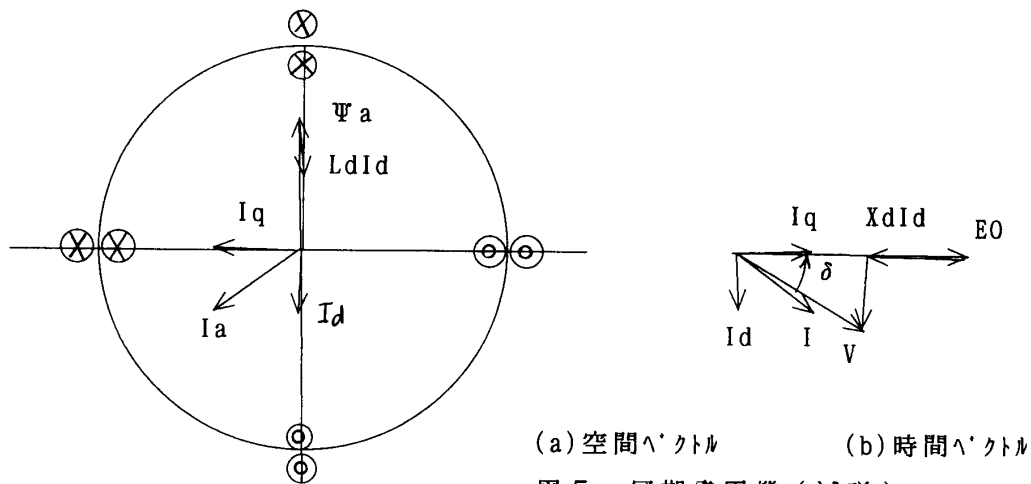


図5 同期発電機 (減磁)

$$P_1 (1 \text{ 相当あたり}) = \frac{E_0 V \sin \delta}{x_d} + \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) V^2 \frac{1}{2} \sin 2\delta \quad (22)$$

5. ベクトル方程式と等価回路

3と4で時間ベクトル図を描いた。時間ベクトルは、角周波数 ω の正弦波状に時間的に変動する回路変数を実効値振幅ベクトルで表したもので、位相は反時計方向を進みとしている。空間ベクトルは r, δ 系の直流静止ベクトルの位相関係を示しているから、座標変換演算によりd-qベクトルに変換しても時間についての定常方程式が得られる。しかし、これより時間ベクトルを導くのは容易でない(例えば、文献(1)4.4 [4])。そこでここでは、空間ベクトルから視察により得られた時間ベクトルより逆に定常方程式を導くことを試みる。まず電動機につ

いて図 2, 3 を参照して基準ベクトルを $E_0 I_d$ として

$$\dot{V}_d = jX_d I_d, \dot{V}_q = E_0 + jX_d \dot{I}_d, \dot{I}_d = -j I_d \quad (23)$$

が得られる。ここで、d 軸電流遅れにおいて $I_d \geq 0$ とする。

次に発電機について図 4, 5 の空間ベクトルは I_q が I_d より $\pi/2$ 遅れ、界磁に引っ張られて時計方向に回転して、時間ベクトルで印加電圧 \dot{V} が E_0 より δ 遅れであることに注意し

$$\dot{V}_d = -jX_d I_q, \dot{V}_q = E_0 - jX_d \dot{I}_d, \dot{I}_d = j I_d \quad (24)$$

ここで、d 軸電流進みにおいて $I_d \geq 0$ とする。

このように空間及び時間ベクトルともに正弦波実効値を振幅とするべくとるであることはインダクタンスを回転子回転角 θ のフーリエ級数展開により表示するとき、自己インダクタンスは第二調波、相互インダクタンスは基本波までとる条件で示される⁽⁴⁾。しかしその等価回路は描けない。文献(1)図 2-94, p91 も d 軸, q 軸方程式が混在して無理がある。文献(2)では、図 3 で d, q 軸それぞれの等価回路を描いているが、理解に便となるまでに至っていない。

次のことに注意したい。

(1) 漏洩インダクタンスは X_d 及び X_q に含め、回路抵抗は無視している。

(2)(1) より、内部誘導起電力 E_i は端子電圧 V は等しくなる。

(3) d 軸電力 $P_d = v_d i_d$ の正負の符号は、時間ベクトルで i_d と $v_d = x_d \dot{i}_q$ の向きが同じの場合正、逆の場合は負となる。したがって、(23) により電動機の場合 $i_d \geq 0$ で $P_d \leq 0$, 発電機の場合 $i_d \geq 0$ で $P_d \geq 0$ となる。

参考文献

- (1) 西村正太郎, 岡田隆夫, 丸橋徹, 村上吉繁: 電気機器学, (オーム社) (1990)
- (2) 栗田秀哉, 森本茂雄, 真田雅之, 武田洋次: リラクタンストルクを主とする IPM 同期モータの諸特性, PE 研究会論文集 Vol.24, No.2 p43,(1999)
- (3) 矢野昌雄, 打田良平: パワーエレクトロニクス, 丸善 (2000)
- (4) ウッドソン, メルヒャー (大越孝敬, 二宮敬虔訳); 電気力学 I 4.2.4(1970)

(平成12年12月13日受理)