

ラグランジュ関数最小化 PSO の制約条件付離散最適化問題への適用

谷脇 一弘^{*1}

Application of Particle Swarm Optimization Method with Minimization of Lagrangian Function to Constrained Discrete Optimization Problems

Kazuhiro TANIWAKI^{*1}

^{*1} Department of Architecture and Civil Engineering

The author illustrates the particle swarm method with minimization of Lagrangian function is an effective method for the constrained optimization problems considering continuous design variables. In the practical optimization problems, the optimum design problems can often be formulated as the discrete optimization problems. In this study, the method is extended to the constrained discrete optimization problems. In the optimization process, the discrete variables are dealt with as continuous variables which indicates the position in the sets of discrete variables. The effectiveness and reliability are illustrated by applying it to the discrete mathematical problems, traveling salesman problem and mixed discrete-continuous design problem of plate girder bridge system.

Key Words : Particle swarm optimization, constrained discrete optimization, traveling salesman problem, mixed discrete-continuous design problem of plate girder bridge system

1. 緒 言

近年、最適化の手法として、鳥の群れを模した多点探索アルゴリズムである粒子群最適化(PSO)¹⁾が提案され、その後粒子群最適化に関して様々な研究が行われてきている。著者²⁾は、PSO を用いた制約条件付連続最適化問題の解法において、最適化問題にラグランジュ関数を導入し、ラグランジュ関数を最小化することにより最適解を得る方法（ラグランジュ最小化 PSO）を提案し、阪井らの提案している α 制約法³⁾と比較することにより、提案したアルゴリズムの有効性及びロバスト性を明らかにしている。

ところで、実際の最適化問題においては、限られた離散的な集合の中からベストな変数の組合せを決定するような組合せ最適化問題として取り扱われることが一般的であり、実際の工学的な最適化問題のほとんどは組合せ最適化問題または離散最適化問題として取り扱われる。離散最適化問題に PSO を適用した研究例として、江本ら⁴⁾は GA（遺伝的アルゴリズム）で用いられる 2 進数のコードと離散変数を対応づけて 0 と 1 の組合せ問題として解いている。また、菅谷ら⁵⁾は、区間 $[-1,1]$ を離散集合の数で等分割し、区間 $[-1,1]$ の連続変数の位置ベクトルにより離散変数を対応付けている。

本研究では、菅谷らの離散変数の取り扱いと同様に連続変数の位置ベクトルを離散変数に対応付けて離散最適化問題を連続最適化問題として取り扱い、これまでに提案しているラグランジュ関数最小化 PSO のアルゴリズムを制約条件付離散最適化問題に適用しその有効性を示すものである。計算例として、数学的問題および巡回セールスマン問題の制約条件付離散最適化問題、さらにプレートガーダー橋の設計問題の連続・離散混合変数最適化問題に適用し、種々の検討結果により、提案した方法は連続最適化問題のみならず離散最適化問題および連続・離散混合変数最適化問題に対しても信頼性の高い方法であることを明らかにしている。

* 原稿受付 2020 年 5 月 29 日

^{*1} 工学部 建築土木工学科
E-mail: taniwaki@fukui-ut.ac.jp

2. 粒子群最適化法(PSO)

粒子群最適化法(PSO)では粒子(エージェント)の数 N だけの決定変数ベクトル群 $\bar{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)^t$ を取り扱う. i 番目のエージェントは n 個の決定変数 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^t$ を有するものとする. \mathbf{x}_i^* は i 番目のエージェントの s 回の改良の中で最良の目的関数値を与える決定変数ベクトル, \mathbf{x}_G^* は s 回の改良のすべての粒子群の中で最良の目的関数値を与える決定変数ベクトルとすると, $s+1$ 回目におけるエージェントの移動速度は, 次式で与えられる.

$$\mathbf{v}_i^{s+1} = w\mathbf{v}_i^s + c_1r_1(\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i^s) + c_2r_2(\mathbf{x}_G^* - \mathbf{x}_i^s), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1)$$

ただし, w は慣性重み(inertia weight), r_1, r_2 は区間 $[0,1]$ の一様乱数である. c_1, c_2 は自己の最良位置およびグループの最良位置への探索に対する重み付けを表現している.

$s+1$ 回目におけるエージェントの改良は次式により行なわれる.

$$\mathbf{x}_i^{s+1} = \mathbf{x}_i^s + \mathbf{v}_i^{s+1}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2)$$

3. 制約条件離散最適化問題

本研究で対象としている離散変数 $\bar{\mathbf{X}}$ を使用した制約付離散最適化問題は, 次のように表現できる.

$$\text{Find } \bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^t \quad \text{which minimize } f(\bar{\mathbf{X}}) \quad (3)$$

subject to

$$g_j(\bar{\mathbf{X}}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (4)$$

$$h_k(\bar{\mathbf{X}}) = 0, \quad k = q+1, \dots, m \quad (5)$$

$$\bar{x}_i \in \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iS_i}\}, \quad i = 1, \dots, n$$

ここに, d_{ij} は, i 番目の離散設計変数 \bar{x}_i において, 利用可能な離散集合の j 番目の離散変数である. S_i は, \bar{x}_i に関する離散集合の要素の数である.

