

制約条件付き最適化問題に対する粒子群最適化法のロバスト性の検討

谷脇 一弘^{*1}, 王 志華^{*2}

Investigation on Robustness of Particle Swarm Optimization Method for Constrained Optimization Problems

Kazuhiro TANIWAKI^{*1} and Zhihua WANG^{*2}

^{*1} Department of Architecture and Civil Engineering

^{*2} Master Course Student in Department of Social Systems Engineering (Civil Engineering Course)

A constrained optimization problem for minimizing an objective function under given constraints, especially a nonlinear optimization problem, appears frequently in a real problem. Recently, particle swarm optimization method has been developed for solving the optimization problems and several optimization algorithms in the particle swarm optimization method have been proposed for the constrained optimization problems. In this study, new algorithm is proposed for solving the constrained optimization problems, in which the Lagrangian function is introduced and the values for the Lagrange multipliers are set at 1.0 for active constraints and 0.0 for inactive constraints. In the minimization process, the term of constraints in the Lagrangian function is exclusively minimized in non-feasible region and the whole of the function is minimized in near feasible region. The effectiveness and robustness of the proposed algorithm is illustrated by comparing the results for several constrained optimization problems obtained by the α PSO and α GA.

Key Words : Particle swarm optimization, constrained optimization problem, robustness of algorithm

1. 緒 言

与えられた制約のもとで目的関数を最小にするような解を求める制約条件付き最適化問題, 特に非線形最適化問題は, 実問題に頻繁に出現する重要な最適化問題である. 近年, 最適化の手法として, 鳥の群れを模した多点探索アルゴリズムである粒子群最適化(PSO)の考え方¹⁾が提案され, その後粒子群最適化に関して様々な研究が行われてきている. PSOの基本的な考え方は, 各動物(エージェント)が餌などを探すときにグループ内の他のエージェントと情報を共有し, 各エージェントは各自の経験だけでなく, 他の全てのエージェントの経験の情報から利益を受けているという仮定を最適化に応用しようというものである. このPSOは, アルゴリズムが非常に単純であることや目的関数の勾配情報が不要であることなどから様々な工学分野で応用されている. これまで主として連続関数の最適化問題に応用され, 非線形の強い関数でも最適化が可能であることが明らかとなりつつある. 阪井ら²⁾は, 制約条件付き最適化問題に対して, α 制約法^{3,4)}とPSOを組み合わせた α PSOにより, 種々の制約条件付き最適化問題に対して, 効率的にかつより高い精度で最適解が得られることを示している.

本研究では, PSOを用いた制約条件付き最適化問題の解法において, 最適化問題にラグランジュ関数を導入し, ラグランジュ関数を最小化することにより最適解を得る方法を提案している. 最適化過程において, 違反している制約条件のラグランジュ乗数の値を1.0, 満足している制約条件に対しては0.0を設定し, 実行不

* 原稿受付 2019年3月29日

^{*1} 工学部 建築土木工学科

^{*2} 大学院 社会システム学専攻 土木工学コース1年生

E-mail: taniwaki@fukui-ut.ac.jp

可能領域の場合には、ラグランジュ関数の制約条件に関する項のみを最小化し、実行可能領域近くにおいてはラグランジュ関数全体を最小化している。計算例において、阪井らの論文²⁾で示されている制約条件付最適化問題に本手法を適用し、 α PSO および α GA による最適解と比較し、提案したアルゴリズムの有効性およびロバスト性を示している。さらに、初期値に最適解近傍の解を何度か取り込み再度最適化を行った場合の解の信頼性についても検討を行っている。

2. 粒子群最適化法(PSO)

粒子群最適化法(PSO)では、粒子(エージェント)の数 N だけの決定変数ベクトル群 $\bar{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)^t$ を取り扱う。 i 番目のエージェントは n 個の決定変数 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^t$ を有するものとする。最適化において、 \mathbf{x}_i^* は i 番目のエージェントの s 回の改良の中で最良の目的関数値 $pbest_i$ を与える決定変数ベクトル、 \mathbf{x}_G^* は s 回の改良のすべての粒子群の中で最良の目的関数値 $gbest$ を与える決定変数ベクトルとする。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^* &= \arg \min_{\tau=0,1,\dots,t} f(\mathbf{x}_i^\tau) \quad (i = 1, \dots, N), & pbest_i &= \min_{\tau=0,1,\dots,t} f(\mathbf{x}_i^\tau) \\ \mathbf{x}_G^* &= \arg \min_{i=1,\dots,N} f(\mathbf{x}_i^*), & gbest &= \min_{i=1,\dots,N} pbest_i \end{aligned}$$

