

振動法および PSO を用いた斜張橋のケーブル張力の推定について

谷脇 一弘^{*1}, 譚 威^{*2}

Estimation of Cable Tensions of Cable-stayed Bridge using Vibration Method and PSO

Kazuhiro TANIWAKI^{*1} and Wei TAN^{*2}

^{*1} Department of Architecture and Civil Engineering

^{*2} Master Course Student in Department of Social Systems Engineering (Civil Engineering Course)

In the maintenance and management of the cable-stayed bridges, it is important to measure the cable tension and to maintain the cable tensions within permissible errors for the designed cable tensions. In this study, a reliable method to estimate the cable tensions of cable-stayed bridge is proposed by using the natural frequency and PSO. The natural frequency is measured by the vibration method. The cable tensions are identified by using the least-square method and PSO. The effectiveness and usefulness are illustrated by applying the method to the Bandai bridge (PC pedestrian cable-stayed bridge) in Echizen city.

Key Words : Maintenance and management of cable-stayed bridges, vibration method, PSO, cable tension

1. 緒 言

斜張橋の維持管理においては、ケーブルの張力の計測を定期的に行い、設計ケーブル張力と所定の許容差内で管理していくことが重要であるが、実際の斜張橋の維持管理においては、一般の桁橋と同様の点検がなされているのみであり、ケーブル張力の計測などは全く行われていない。ケーブル張力を簡易的に推定する方法として、振動法により推定する方法が一般的に用いられている。新家¹⁾らの方法では、ケーブルの曲げ剛性をあらかじめ実験的方法により計測し、計測した固有振動数およびケーブルの曲げ剛性を振動方程式に代入して、最小二乗法を用いてケーブル張力を同定している。その後山極ら²⁾は、振動数方程式において解の次数が大きくなるに従い三角関数項が支配的になり、振動数方程式の解には周期性が出現することに着目し、測定した固有振動数とそのモード次数が一致するようにケーブル張力と曲げ剛性を最小二乗法を用いて求める方法を提案している。この方法では、ケーブルの曲げ剛性をあらかじめ実験的に求める必要がなく実用的な方法である。著者らも、この方法を用いて福井市に建設されている中角橋のケーブル張力の推定を行い、その有効性を確認している³⁾。しかし、この方法ではケーブルの長さや断面積の比率(径長比)によっては、信頼性に劣る場合があることが報告されており⁴⁾、中角橋の結果でも実際より大きいと思われる張力が算出される場合がみられた³⁾。

そこで本研究では、最小二乗法によるケーブル張力の同定において、各モードのケーブルの曲げ剛性を変数と取り扱い、振動数方程式の等号制約条件を考慮して粒子群最適化法 (PSO) を用いて同定を行う方法を提案している。福井県越前市に 1991 年に建設されている万代橋 (PC 人道斜張橋) のケーブル張力の推定に本手法を適用し、従来の方法との比較を行った結果について報告するものである。

2. ケーブル張力の推定方法

軸力が作用するケーブルの撓みに関する運動方程式はサグの影響を無視すると次式で表される^{1),2)}。

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

* 原稿受付 2020年5月29日

^{*1} 工学部 建築土木工学科

^{*2} 大学院 社会システム専攻 土木工学コース 2年生

E-mail: taniwaki@fukui-ut.ac.jp

ここに、 x はケーブルの軸線方向の長さ、 W はケーブルの撓み変位、 EI はケーブルの曲げ剛性、 T は張力、 ρ は密度、 A は断面積を表す。

この微分方程式の一般解は次式で表される。

$$W(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) + C_3 \cosh(\beta x) + C_4 \sinh(\beta x) \quad (2)$$

ここに、

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho A \omega^2}{EI}} - \frac{T}{2EI}} \quad (3)$$

$$\beta = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho A \omega^2}{EI}} + \frac{T}{2EI}} \quad (4)$$

斜張橋やニールセン橋に用いられるケーブルでは、両端の境界条件は完全固定と考えられている。ケーブル支点間距離を L とすると、両端固定境界条件は次式で表される。

$$W = 0, \quad \frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (5)$$

$$W = 0, \quad \frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{at } x = L \quad (6)$$