4. DPSO による離散最適化

離散設計変数の粒子群最適化のアルゴリズム (DPSO) を適用するには, 式(3)-(5)の制約条件付離散最適問題を連続変数 \mathbf{X} を用いて以下の制約条件付連続最適化問題に変換する.

$$\text{Find } \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^t \quad \text{which minimize } f(\mathbf{X}) \quad (6)$$

subject to

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (7)$$

$$h_k(\mathbf{X}) = 0, \quad k = q+1, \dots, m \quad (8)$$

$$0 \leq x_i \leq S_i, \quad i = 1, \dots, n$$

離散変数 \bar{x}_i は, 区間 $[0, S_i]$ を離散集合の数 S_i で等分割し, 連続変数の位置ベクトルにより離散変数を対応付けている. すなわち, 連続変数 x_i と離散変数 \bar{x}_i は次式により関係付けられる.

$$\begin{cases} \text{if } x_i < 1 & : \bar{x}_i = d_{i1} \\ \text{if } 1 \leq x_i < 2 & : \bar{x}_i = d_{i2} \\ \text{if } k-1 \leq x_i < k & : \bar{x}_i = d_{ik} \\ \text{if } Si-1 \leq x_i & : \bar{x}_i = d_{iSi} \end{cases} \quad (9)$$

本研究では、式(6)-(8)で示す最適化問題を解く方法としてラグランジュ関数を最小化する方法を用いている²⁾。式(6)-(8)の最適化問題に対するラグランジュ関数は以下になる。

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^q \lambda_j g_j(\mathbf{X}) + \sum_{j=q+1}^m \mu_j h_j(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + f_g(\mathbf{X}) \quad (10)$$

ここに、 λ_j および μ_j は、不等号制約および等号制約に関するラグランジュ乗数であり、非負の値を示す。

不等号制約条件に関するラグランジュ乗数の値は、制約条件を満足している場合には 0.0、満足していない場合には 1.0 を用いる。また、等号制約条件に関しては、違反している場合には、符号により 1.0 または -1.0、満足している場合には 0.0 を用いる。この設定によりラグランジュ関数全体を最小化した場合、制約条件が満足されない場合が生じるので、実行不可能領域の場合にはラグランジュ関数の $f_g(\mathbf{X})$ のみを最小化することとし、実行可能領域もしくはその近傍に近づいた後、ラグランジュ関数全体 $f(\mathbf{X}) + f_g(\mathbf{X})$ を最小化している。すなわち、

$$\text{if } \sum_{j=1}^q \lambda_j g_j(\mathbf{X}) \leq \varepsilon_1 \text{ and } \sum_{j=q+1}^m \mu_j h_j(\mathbf{X}) \leq \varepsilon_2 \quad \text{minimize } f(\mathbf{X}) + f_g(\mathbf{X}) \quad (11)$$

$$\text{if } \sum_{j=1}^q \lambda_j g_j(\mathbf{X}) > \varepsilon_1 \text{ or } \sum_{j=q+1}^m \mu_j h_j(\mathbf{X}) > \varepsilon_2 \quad \text{minimize } f_g(\mathbf{X}) \quad (12)$$

ここに、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は不等号制約条件および等号制約条件の実行可能領域を判断するための許容値であり、 ε_1 の初期値は 0.3 とし、最大繰返し回数の 1/3 以上の回数では 0.1、2/3 以上の回数では 0.001 と変化させている。 ε_2 の初期値は 10.0 とし、最大繰返し回数の 1/3 以上の回数では 5.0、2/3 以上の回数では 2.0 と探索範囲を大きくしている。

最適化過程において、すべてのエージェントが実行不可能領域の場合は、 $f_g(\mathbf{x}_i)$ を最小にするエージェント \mathbf{x}_i^* を選択し、エージェントに実行不可能領域と実行可能領域近くまたは実行可能領域が混在する場合には、 $f(\mathbf{x}_i) + f_g(\mathbf{x}_i)$ を最小にするエージェント \mathbf{x}_i^* を選択する。さらに、すべてのエージェントが実行可能領域の場合には、 $f_g(\mathbf{x}_i)$ は零となるため $f(\mathbf{x}_i)$ を最小にするエージェント \mathbf{x}_i^* を選択する。ここに、 \mathbf{x}_i は*i*番目のエージェントの決定変数ベクトルである。