$(s+1)$ 回目におけるエージェントの移動速度は、次式で与えられる。

$$\mathbf{v}_i^{s+1} = w\mathbf{v}_i^s + c_1r_1(\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i^s) + c_2r_2(\mathbf{x}_G^* - \mathbf{x}_i^s), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1)$$

ただし、 w は慣性重み(inertia weight), r_1, r_2 は区間 $[0, 1]$ の一樣乱数である。 c_1, c_2 は自己の最良位置およびグループの最良位置への探索に対する重み付けを表現している。

$(s+1)$ 回目におけるエージェントの改良は次式により行われる。

$$\mathbf{x}_i^{s+1} = \mathbf{x}_i^s + \mathbf{v}_i^{s+1}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2)$$

PSO において、 w (慣性重み) は解への収束を制御する重要なパラメータである。 w が大きい場合は新しい領域を探索する、すなわち大域的探索を行う傾向が強くなり、小さい場合には現在の位置の周辺領域を探索する、すなわち局所的探索を行う傾向が強くなる。 w を適切に調整することで、大域的探索と局所的探索のバランスをとることができる。初期には探索空間を網羅的に調べるために大域探索を強くし、精度の高い解を得るために次第に局所探索を強くする。すなわち初期には w を大きく取り、次第に減少させていく方法が提案されている。

3. 制約条件付最適化問題

本研究では、下記に示す制約条件付最適化問題を対象とする。

$$\text{Find } \mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^t \quad \text{which minimize } f(\mathbf{X}) \quad (3)$$

subject to

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (4)$$

$$h_j(\mathbf{X}) = 0, \quad j = q+1, \dots, m \quad (5)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

ここに、 $f(\mathbf{X})$ は目的関数、 $g_j(\mathbf{X})$ は q 個の不等号制約、 $h_j(\mathbf{X})$ は $(m-q)$ 個の等号制約であり、 f, g_j, h_j は線形あるいは非線形の実数値関数である。また、 l_i および u_i はそれぞれ、決定変数 x_i の下限値および上限値である。

4. α PSO による最適化²⁾⁻⁴⁾

式(3)-(6)で示す最適化問題を解く方法として阪井らにより提案されている α PSO²⁾の概要について以下に述

べる。

α 制約法では、制約をどの程度満足しているかを表現するために、制約満足度 $\mu(\mathbf{X})$ を導入する。制約満足度 $\mu(\mathbf{X})$ は実行可能領域の場合には 1.0, 実行不可能領域においては、違反の程度により 0 以上 1 未満の数値を与える指標である。

$$\begin{cases} \mu(\mathbf{X}) = 1, & \text{if } g_i(\mathbf{X}) \leq 0, h_j(\mathbf{X}) = 0 \text{ for all } i, j \\ 0 \leq \mu(\mathbf{X}) < 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

例えば 3. の最適化問題における各制約条件は、機械的に以下のような g_i, h_j に関する区分的線形の制約満足度関数に変換できる。ただし、 $b_i, b_j (> 0)$ は適当な定数である。

$$\mu_{g_i}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_i(\mathbf{X}) \leq 0 \\ 1 - \frac{g_i(\mathbf{X})}{b_i}, & \text{if } 0 \leq g_i(\mathbf{X}) \leq b_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

$$\mu_{h_j}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 - \frac{|h_j(\mathbf{X})|}{b_j}, & \text{if } |h_j(\mathbf{X})| \leq b_j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

この各制約の満足度から制約全体の満足度 $\mu(\mathbf{X})$ は、各制約満足度を結合してその最小値とする。

$$\min \text{ 演算 } \mu(\mathbf{X}) = \min_{i,j} \{\mu_{g_i}(\mathbf{X}), \mu_{h_j}(\mathbf{X})\} \quad (10)$$