境界条件式(5)、(6)のもとに式(2)を解くと、次の振動数方程式が得られる。

$$2\alpha\beta\{1 - \cos(\alpha L) \cosh(\beta L)\} + \{\beta^2 - \alpha^2\} \sin(\alpha L) \sinh(\beta L) = 0 \quad (7)$$

山極らは、式(7)において βL の値が大きい場合、次のように簡略化することが出来ることに着目し、

$$\cosh(\beta L) \approx \sinh(\beta L) \approx \frac{e^{\beta L}}{2} \quad (8)$$

最終的に次式の振動数方程式を導入している。

$$(\alpha^2 + \beta^2) \sin(\alpha L + \phi) = 0 \quad (9)$$

ただし

$$\tan \phi = -\frac{2\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2} = -\frac{2\omega}{T} \sqrt{\rho A E I} \quad (10)$$

ところで、振動数方程式(9)の解は周期性を有し、次のように表現できる。

$$\alpha L + \phi = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

最終的に式(11)へ式(3)を代入し、 $f_i = \omega/2\pi$ を考慮すると、モード次数 i とその固有振動数 f_i との間に次の関係式が導かれる。

$$f_i^2 = \frac{\pi^2 EI}{4\rho AL^4} i^4 \left(1 - \frac{\phi}{\pi i}\right)^4 + \frac{T}{4\rho AL^2} i^2 \left(1 - \frac{\phi}{\pi i}\right)^2 \quad (12)$$

ここで、モード次数が大きくなるに従い $1 \gg \phi/\pi i$ と考えられるため、式(12)は次のように変形される。

$$f_i^2 \approx \frac{\pi^2 EI}{4\rho AL^4} i^4 + \frac{T}{4\rho AL^2} i^2 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

実際の計測した振動数と式(13)が一致するように、最小二乗法を用いて式(14)の誤差を最小とするような EI と T を求めることにより、張力を計測することができる。

$$P(x) = \sum_{i=1}^n (f_i^2 - \bar{f}_i^2)^2 \rightarrow \min \quad (14)$$

ここに、 \bar{f}_i は計測で得た固有振動数を表す。

本研究では、式(14)を以下の 3 つの方法 (a), (b), (c) により最小化を行い、その結果について比較検討を行った。

(a) 連立方程式による解法^{2),3)}

式(14)を EI および T で偏微分した次の連立方程式を解くことにより EI と T を求めることができる。

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\pi^2 i^4}{4\rho AL^4} \right)^2 \cdot EI + \left(\frac{\pi^2 i^4}{4\rho AL^4} \right) \left(\frac{i^2}{4\rho AL^2} \right) \cdot T - \left(\frac{\pi^2 i^4}{4\rho AL^4} \right) \bar{f}_i^2 \right\} = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\pi^2 i^4}{4\rho AL^4} \right) \left(\frac{i^2}{4\rho AL^2} \right) \cdot EI + \left(\frac{i^2}{4\rho AL^2} \right)^2 \cdot T - \left(\frac{i^2}{4\rho AL^2} \right) \bar{f}_i^2 \right\} = 0 \quad (16)$$

(b) 最適化計算により平均的 EI および T を求める方法

目的関数として式(14)、制約条件として式(7)を考慮して次の最適化問題を解くことにより、EI, T を求めた。

$$\text{Find EI, T} \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad P(\text{EI, T}) = \sum_{i=1}^n (f_i^2(\text{EI, T}) - \bar{f}_i^2)^2 \quad (17)$$

subject to

$$g_i(\text{EI, T}) = 2\alpha_i \beta_i \{1 - \cos(\alpha_i L) \cosh(\beta_i L)\} + \{\beta_i^2 - \alpha_i^2\} \sin(\alpha_i L) \sinh(\beta_i L) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (18)$$