5. 計算例および考察

本研究の方法の有効性および信頼性を示すために、数学的問題および巡回セールスマン問題の離散最適化問題、さらにプレートガーダー橋の設計問題の連続・離散混合変数最適化問題に適用し、考察を行った結果について述べる。

5.1 離散変数 10 個、制約条件 5 個の線形最小化問題

以下に示す 10 個の離散変数、5 個の制約条件を考慮した線形最適化問題の結果について述べる。

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) = -12x_1 - 17x_2 - 10x_3 - 8x_4 - 40x_5 - 12x_6 - 14x_7 - 10x_8 - 12x_9 - 13x_{10} + 148$$

subject to

$$g_1 = 12x_1 + 28x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 20x_5 + 6x_6 + 21x_7 + 23x_8 + 18x_9 + 6x_{10} - 206 \leq 0$$

$$g_2 = 12x_1 + 28x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 20x_5 + 6x_6 + 21x_7 + 23x_8 + 18x_9 + 6x_{10} - 206 \leq 0$$

$$g_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 4.0 \leq 0$$

$$g_4 = x_4 + x_5 - 4.0 \leq 0$$

$$g_5 = x_6 + x_7 - 3.0 \leq 0$$

$$x_1 \sim x_{10} \in \{1.0, 2.0\}$$

この最適化において、慣性重み $w=0.6$ 、重み c_1 、 c_2 は2.0を用いている。エージェントの数は変数の数の3倍の30個とした。1回の試行の最大繰返し回数を500回とし、20回試行した中で最良解（Best）および最劣解（Worst）をTable 1に示す。また、分枝限定法との比較結果も示している。

Table 1 Optimal solutions by DPSO and Branch and bound method

method	DPSO (Best)	DPSO (Worst)	Branch and bound method
x_1	2.0	2.0	2.0
x_2	1.0	1.0	1.0
x_3	1.0	1.0	1.0
x_4	1.0	2.0	2.0
x_5	2.0	2.0	2.0
x_6	2.0	1.0	1.0
x_7	1.0	2.0	2.0
x_8	1.0	1.0	1.0
x_9	2.0	1.0	1.0
x_{10}	1.0	1.0	1.0
g_1	-4.0	-1.0	-1.0
g_2	-1.0	-3.0	-3.0
g_3	0.0	0.0	0.0
g_4	-1.0	0.0	0.0
g_5	0.0	0.0	0.0
f	-76	-74	-74
number of times ¹⁾	10	10	

1) Number of times in which the optimum solution is obtained in 20 trials

DPSO は20回の試行中10回が $f=-76$ に収束し、また10回が分枝限定法と同じ $f=-74$ に収束した。目的関数値にほとんど差はないが、DPSO はより正確に解を探索している。

5.2 離散変数7個、制約条件4個の非線形最小化問題

つぎに、7個の離散変数、4個の制約条件を考慮した非線形最適化問題について述べる。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{x}) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 13)^2 + 5(x_3 - 1)^2 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 \\ & - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7 \end{aligned}$$

subject to

$$g_1 = 2x_1^2 + 3(x_2 - 1)^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 - 128 \leq 0$$

$$g_2 = 7x_1 + 3x_2 + 10(x_3 - 1)^2 + x_4 - x_5 - 285 \leq 0$$

$$g_3 = 23x_1 + (x_2 - 1)^2 + 6x_6^2 + 8x_7 - 196 \leq 0$$

$$g_4 = 4x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + 3x_1(x_2 - 1) + 2(x_3 - 1)^2 + 5x_6 - 11x_7 \leq 0$$

$$x_1 \sim x_7 \in \{1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0\}$$

この問題においても、慣性重み $w=0.6$ 、重み c_1 、 c_2 は2.0を用いている。エージェントの数は変数の数の3倍の21個とした。1回の試行の最大繰返し回数を500回とし、20回試行した中で最良解（Best）および分

枝限定法との比較結果を Table 2 に示す．DPSO は 20 回とも最適解に収束し，分枝限定法とも一致した．このような複雑な問題においても確実に最適な離散値の組合せを決定できることが明らかとなった．

Table 2 Optimal solutions by DPSO and Branch and bound method

method	DPSO (Best)	DPSO (Worst)	Branch and bound method
x_1	1.0		1.0
x_2	3.0		3.0
x_3	1.0		1.0
x_4	4.0		4.0
x_5	1.0		1.0
x_6	1.0		1.0
x_7	2.0		2.0
g_1	-8.0		-8.0
g_2	-266.0		-266.0
g_3	-179.0		-179.0
g_4	-3.0		-3.0
f	727		727
number of times ¹⁾	20		