PSO における最良解の決定は、関数値と制約満足度の組 (f, μ) の集合上において、制約満足度が α 以上の場合には目的関数値の大小関係を優先し、それ以外の場合は制約満足度の大小関係を優先する比較を行う。この比較を α レベル比較と称している。例えば、エージェント $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ における関数値を f_1, f_2 , 制約満足度を μ_1, μ_2 とすると、通常的大小関係である \leq に対応する関数値と制約満足度の組 (f_i, μ_i) 間的大小関係である α レベル比較 \leq_α ($0 \leq \alpha \leq 1$) は以下ようになる。

$$(f_1, \mu_1) \leq_\alpha (f_2, \mu_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 \leq f_2, & \text{if } \mu_1, \mu_2 \geq \alpha \\ f_1 \leq f_2, & \text{if } \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_1 > \mu_2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

等式制約のように実行可能領域が極端に狭い問題では、実行可能領域の発見が困難なため、制約満足度の高い探索点の付近にほかの探索点が集中して探索領域が狭くなってしまうことで目的関数値の最適化が困難になる。これを避けるためには、 α レベルを式(12)で制御することを提案している。すなわち、初期値 $\alpha(0)$ を初期グループの制約満足度の平均値と最大値の間とし、最大反復回数 S の半分以降は常に 1 となる反復回数 s の 2 次式に基づく制御としている。ここに、 N はエージェントの数である。

$$\alpha(0) = \frac{1}{2} \left(\max_{x_i} \mu(x_i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu(x_i) \right), \quad \alpha(s) = \begin{cases} 1 - (1 - \alpha(0)) \left(1 - \frac{2s}{S} \right)^2, & 0 < s < \frac{S}{2} \\ 1, & s \geq \frac{S}{2} \end{cases} \quad (12)$$

5. ラグランジュ関数最小化による最適化

本研究では、式(3)-(6)で示す最適化問題を解く方法としてラグランジュ関数を最小化する方法を提案している。式(3)-(6)の最適化問題に対するラグランジュ関数は以下ようになる。

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^q \lambda_j g_j(\mathbf{X}) + \sum_{j=q+1}^m \mu_j h_j(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + f_g(\mathbf{X}) \quad (13)$$

ここに、 λ_j および μ_j は、不等号制約および等号制約に関するラグランジュ乗数であり、非負の値を示す。

鞍点の定理から、ラグランジュ関数を変数について最小化、ラグランジュ乗数について最大化することにより最適解が求められるが、本研究の方法ではラグランジュ乗数の改良が困難なため、不等号制約条件に関するラグランジュ乗数の値は、制約条件を満足している場合には 0.0、満足していない場合には 1.0 を設定した。また、等号制約条件に関しては、違反している場合には、符号により 1.0 または -1.0、満足している場合には 0.0 を設定した。

この条件を用いてラグランジュ関数全体を最小化した場合、制約条件が満足されない場合が生じるので、実行不可能領域の場合にはラグランジュ関数の $f_g(\mathbf{X})$ のみを最小化することとし、実行可能領域もしくはその近傍に近づいた後、ラグランジュ関数全体 $\{f(\mathbf{X}) + f_g(\mathbf{X})\}$ を最小化している。すなわち、

$$\text{if } \sum_{j=1}^q \lambda_j g_j(\mathbf{X}) \leq \varepsilon_1 \text{ and } \sum_{j=q+1}^m \mu_j h_j(\mathbf{X}) \leq \varepsilon_2 \quad \text{minimize } f(\mathbf{X}) + f_g(\mathbf{X}) \quad (14)$$

$$\text{if } \sum_{j=1}^q \lambda_j g_j(\mathbf{X}) > \varepsilon_1 \text{ or } \sum_{j=q+1}^m \mu_j h_j(\mathbf{X}) > \varepsilon_2 \quad \text{minimize } f_g(\mathbf{X}) \quad (15)$$

ここに、 ε_1 、 ε_2 は不等号制約条件および等号制約条件の実行可能領域を判断するための許容値であり、4 で述べた α に相当するパラメータである。 $f_g(\mathbf{X})$ は非負の値であり、実行可能領域の場合は 0.0 となる。本研究では、 ε_1 の初期値は 0.3 とし、最大繰返し回数の 1/3 以上の回数では 0.1、2/3 以上の回数では 0.001 と変化させている。 ε_2 の初期値は 10.0 とし、最大繰返し回数の 1/3 以上の回数では 5.0、2/3 以上の回数では 2.0 と探索範囲を大きくしている。