$$0 \leq \text{EI} \leq \text{EI}^u, \quad 0 \leq T \leq T^u$$

ここに、 EI^u , T^u は EI および T の上限値を示す。 α_i および β_i は、それぞれ式(3)および式(4)で与えられる。

(c) 最適化計算により各モードの EI および T を求める方法

(a) および (b) の方法では、平均的な EI を変数としているが、各モードのケーブル剛性は異なることが報告されている⁴⁾。そこで、各モードの剛性 EI_i を変数とし、目的関数として式(14)を、制約条件として式(7)を考慮して次の最適化問題を解くことにより、 EI_i および T を求めた。

$$\text{Find EI, T} \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad P(\text{EI, T}) = \sum_{i=1}^n (f_i^2(\text{EI}_i, T) - \bar{f}_i^2)^2 \quad (19)$$

subject to

$$g_i(\text{EI, T}) = 2\alpha_i \beta_i \{1 - \cos(\alpha_i L) \cosh(\beta_i L)\} + \{\beta_i^2 - \alpha_i^2\} \sin(\alpha_i L) \sinh(\beta_i L) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (20)$$

$$0 \leq \text{EI}_i \leq \text{EI}_i^u \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 \leq T \leq T^u$$

ここに、 EI_i^u , T^u は EI_i および T の上限値を示す。

(b) および (c) の解法として次に述べる粒子群最適化法(PSO)⁵⁾を用いた。

PSO では、粒子(エージェント)の数 N だけの決定変数ベクトル群 $\bar{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)^t$ を取り扱う。 i 番目のエージェントは P 個の決定変数 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^t$ を有するものとする。最適化において、 \mathbf{x}_i^* は i 番目のエージェントの s 回の改良の中で最良の目的関数値を与える決定変数ベクトル、 \mathbf{x}_G^* は s 回の改良のすべての粒子群の中で最良の目的関数値を与える決定変数ベクトルとすると、 $(s+1)$ 回目におけるエージェントの移動速度は、次式で与えられる。

$$\mathbf{v}_i^{s+1} = w\mathbf{v}_i^s + c_1 r_1 (\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i^s) + c_2 r_2 (\mathbf{x}_G^* - \mathbf{x}_i^s), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (21)$$

ただし, w は慣性重み(inertia weight), r_1, r_2 は区間 $[0,1]$ の一様乱数である. c_1, c_2 は自己の最良位置およびグループの最良位置への探索に対する重み付けを表現している. 本研究では w は 0.6, c_1, c_2 は 2.0 を設定している.

$(s + 1)$ 回目におけるエージェントの改良は次式により行われる.

$$\mathbf{x}_i^{s+1} = \mathbf{x}_i^s + \mathbf{v}_i^{s+1} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (22)$$

本研究では, 上記の(b), (c)で述べた最適化問題を解く方法としてラグランジュ関数を最小化する方法を用いている⁵⁾. (b), (c)で述べた最適化問題に対するラグランジュ関数は以下ようになる.

$$L(\mathbf{EI}, \mathbf{T}, \boldsymbol{\lambda}) = P(\mathbf{EI}, \mathbf{T}) + \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j(\mathbf{EI}, \mathbf{T}) \quad (23)$$

ここに, λ_j は等号制約に関するラグランジュ乗数である.

本研究では, λ_j の値は, $g_j(\mathbf{EI}, \mathbf{T})$ が正の場合には 1.0 または 100.0 を用い, 負の場合には-1.0 または-100.0 を用いた. また, エージェント数 N は, (b)の解法の場合には 15 個, (c)の解法の場合には 30 個とした. 最適化計算においては, 最大繰り返し回数を 2000 回に設定し, 2000 回の改良後の改良解を新たな初期値に加え, 改めて 2000 回の改良を行うことを 3 回繰り返した. 最終的な解は, この改良課程を 100 セット繰り返し, 100 セットの改良解の中で最良の解を用いている.