1) Number of times in which the optimum solution is obtained in 20 trials

5.3 巡回セールスマン問題⁶⁾

次に，巡回セールスマン問題に適用した例を示す． n 都市の巡回セールスマン問題の定式化は文献 7) による以下の定式化を用いた．

Find $x_{ij}(i = 1, n), (j = 1, \dots, n), y_i(i = 1, \dots, n - 1)$

which minimize $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$

subject to

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} = 1 \quad \forall i$$

$$y_i + 1 - M(1 - x_{ij}) \leq y_j \quad \forall i, j$$

$$1 \leq y_i \leq n - 1 \quad \forall i$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j.$$

ここに， x_{ij} は i 都市から j 都市へ移動する場合に 1，移動しない場合 0 を示す指標を示す． c_{ij} は i 都市と j 都市の間の距離を示す． y_i は $1 \sim (n - 1)$ までの間の整数の補助変数であり，都市の訪問順序を示す． M は任意の大きな整数を示す．

(1) 4 都市巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題として，Fig.1 に示す 4 つの都市の A 都市を出発して B, C, D のすべての都市に到達するための距離を最小化する問題を考える． $M=3$ とした場合の定式化は以下の通りである．

Find $x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BA}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CA}, x_{CB}, x_{CD}, x_{DB}, x_{DA}, x_{DC}, y_B, y_C, y_D$

which

minimize $f(x) = 6x_{AB} + 5x_{AC} + 8x_{AD} + 6x_{BA} + 7x_{BC} + 4x_{BD} + 5x_{CA} + 7x_{CB} + 3x_{CD} + 4x_{DB} + 8x_{DA} + 3x_{DC}$

subject to

$$g_1 = x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} = 1$$

$$\begin{aligned}
 g_2 &= x_{BA} + x_{CA} + x_{DA} = 1 \\
 g_3 &= x_{BA} + x_{BC} + x_{BD} = 1 \\
 g_4 &= x_{AB} + x_{CB} + x_{DB} = 1 \\
 g_5 &= x_{CA} + x_{CB} + x_{CD} = 1 \\
 g_6 &= x_{AC} + x_{BC} + x_{DC} = 1 \\
 g_7 &= x_{DA} + x_{DB} + x_{DC} = 1 \\
 g_8 &= x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} = 1 \\
 g_9 &= y_B - y_C + 3x_{BC} \leq 2 \\
 g_{10} &= y_C - y_B + 3x_{CB} \leq 2 \\
 g_{11} &= y_B - y_D + 3x_{BD} \leq 2 \\
 g_{12} &= y_D - y_B + 3x_{DB} \leq 2 \\
 g_{13} &= y_C - y_D + 3x_{CD} \leq 2 \\
 g_{14} &= y_D - y_C + 3x_{DC} \leq 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BA}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CA}, x_{CB}, x_{CD}, x_{DB}, x_{DA}, x_{DC} &\in \{0, 1\} \\
 y_B \in \{1, 2, 3\}, \quad y_C \in \{1, 2, 3\}, \quad y_D \in \{1, 2, 3\}.
 \end{aligned}$$

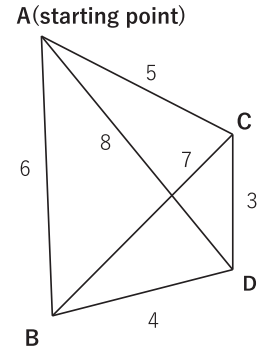


Fig.1 Traveling salesman problem for 4 cities

最適化過程において、慣性重み $w=0.6$ 、 c_1, c_2 はいずれも 2.0、エージェント数を 50 個、最大繰返し回数を 500 回と設定した。連続変数最適化の場合には初期値に最適化近傍の改良解を取り込むことにより、信頼性を大きく向上させることができた²⁾ことより、この問題において 500 回の最大改良回数繰返した後得られた解をエージェント 50 個の中に取り込むことを 1 回行った場合(Num. of reset=1)、3 回行った場合(Num. of reset=3)について比較を行った。それぞれの場合について 50 回試行を行い、得られた解のなかで最良解(Best)および最劣解(Worst)を Table 3 に示す。

Table 3 Optimum solutions for Traveling salesman problem for 4 cities

Route	DPSO Num. of reset ¹⁾ = 0		DPSO Num. of reset ¹⁾ = 1		DPSO Num. of reset ¹⁾ = 3	
	Best	Worst	Best	Worst	Best	Worst
x_{AB}	1	0	1	0	1	0
x_{AC}	0	0	0	0	0	0
x_{AD}	0	1	0	1	0	1
x_{BA}	0	1	0	1	0	1
x_{BC}	0	0	0	0	0	0
x_{BD}	1	0	1	0	1	0
x_{CA}	1	0	1	0	1	0
x_{CB}	0	1	0	1	0	1
x_{CD}	0	0	0	0	0	0
x_{DB}	0	0	0	0	0	0
x_{DA}	0	0	0	0	0	0
x_{DC}	1	1	1	1	1	1
y_B	1	3	1	3	1	3
y_C	3	2	3	2	3	2
y_D	2	1	2	1	2	1
$f(x)$	18	24	18	24	18	24
iteration ²⁾	500		1000		2000	
Number of times ³⁾	18		18		18	