PSO における最良解の決定は、すべてのエージェントが実行不可能領域の場合は、 $f_g(\mathbf{x}_i)$ を最小にするエージェント \mathbf{x}_i^* を選択し、エージェントに実行不可能領域と実行可能領域近くまたは実行可能領域が混在する場合には、 $\{f(\mathbf{x}_i) + f_g(\mathbf{x}_i)\}$ を最小にするエージェント \mathbf{x}_i^* を選択する。さらに、すべてのエージェントが実行可能領域の場合には、 $f_g(\mathbf{x}_i)$ は零となるため $f(\mathbf{x}_i)$ を最小にするエージェント \mathbf{x}_i^* を選択する。ここに、 \mathbf{x}_i は i 番目のエージェントの決定変数ベクトルである。

6. 計算例による有効性の検討

本研究では提案した方法の有効性を検討するために、阪井らの論文²⁾で用いられている下記に示す 6 ケースの最適化問題に適用し α PSO²⁾ および α GA^{5),6)} との比較を行った。阪井らの研究による α PSO では、エージェント数は 70 個、最大繰返し回数は 5000 回、重み係数 c_1 、 c_2 は 2.0、慣性重み w の初期値を 1.0 とし最終的に 0.2 まで変化させている。 α GA の結果は文献 2) および文献 6) に基づいている。本研究では、エージェント数は 70 個、最大繰返し回数を 1500 回、重み係数 c_1 、 c_2 は 2.0、慣性重み w は 0.4, 0.6 の 2 ケースについて検討を行った。また、PSO においては、初期値に最適化近傍の改良解を取り込むことにより、信頼性を大きく向上させることができると考えられるため、本研究では、1500 回の最大改良回数繰返した後得られた解を初期値 70 個の中に取り込むことを 1 回行った場合 (Number of reset=0)、3 回行った場合 (Number of reset=3)、5 回行った場合 (Number of reset=5) および 10 回 (Number of reset=10) 行った場合の最適解の比較も行っている。

6.1 CASE1 の最適化問題

CASE1 では、13 個の決定変数、9 個の制約条件および各変数の上下限制約を考慮した線形最適化問題を取り扱う。この問題に対して本手法、 α PSO および α GA のそれぞれの手法を 100 回試行し、得られた解の最小値(best)、平均値(average)、最大値(worst)、偏差(deviation)、本手法により 100 回の試行の中で最適解が得られた回数(Number of times)を Table1 に示す。

$$\text{minimize } f_1(\mathbf{x}) = 5 \sum_{i=1}^4 x_i - 5 \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \sum_{i=5}^{13} x_i$$

subject to

$$\begin{aligned} &2(x_1 + x_2) + x_{10} + x_{11} \leq 10, \quad 2(x_1 + x_3) + x_{10} + x_{12} \leq 10, \quad 2(x_2 + x_3) + x_{11} + x_{12} \leq 10, \\ &-8x_1 + x_{10} \leq 0, \quad -8x_2 + x_{11} \leq 0, \quad -8x_3 + x_{12} \leq 0, \quad -2x_4 - x_5 + x_{10} \leq 0, \quad -2x_6 - x_7 + x_{11} \leq 0 \\ &-2x_8 - x_9 + x_{12} \leq 0, \\ &0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, \dots, 9), \quad 0 \leq x_i \leq 100 \quad (i = 10, 11, 12), \quad 0 \leq x_{13} \leq 1 \end{aligned}$$

Table 1 Comparisons of optimum solutions by the proposed method, α PSO and α GA

CASE1								
	method	proposed method					α PSO	α GA
		Number of reset ¹⁾ = 0	Number of reset ¹⁾ = 1	Number of reset ¹⁾ = 3	Number of reset ¹⁾ = 5	Number of reset ¹⁾ = 10		
	iteration ²⁾	1500	3000	6000	9000	16500	5000	5000
w=0.4	best	-15.005	-15.005	-15.005	-15.005	-15.005	w=1~0.2 ⁴⁾	-15.000
	average	-14.580	-14.799	-14.905	-14.905	-14.985		-15.000
	worst	-9.805	-12.457	-13.004	-13.005	-13.005		-15.000
	deviation	0.964	0.622	0.438	0.438	0.200		0.000
	Number of times ³⁾	82	90	95	95	99		0.000
w=0.6	best	-15.004	-15.005	-15.005	-15.005	-15.005		-15.000
	average	-14.952	-14.983	-15.004	-15.004	-15.004		-15.000
	worst	-12.433	-13.003	-14.999	-15.002	-15.003		-15.000
	deviation	0.323	0.200	0.001	0.001	0.000		0.000
	Number of times ³⁾	98	99	100	100	100		