3. 万代橋のケーブル張力の推定

3.1 万代橋の計測

上で述べた方法を Fig.1 および Fig.2 に示す福井県越前市に建設されている万代橋 (PC 人道斜張橋 1991 年建設) に適用し, (a), (b), (c) の手法により求めたケーブル張力の比較検討を行った. 万代橋は上流側, 下流側の 2 面吊の形式であり, この斜張橋の 20 本のすべてのケーブル張力を振動法により計測し, 設計張力 (死荷重+プレストレス+クリープ・乾燥収縮) と比較した. 計測は Fig.3 に示す 3 軸加速度センサー M-A351AU10(EPSON)⁶⁾を斜張橋のケーブルに取り付け(Fig.4 参照), 手で 60~90 秒間強制振動を加え(Fig.5 参照), その後 230~260 秒間の合計 320 秒間程度 Fig.6 に示す CH01(ケーブル軸方向), CH02(垂直方向), CH03(水平方向)の 3 成分の計測を行った. 3 軸加速度センサーはサンプリング振動数が 100Hz, ナイキスト振動数 50Hz が計測可能スペクトルの有効範囲である.

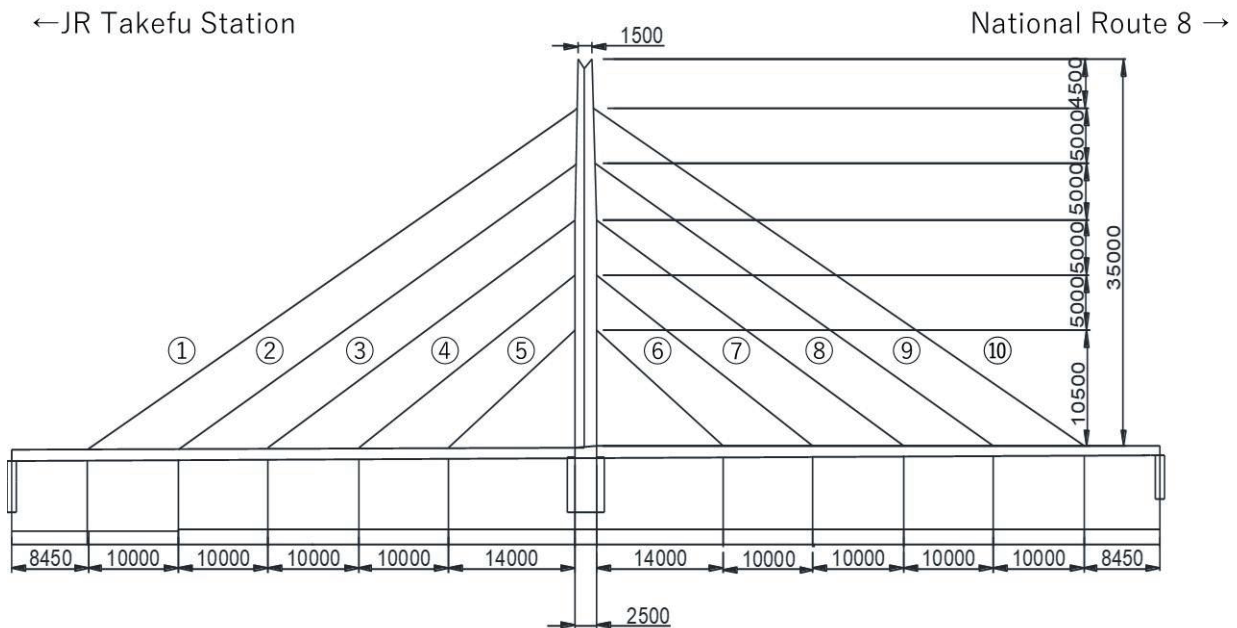


Fig.1 Side view of Bandai cable-stayed bridge constructed in 1991



Fig.2 Photo of the overview of Bandai cable-stayed bridge constructed in 1991



Fig.3 3-axis acceleration sensor module

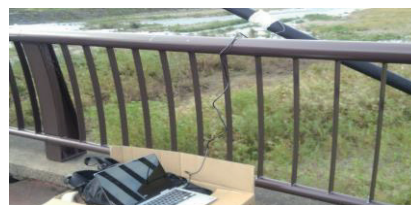


Fig.4 Attachment of sensor on the cable



Fig. 5 Experimental situation

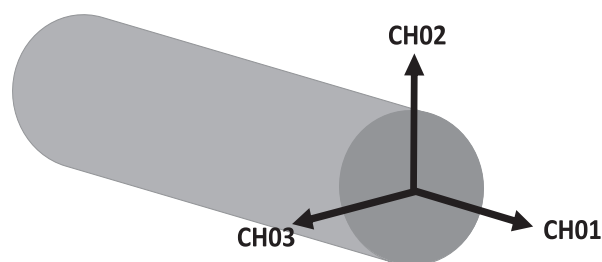


Fig.6 Directional codes CH01, CH02 and CH03

3.2 計測結果