1) Number of reset times for initial values

2) Number of iteration for minimization process

3) Number of times in which the optimum solution is obtained in 50 trials

この問題において、改良解をエージェントに取り込む回数を変化させても最適解は変化しておらず、効果は全く得られていない。これは、問題に等号制約条件が多く、解が等号制約条件で決定されるため、探索領域が非常に狭くなるためと思われる。そのため 50 回の試行中解が得られる場合はわずか 18 回であった。最適解の目的関数値が 18 の場合と局所最適解の目的関数値が 24 の場合の 2 通りのルートを図.2 および図.3 に示す。一度到達した局所最適解の情報をエージェントに取り込んでも、等号制約条件で満足された局所最適解から全域的な最適化へ改良することは困難であった。

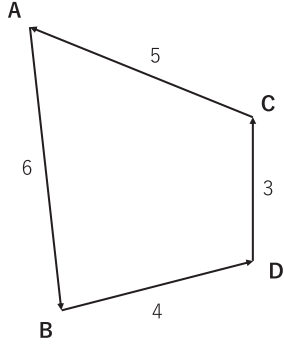


Fig.2 Global optimum solution ($f=18$)

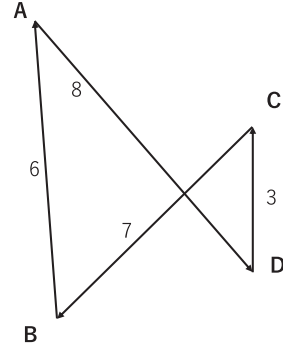


Fig.3 Local optimum solution ($f=24$)

(2) 10 都市巡回セールスマン問題

図.4 に示す 10 都市を結ぶ最短経路を探索する巡回セールスマン問題に DPSO を適用した結果について述べる。この問題では $M=9$ を設定して以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} &\text{Find } x_{ij} (i = 1, \dots, 10), (j = 1, \dots, 10), y_i (i = 1, \dots, 9) \quad \text{which} \\ &\text{minimize } \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij} \\ &\text{subject to} \\ &\quad \sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ &\quad \sum_{j=1}^{10} x_{ji} = 1 \quad \forall i \\ &\quad y_i + 1 - 9 \times (1 - x_{ij}) \leq y_j \quad \forall i, j \\ &\quad 1 \leq y_i \leq 9 \quad \forall i \\ &\quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

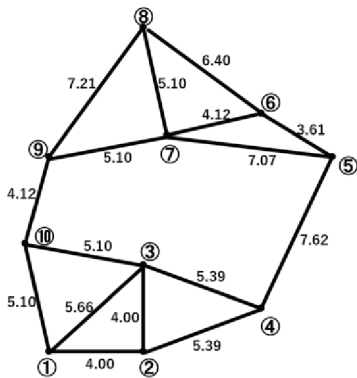


Fig.4 Traveling salesman problem for 10 cities and available routes

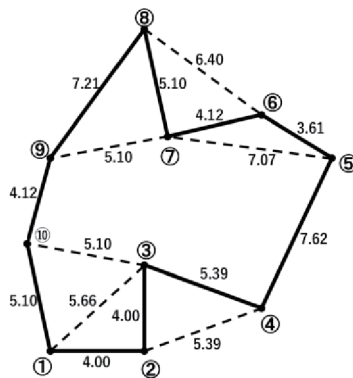


Fig.5 Optimum solution ($f=50.26$)

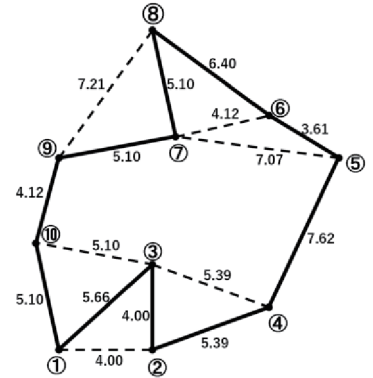


Fig.6 Local optimum solution ($f=52.09$)