1) Number of reset times of initial values

2) Number of iteration of minimization process

3) Number of times the optimum solution is obtained in 100 trials

4) w is initially set at 1.0 and is gradually reduced to 0.2

α PSO と α GA は 5000 回の繰返回数により、100 回の試行すべてが最適解に収束し、偏差は 0.0 となっている。提案した方法において、w=0.4 とし、初期値に対して 1500 回のみの繰返しを行った場合(Number of reset=0)には、100 回の試行中 82 回が最適解への到達回数となっている。w=0.6 の場合は 98 回の到達回数となっている。このことにより、w=0.6 とした場合がより信頼性の高い解が得られている。初期値に最適解の近傍の解を取り込む回数が増えるにつれて、最適解への到達回数は増加しており、解の信頼性が増加している。 α PSO および α GA の改良回数 5000 回に対して、本手法により 3 回最適解近傍の解を取り込んだ場合(Number of reset=3)の改良回数が 6000 回と計算量が 1000 回上回る場合の解の精度を比較すると、w=0.6 の場合の best, average, worst, deviation はいずれの値も α PSO および α GA と一致しており、本手法で w=0.6 とした場合は α PSO および α GA と同様に完全に最適解が得られている。

6.2 CASE2 の最適化問題

CASE2 では、8 個の決定変数、6 個の制約条件および各変数の上下限制約を考慮し、目的関数は 8 個の変数の中で 3 個のみの関数となっている特殊な最適化問題を取り扱う。この問題に対する本手法、 α PSO および α GA のそれぞれの手法を 100 回試行した結果の比較を Table2 に示す。

$$\text{minimize } f_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} &1 - 0.0025(x_4 + x_6) \geq 0, \quad 1 - 0.0025(x_5 + x_7 - x_4) \geq 0, \quad 1 - 0.01(x_8 - x_5) \geq 0 \\ &x_1x_6 - 833.33252x_4 - 100x_1 + 83333.333 \geq 0, \quad x_2x_7 - 1250x_5 - x_2x_4 + 1250x_4 \geq 0 \\ &x_3x_8 - 1250000 - x_3x_5 + 2500x_5 \geq 0 \\ &100 \leq x_1 \leq 10000, \quad 1000 \leq x_i \leq 10000 \quad (i = 2, 3), \quad 10 \leq x_i \leq 1000 \quad (i = 4, \dots, 8) \end{aligned}$$

提案した方法において、Number of reset=0, w=0.4 の場合には、100 回の試行中わずか 3 回のみ最適解に到達し、w=0.6 の場合も 3 回の到達回数となっている。初期値に最適解の近傍の解を取り込む回数を増加させると、最適解へ到達する回数は増加するものの 10 回初期値に取り込んだ場合(Number of reset=10)でさえ、最適解への到達回数は w=0.4 の場合 10 回、w=0.6 の場合 15 回と少ない回数となっている。 α PSO および α GA に対して改良回数が 1000 回多くなる Number of reset=3 の w=0.6 の場合と α PSO を比較すると、best は一致し

ている．average は α PSO が 7430.288 に対して本手法は 7277.325 と小さい値を示しており，本手法は平均的に最適解に近い値が得られている．さらに，deviation では， α PSO が 231.0 に対して本手法は 146.238 と小さい値を示しており，本手法はばらつきの少ない安定した解が得られている．一方， α GA の average は 7514.233，deviation は 661.926 といういずれの方法よりも高い値を示しており，最も信頼性に乏しい解となっている．

 Table 2 Comparisons of optimum solutions by the proposed method, α PSO and α GA

CASE2								
	method	proposed method					α PSO	
		Number of reset ¹⁾ = 0	Number of reset ¹⁾ = 1	Number of reset ¹⁾ = 3	Number of reset ¹⁾ = 5	Number of reset ¹⁾ = 10		
	iteration ²⁾	1500	3000	6000	9000	16500	5000	5000
w=0.4	best	7049.573	7049.573	7048.178	7048.178	7048.178	w=1~0.2 ⁴⁾	7049.412
	average	7388.491	7308.264	7251.023	7217.571	7187.571		7430.288
	worst	8294.098	7704.132	7471.889	7471.889	7458.529		8411.988
	deviation	212.632	149.040	129.790	118.476	102.265		231.000
	Number of times ³⁾	3	3	5	9	10		661.926
w=0.6	best	7067.721	7055.342	7048.295	7048.295	7048.170		
	average	7443.835	7332.271	7277.325	7243.421	7206.594		
	worst	8644.483	7777.517	7539.589	7477.516	7451.073		
	deviation	278.153	173.974	146.238	127.625	114.839		
	Number of times ³⁾	3	6	10	13	15		