強制振動より得られた上流側ケーブルの固有振動数の計測結果を Table 1 に、上流側のケーブル①のパワースペクトル密度を Fig.7 に示す。最下段ケーブル⑤、⑥の 5 次モードはセンサーのナイキスト振動数 50Hz 以上となり計測不可能なため 4 次モードまでの値を示している。

計算に用いたケーブル長、断面積、密度および、上流側のケーブルに着目し連立方程式による解法 (a)により得られたケーブル張力(Measured cable tension), 設計張力(死荷重+プレストレス+クリープ・乾燥収縮)(Designed cable

Table 1 Natural frequencies from the first-order mode to the fifth-order mode for cables at upstream side

Cable number	First-order natural frequency(Hz)	Second-order natural frequency(Hz)	Third-order natural frequency(Hz)	Forth-order natural frequency(Hz)	Fifth-order natural frequency(Hz)
①	1.81	3.56	5.37	7.18	8.94
②	2.25	4.49	6.74	9.03	11.28
③	2.98	5.91	8.84	11.82	14.79
④	4.10	8.20	12.35	16.50	20.70
⑤	7.32	14.70	22.27	29.83	
⑥	7.42	14.94	22.51	30.27	
⑦	4.15	8.30	12.45	16.65	20.75
⑧	2.98	6.01	8.98	12.01	14.99
⑨	2.25	4.54	6.79	9.03	11.33
⑩	1.81	3.61	5.42	7.23	9.03

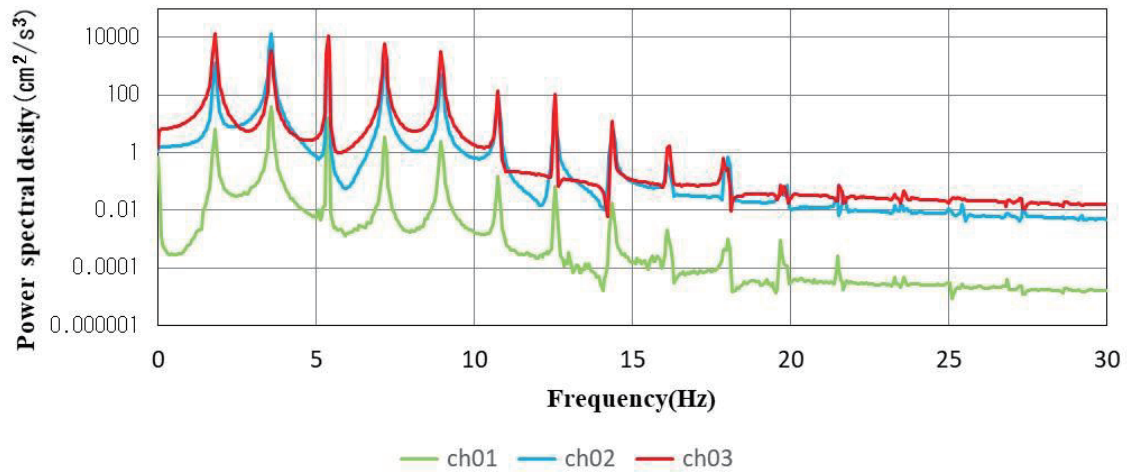


Fig.7 Power spectral densities for the directions of CH01, CH02 and CH03 for cable ① at upstream side

Table 2 Estimation of cable tensions by the approach (a) (Upstream side)