本研究では、最適化過程で考慮すべき変数の数および制約条件の数を減少させるため、Fig.4 に示すように、予めすべての都市間の距離を計算し、着目都市に対して距離が短くなる 3 都市を結ぶルートのみを考慮することとした。このことにより、変数の個数は 41 個、不等号制約条件の数は 72 個、等号制約条件の数は 20 個となっている。エージェントの数 150 個、 $w=0.6$ 、 c_1, c_2 はいずれも 2.0、最大繰返し回数 5000 回として 50 回試行を行い、その中で最良解の目的関数値を最適解とした。50 回の試行において、31 回最適解またはその近傍のルートを選択した。最適解の目的関数の値 $f=50.26$ であり、最適なルートを Fig.5 に示す。Fig.6 は解が得られた中で最劣解である $f=52.09$ の場合のルートを示している。

以上の検討結果より、等号制約条件により探索領域が狭められた巡回セールスマン問題においても、複数回の試行を行うことにより確実に最適解を得ることができることが明らかとなった。

5.4 プレートガーダー橋の最適設計問題

Fig.7 に示すプレートガーダー橋の主桁および床版の建設費用を最小とする断面諸元 $x_1 \sim x_8$ の最適値を決定する最適設計問題の計算例を示す。橋のスパン長は 23.0m、鋼製桁 A、B、C の断面寸法は同じであると仮定している。設計変数は、Fig.8 の I 型断面の幅と厚さ $x_1 \sim x_6$ 、Fig.9 に示す RC 床板の厚さ x_7 および主鉄筋の直径 x_8 を考慮している。

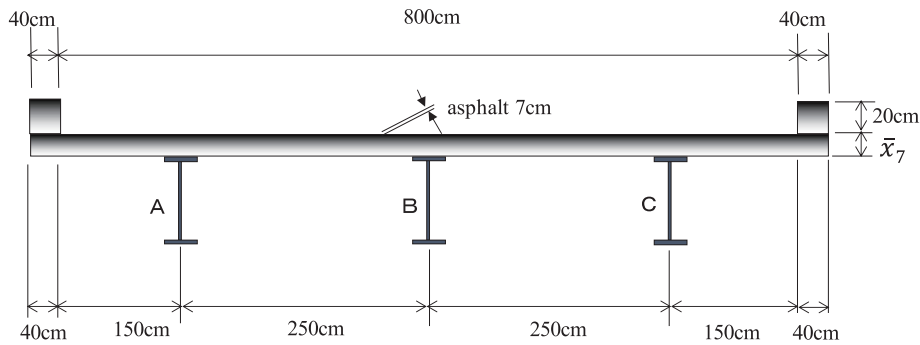


Fig.7 Cross section of plate-girder bridge system

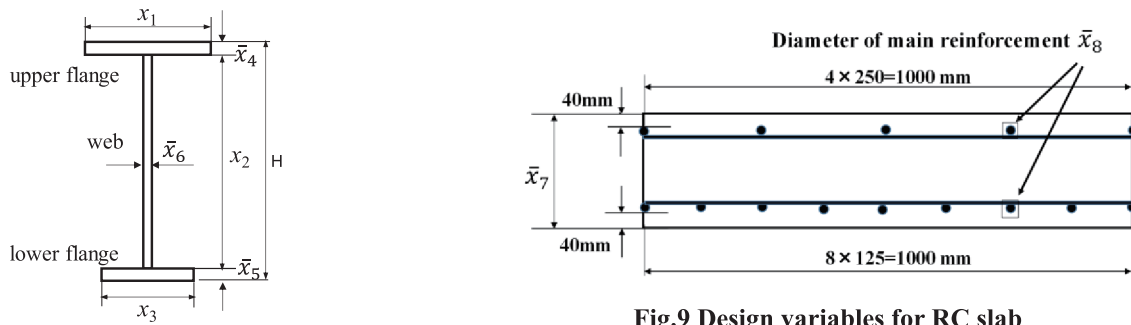


Fig.9 Design variables for RC slab

Fig.8 Design variables for I-section

この問題において、 $x_1 \sim x_3$ は連続変数、 $x_4 \sim x_8$ は離散変数 $\bar{x}_4 \sim \bar{x}_8$ として取り扱い、混合変数最適化問題となっている。設計問題において、固定点間距離 460cm、鋼材は SM400 を仮定し、影響線を用いて死荷重および活荷重による設計曲げモーメントを算出した。

離散変数群は、実際の市場で販売されている以下に示す使用可能な離散値の集合を考慮している。

$$\begin{aligned} \bar{x}_4, \bar{x}_5 &\in \{1.9, 2.2, 2.5, 2.8, 3.2(\text{cm})\}, & \bar{x}_6 &\in \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.9(\text{cm})\} \\ \bar{x}_7 &\in \{25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33(\text{cm})\}, & \bar{x}_8 &\in \{13, 16, 19, 22, 25(\text{mm})\}, \end{aligned}$$