1) Number of reset times of initial values

2) Number of iteration of minimization process

3) Number of times the optimum solution is obtained in 100 trials

4) w is initially set at 1.0 and is gradually reduced to 0.2

6.3 CASE3 の最適化問題

CASE3 では，7 個の決定変数，4 個の制約条件および各変数の上下限制約を考慮した非線形最適化問題を取り扱う．この問題に対する本手法， α PSO および α GA のそれぞれの手法を 100 回試行した結果の比較を Table3 に示す．

minimize $f_3(\mathbf{x}) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7$
 subject to

$$\begin{aligned}
 127 - 2x_1^2 - 3x_2^4 - x_3 - 4x_4^2 - 5x_5 &\geq 0, \quad 282 - 7x_1 - 3x_2 - 10x_3^2 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
 196 - 23x_1 - x_2^2 - 6x_6^2 + 8x_7 &\geq 0, \quad -4x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_3^2 - 5x_6 + 11x_7 \geq 0 \\
 -10 \leq x_i \leq 10 \quad (i = 1, \dots, 7)
 \end{aligned}$$

 Table 3 Comparisons of optimum solutions by the proposed method, α PSO and α GA

CASE3								
	method	proposed method					α PSO	
		Number of reset ¹⁾ = 0	Number of reset ¹⁾ = 1	Number of reset ¹⁾ = 3	Number of reset ¹⁾ = 5	Number of reset ¹⁾ = 10		
	iteration ²⁾	1500	3000	6000	9000	16500	5000	5000
w=0.4	best	680.629	680.629	680.629	680.629	680.629	w=1~0.2 ⁴⁾	680.631
	average	680.633	680.631	680.630	680.630	680.629		680.641
	worst	680.643	680.636	680.633	680.632	680.630		680.667
	deviation	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000		0.007
	Number of times ³⁾	100	100	100	100	100		0.024
w=0.6	best	680.629	680.629	680.629	680.629	680.629		
	average	680.633	680.631	680.630	680.630	680.629		
	worst	680.644	680.635	680.633	680.631	680.631		
	deviation	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000		
	Number of times ³⁾	100	100	100	100	100		

1) Number of reset times of initial values

2) Number of iteration of minimization process

3) Number of times the optimum solution is obtained in 100 trials

4) w is initially set at 1.0 and is gradually reduced to 0.2

この問題では，Table 3 より明らかなごとく，提案した方法， α PSO および α GA は同一の最適解が得られている．

6.4 CASE4 の最適化問題

CASE4 では、10 個の決定変数、8 個の制約条件および各変数の上下限制約を考慮した非線形最適化問題を取り扱う。この問題に対する本手法、 α PSO および α GA のそれぞれの手法を 100 回試行した結果の比較を Table4 に示す

$$\text{minimize } f_4(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1 - 16x_2 + (x_3 - 10)^2 + 4(x_4 - 5)^2 + (x_5 - 3)^2 + 2(x_6 - 1)^2 + 5x_7^2 \\ + 7(x_8 - 11)^2 + 2(x_9 - 10)^2 + (x_{10} - 7)^2 + 45$$

subject to

$$\begin{aligned} 105 - 4x_1 - 5x_2 + 3x_7 - 9x_8 &\geq 0, \quad -10x_1 + 8x_2 + 17x_7 - 2x_8 \geq 0 \\ 8x_1 - 2x_2 - 5x_9 + 2x_{10} + 12 &\geq 0, \quad -3(x_1 - 2)^2 - 4(x_2 - 3)^2 - 2x_3^2 + 7x_4 + 120 \geq 0 \\ -5x_1^2 - 8x_2 - (x_3 - 6)^2 + 2x_4 + 40 &\geq 0, \quad -x_1^2 - 2(x_2 - 2)^2 + 2x_1x_2 - 14x_5 + 6x_6 \geq 0 \\ -0.5(x_1 - 8)^2 - 2(x_2 - 4)^2 - 3x_5^2 + x_6 + 30 &\geq 0, \quad 3x_1 - 6x_2 - 12(x_9 - 8)^2 + 7x_{10} \geq 0 \\ -10 \leq x_i \leq 10 \quad (i = 1, \dots, 10) \end{aligned}$$