Cable number	L(m)	A(m ²)	ρ (t/m ²)	EI	Measured cable tension(kN)	Designed cable tension(kN)	Error(%)*
①	62.356	0.0013239	17.501	1119.6	1165.4	1279.9	0.91
②	51.161	0.0013239	17.501	281.5	1226.9	1295.5	0.95
③	39.983	0.0013239	17.501	204	1286.5	1273.4	1.01
④	28.852	0.0013239	17.501	271.7	1296.7	1188.1	1.09
⑤	17.771	0.0013239	17.501	290.3	1582.2	1493	1.06
⑥	17.75	0.0013239	17.501	387.3	1610.3	1493	1.08
⑦	28.797	0.0013239	17.501	-80.8	1332.2	1188.1	1.12
⑧	39.923	0.0013239	17.501	-37.2	1330	1273.4	1.04
⑨	51.086	0.0013239	17.501	346.1	1230.6	1295.5	0.95
⑩	62.267	0.0013239	17.501	-114.2	1174.5	1279.9	0.92

*Relative errors of measured cable tensions to the designed cable tensions

tension)および設計張力に対する相対誤差(Error)を Table 2 に示す. Table 2 より明らかなごとく, ケーブル⑦,⑧ および⑩の剛性に負の値が見られ, 不合理な結果となっている. また, 設計張力と比較して-114.5kN~+144.1kN 異なっており, 上二段のケーブルを除くすべてのケーブル張力は設計張力より大きな張力となっている. 一般に, ケーブル張力はクリープなどの影響により長い年月を経て減少することが考えられるため, この結果は信頼性が低い結果となっている.

最適化計算により平均EIおよびTを求める方法 (b) により上流側のケーブル張力の推定を行った結果を Table 3 に示す. 平均のEIはEIが非負の制約条件の考慮によりすべて正の値となっている. 設計張力と比較して推定張力は, -198.35kN ~ +53.8kN 異なっており, 下二段のケーブル張力は設計張力より大きくなっている.

Table 3 Estimation of cable tensions by the approach (b) (Upstream side)

Cable number	L(m)	A(m ²)	$\rho(t/m^2)$	EI	Measured cable tension(kN)	Designed cable tension(kN)	Error(%)*
①	62.356	0.0013239	17.501	600.6	1081.6	1279.9	0.85
②	51.161	0.0013239	17.501	136.2	1187.9	1295.5	0.92
③	39.983	0.0013239	17.501	795.7	1171.7	1273.4	0.92
④	28.852	0.0013239	17.501	398.8	1206.0	1188.1	1.02
⑤	17.771	0.0013239	17.501	238.1	1512.8	1493.0	1.01
⑥	17.75	0.0013239	17.501	255.8	1546.8	1493.0	1.04
⑦	28.797	0.0013239	17.501	306.2	1232.4	1188.1	1.04
⑧	39.923	0.0013239	17.501	728.4	1214.6	1273.4	0.95
⑨	51.086	0.0013239	17.501	185.6	1184.7	1295.5	0.91
⑩	62.267	0.0013239	17.501	119.0	1144.4	1279.9	0.89

*Relative errors of measured cable tensions to the designed cable tensions

Table 4 Estimation of cable tensions by the approach (c) (Upstream side)

Cable number	EI1	EI2	EI3	EI4	EI5	Measured cable tension(kN)	Designed cable tension(kN)	Error(%)*
①	910.3	194.4	292.0	311.7	186.0	1108.9	1279.9	0.87
②	532.9	409.9	338.9	366.6	277.3	1160.1	1295.5	0.90
③	349.6	163.7	101.7	115.1	100.3	1242.8	1273.4	0.98
④	487.5	399.8	330.3	270.3	222.5	1175.5	1188.1	0.99
⑤	258.5	236.7	216.3	179.7		1409.6	1493.0	0.94
⑥	219.0	225.3	183.1	170.2		1460.6	1493.0	0.98
⑦	1015.6	772.2	534.6	423.6	296.8	1140.6	1188.1	0.96
⑧	154.4	286.7	172.6	179.3	129.7	1263.7	1273.4	0.99
⑨	142.7	336.7	212.8	146.7	161.7	1189.6	1295.5	0.92
⑩	306.2	208.9	194.9	181.6	136.6	1136.1	1279.9	0.89