目的関数は、橋軸方向の単位長さに対する橋梁の総コストを考慮した．

$$f(\bar{\mathbf{X}}) = C_R W_S A_S(\bar{x}_8) + C_S W_S \frac{\bar{x}_7}{100} + \frac{3C_g}{10000} (x_1 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_6 + x_3 \bar{x}_5)$$

ここに、 $A_S(\bar{x}_8)$ は単位長さ当たりの主鉄筋の断面積(m^2)、 C_R は単位体積当たりの主鉄筋のコスト(7.85×300 千円/ m^3)、 C_S は単位体積当たりの RC 床版のコスト(100 千円/ m^3)、 C_g は単位体積当たりの鋼桁のコスト(7.85×650 千円/ m^3)、 C_R 、 C_S 、および C_g は、実際の建設コストを調査することにより、それぞれ上記の値に設定している．設計制約条件は、道路橋示方書⁸⁾に規定されている次の 17 個の制約条件を考慮している．

ウェブの高さの制約

$$g_1 = x_1 - (x_2 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5) / 5 \geq 0,$$

フランジの幅の制約

$$g_2 = x_1 - (x_2 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5) / 3 \leq 0$$

$$g_3 = x_3 - (x_2 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5) / 5 \geq 0,$$

$$g_4 = x_3 - (x_2 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5) / 3 \leq 0$$

$$g_5 = \bar{x}_4 - (x_1 - \bar{x}_6) / 2 / 12.8 \geq 0.$$

フランジの厚さの制約

$$g_6 = \bar{x}_5 - (x_3 - \bar{x}_6) / 2 / 16 \geq 0$$

$$g_7 = \bar{x}_6 - x_2 / 152 \geq 0$$

フランジの応力度制約

$$g_8 = 0.95\sigma_{ca} - \sigma_u \leq 0$$

$$g_9 = \sigma_u - \sigma_{ca} \leq 0$$

$$g_{10} = 0.95\sigma_{ta} - \sigma_l \leq 0$$

$$g_{11} = \sigma_l - \sigma_{ta} \leq 0,$$

ここに、 σ_u および σ_l はそれぞれ、上・下フランジプレートの上・下フランジプレートの応力度である． σ_{ca} は、許容圧縮応力である． σ_{ta} は許容引張応力（ 140N/mm^2 ）である．

桁のせん断応力度および合成応力度制約

$$g_{12} = \tau - \tau_a \leq 0$$

$$g_{13} = \left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_{ta}}\right)^2 - 1.2 \leq 0,$$

ここに、 τ と τ_a は、それぞれせん断応力度および許容せん断応力（ 80N/mm^2 ）である． σ_w は、ウェブプレートの上・下フランジプレートの最大曲げ応力である．

RC 床版の応力度制約

$$g_{14} = \frac{0.85\sigma_a}{3} - \sigma_{RC} \leq 0$$

$$g_{15} = \sigma_{RC} - \sigma_a / 3 \leq 0$$

ここに、 σ_{RC} と σ_a は、それぞれ RC 床版の応力とコンクリートの設計強度（ 24N/mm^2 ）である．

主鉄筋の応力度制約

$$g_{16} = 0.9\sigma_{ta} - \sigma_{st} \leq 0$$

$$g_{17} = \sigma_{st} - \sigma_{ta} \leq 0,$$

ここに、 σ_{st} および σ_{ta} は、それぞれ主鉄筋の応力および許容引張応力（ 140N/mm^2 ）である．

DPSO の最適化過程において、エージェント数 30 個、慣性重み $w=0.6$ 、 c_1, c_2 は 2.0 とした．最大繰返し回数は 1500 回とし、同じ条件を用いて 20 回試行を行い、その中で最もコストの安い最良解 (Best) および最も

Table 4 Optimum solutions of mixed discrete-continuous design variables

Variables	Denotations	Continuous	Discrete	Best	Worst
x_1	Upper Flange Width (cm)	○		56.1	49.5
x_2	Web Height (cm)	○		212.9	213.9
x_3	Lower Flange Width (cm)	○		55.1	45.0
\bar{x}_4	Upper Flange Thickness (cm)		○	2.5	2.8
\bar{x}_5	Lower Flange Thickness (cm)		○	2.2	2.5
\bar{x}_6	Web Thickness (cm)		○	1.4	1.6
\bar{x}_7	Thickness of Slab (cm)		○	27	27
\bar{x}_8	Reinforced Diameter (mm)		○	22	22
Objective function ($\times 10^3$ yen /m)				1172.9	1224.3

Table 5 Values of constraints at optimum solution

Constraint No.	Kinds of constrains	Best	Worst
g_1	Lower limit of web plate thickness	0.0	-0.2
g_2	Lower limit of width of upper flange plate	-12.6	-5.7
g_3	Upper limit of width of upper flange plate	-16.4	-23.5
g_4	Lower limit of width of lower flange plate	-11.6	-1.1
g_5	Upper limit of width of lower flange plate	-17.4	-16.5
g_6	Lower limit of thicknesses of upper flange plate	-0.4	0.5
g_7	Upper limit of thicknesses of lower flange plate	-0.5	-0.8
g_8	Lower limit of stress on upper flange plate	-6.6	-1.0
g_9	Upper limit of stress on upper flange plate	0.0	0.0
g_{10}	Lower limit of stress on lower flange plate	-7.0	-5.6
g_{11}	Upper limit of stress on lower flange plate	0.0	0.0
g_{12}	Upper limit of shear stress on web plate	-47.7	-45.2
g_{13}	Upper limit of combined stress on web plate	-0.1	-0.1
g_{14}	Lower limit of stress on the RC-slab	-0.7	-0.7
g_{15}	Upper limit of stress on the RC-slab	-0.5	0.5
g_{16}	Lower limit of stress on main reinforcement	-1.5	0.0
g_{17}	Upper limit of stress on main reinforcement	-12.5	-14.0

コストの高い最劣解（Worst）の結果を Table 4 に示す．また，最適解における制約条件の値を Table 5 に示す．

最劣解の場合のウェブプレートの高さと厚さは，最良解の場合よりも大きくなっている．一方，最劣解の場合のフランジの幅は，最良解の場合よりも小さくなっている．最適解では，ウェブプレートの厚さの制約 g_1 ，上・下フランジの応力制約 g_9 ， g_{11} がアクティブとなっている．以上より，最適解はきわめて合理的な断面で決定されており，最適解のコストは 1172.9 千円/m となった．

これらの検討結果より，提案されたアルゴリズムは，連続・離散混合設計変数の最適解を効率的かつ厳密に決定できることが明らかとなった．

6. 結 論

本研究により得られた結論は以下の通りである.

- 1) 本研究で提案した離散最適化法 (DPSO) は, 数学的問題, 巡回セールスマン問題, プレートガーダー橋の最適化問題の制約条件付離散最適化問題において確実に最適解を得ることができ信頼性の高い方法であることが明らかとなった.
- 2) 制約条件付離散最適化問題において, すべての場合に慣性重み $w=0.6$, c_1, c_2 はいずれも 2.0 を設定したが, すべての問題において, 確実に最適解が得られ問題は見られなかった.
- 3) 巡回セールスマン問題のように問題が複雑となり最適解が等号制約条件で決定されるような場合には, 探索領域が限定的となるため一回の試行では解が得られない場合が生じた. しかし, このような場合においても 50 回程度の試行を行うことにより, 確実に最適解に到達することができ, 解の信頼性を高めることができた.
- 4) 本研究で提案した離散最適化法は, 連続変数と離散変数を同時に考慮した混合変数最適化問題においても容易に取り扱うことができることが明らかとなった.

謝 辞

本研究を遂行するにあたり, 当時福井工業大学大学院 2 年生であった王志華君の協力を得た. ここに, 感謝の意を表します.

参考文献

- 1) James Kennedy, Russell Eberhart, "Particle Swarm Optimization", IEEE, pp.1942~1949, 1995
- 2) 谷脇一弘, 王志華, "制約条件付き最適化問題に対する粒子群最適化法のロバスト性の検討", 福井工業大学研究紀要, 第 49 号, pp.55-63, 2019
- 3) 阪井節子, 高濱徹行, "α 制約パーティクルスウォームオプティマイザ αPSO による制約付き最適化", 数理解析研究所講究録 / 京都大学数理解析研究[編], vol.1457, pp.233~240, November 2005
- 4) 江本久雄, 別府万寿博, 中村秀明, 宮本文穂, "複数の準最適解を探索可能な DPSO の提案と衝撃荷重を受ける RC 版の最適設計", 土木学会論文集 F, Vol.62, No.3, pp.419~432, 2006.7
- 5) 菅谷明誉, 曾我部博之, "修正 PSO によるトラス構造物の高次元最適化 離散設計変数を用いた最小重量設計", 日本建築学会・情報システム技術委員会 第 36 回情報・システム・利用・技術シンポジウム 2015, pp.141~144, 2015
- 6) 久保幹雄, "組合せ最適化とアルゴリズム", 共立出版, 2000 年 10 月
- 7) (株)ブレインパッド, "巡回セールスマン問題から始まる数理最適化", BrainPad Advent Calendar 2017/8 日目, <https://qiita.com/panchovie/items/6509fb54e3d53f4766aa>
- 8) 日本道路協会, "道路橋示方書・同解説, II 鋼橋編", 平成 24 年 3 月

(2020 年 9 月 10 日受理)