Relative errors of measured cable tensions to the designed cable tension

最適化計算により各モードの EI および T を求める方法 (c) によりケーブル張力の推定を行った結果を Table 4 に示す。 EI の上限値を非常に大きな値に設定した場合、この上限値で決定される場合が生じたため Table 3 の結果を参照し、上限値を適切な値に設定した。この場合でも EI が上限値で決定される場合には、ラグランジュ乗数の値を ± 1.0 から ± 100.0 に変更することにより、Table 4 に示すように適切な値が得られた。ケーブル張力はほぼ同じ大きさであるにもかかわらず各モードの EI は大きく異なっており、各モードの EI がケーブル張力に与える影響は鈍感である。ケーブル張力は、設計張力と比較して $-135.4\text{kN} \sim -9.7\text{kN}$ と、すべてのケーブル張力は設計張力と同程度かより小さくなっており、3つの手法の中で最も信頼性が高い結果といえる。最上段ケーブルは 11%~13% 程度設計張力より小さな張力となっている。上二段目のケーブルは 8%~10% 程度小さくなっている。その他のケーブルは設計張力に対して 6%以内の減少により適切に管理されている。下流側についても同様の計算を行い、ほぼ同じ値が得られている。

4. 結 論

- 1) 連立方程式による解法は、 EI の値が負になる場合があり信頼性が低い。また、ケーブル張力が設計張力より大きくなる場合がしばしば見られ、ケーブル張力を大きく見積もっている可能性が高い。
- 2) 最適化計算により各モードの EI および T を求める方法では、ケーブル張力は設計張力と同程度かより小さくなっており、経年のケーブルの張力減少を反映した信頼性の高い張力を推定できた。
- 3) 各モードの EI および T を求める方法では、 EI の上限値の設定によっては、 EI が上限値で決定される場合が見られた。 EI を適切に設定するためには、あらかじめ平均的 EI および T を求める方法により最適解を求め、その解を利用することにより EI の上限値を適切に定めることが望ましい。
- 4) 万代橋の最上段ケーブルは 11%~13% 程度設計張力より小さくなっている。上二段目のケーブル張力は、8%~10% 程度設計張力に対して小さくなっている。その他のケーブルは設計張力に対して 6%以内の減少で適切に管理されている。

謝 辞

万代橋および中角橋のケーブル張力の固有振動数の計測においては、西川隼人 福井工業大学准教授のご指導を得ました。ここに、心からお礼申し上げます。万代橋の設計資料は、越前市建設部都市整備課 木下将一 主幹、および (株) 帝国コンサルタント技術部構造担当部長 川崎敏明 様よりご提供いただきました。ここに、心からお礼申し上げます。

参考文献

- 1) 新家徹, 広中邦汎, 頭井洋, 西村春久: 振動法によるケーブル張力の实用算定式について, 土木学会論文報告集, 第 294 号, P25~32, 1980 年 2 月
- 2) 山極伊知郎, 宇津野秀夫, 菅野直紀, 杉井謙一: 振動法によるケーブル曲げ剛性と張力の同時推定法, 構造工学論文集, vol.42A, P547~554, 1996 年 3 月
- 3) 譚威, 谷脇一弘, 西川隼人: 振動法による中角橋のケーブル張力の測定について, 福井工業大学研究紀要, 第 49 号, pp.85-92, 2019
- 4) 頭井洋, 濱崎義弘・波田凱夫: 径長比の大きいケーブルの張力と曲げ剛性の同定, 土木学会論文集, No.703/I-59, pp.141-149, 2002 年 4 月
- 5) 谷脇一弘, 王志華: 制約条件付き最適化問題に対する粒子群最適化法のロバスト性の検討, 福井工業大学研究紀要, 第 49 号, pp.55-63, 2019
- 6) 3 軸加速度センサー M-A351AU10(EPSON)HP: https://www.epson.jp/prod/sensing_system/accelerometers/

(2020 年 9 月 10 日受理)