Table 4 Comparisons of optimum solutions by the proposed method, α PSO and α GA

CASE4								
	method	proposed method					α PSO	
		Number of reset ¹⁾ = 0	Number of reset ¹⁾ = 1	Number of reset ¹⁾ = 3	Number of reset ¹⁾ = 5	Number of reset ¹⁾ = 10		
	iteration ²⁾	1500	3000	6000	9000	16500	5000	
w=0.4	best	24.333	24.319	24.308	24.308	24.305	w=1~0.2 ⁴⁾	24.401
	average	24.950	24.785	24.686	24.611	24.508		24.542
	worst	27.107	25.694	25.529	25.450	25.006		24.844
	deviation	0.604	0.375	0.307	0.244	0.156		0.090
	Number of times ³⁾	62	74	89	94	99		
w=0.6	best	24.327	24.317	24.311	24.308	24.306		
	average	24.922	24.738	24.607	24.543	24.456		
	worst	26.756	26.031	25.412	25.257	24.841		
	deviation	0.520	0.349	0.243	0.210	0.134		
	Number of times ³⁾	63	84	93	100	100		

1) Number of reset times of initial values

2) Number of iteration of minimization process

3) Number of times the optimum solution is obtained in 100 trials

4) w is initially set at 1.0 and is gradually reduced to 0.2

提案した方法において、w=0.4 の場合と w=0.6 の場合のどちらも同程度の信頼性の高い解が得られている。また、この問題においては、 α GA が最も信頼性の高い解を得ているが、他の手法との差はほとんどなくどの手法も高い信頼性を示していると言える。

6.5 CASE5 の最適化問題

CASE5 では、10 個の決定変数、8 個の制約条件および各変数の上下限制約を考慮した非線形最適化問題を取り扱う。この問題に対する本手法、 α PSO および α GA のそれぞれの手法を 100 回試行した結果の比較を Table5 に示す。

$$\text{minimize } f_5(\mathbf{x}) = x_1^3 + (x_2 - 5)^2 + 3(x_3 - 9)^2 - 12x_3 + 2x_4^3 + 4x_5^2 + (x_6 - 5)^2 - 6x_7^2 + 3(x_7 - 2)x_8^2 - x_9x_{10} \\ + 4x_9^3 + 5x_1x_3 - 3x_1x_7 + 2x_8x_7$$

subject to

$$\begin{aligned} -3(x_1 - 2)^2 - 4(x_2 - 3)^2 - 2x_3^2 + 7x_4 - 2x_5x_6x_8 + 120 &\geq 0, \\ -5x_1^2 - 8x_2 - (x_3 - 6)^2 + 2x_4 + 40 &\geq 0, \quad -x_1^2 - 2(x_2 - 2)^2 + 2x_1x_2 - 14x_5 - 6x_5x_6 \geq 0, \\ -0.5(x_1 - 8)^2 - 2(x_2 - 4)^2 - 3x_5^2 + x_5x_8 + 30 &\geq 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 12(x_9 - 8)^2 + 7x_{10} &\geq 0, \quad 4x_1 + 5x_2 - 3x_7 + 9x_8 \leq 105 \\ 10x_1 - 8x_2 - 17x_7 + 2x_8 &\leq 0, \quad -8x_1 + 2x_2 + 5x_9 - 2x_{10} \leq 12 \\ -5 \leq x_i \leq 10 \quad (i = 1, \dots, 10) \end{aligned}$$

提案した方法では、w=0.6 の場合が w=0.4 の場合より信頼性の高い解が得られている。提案した方法の

Number of reset=3, $w=0.6$ の場合と α PSO を比較すると, average は提案した方法が最適解に近い値を示しており, deviation も提案した方法は小さい値を示していることより, 提案した方法がより信頼性の高い解を示している. α GA は α PSO より average, deviation は大きくなっており, 最も解の信頼性が劣っている結果となっている.

 Table 5 Comparisons of optimum solutions by the proposed method, α PSO and α GA

CASE5									
	method	proposed method					α PSO		α GA
		Number of reset ¹⁾ = 0	Number of reset ¹⁾ = 1	Number of reset ¹⁾ = 3	Number of reset ¹⁾ = 5	Number of reset ¹⁾ = 10			
	iteration ²⁾	1500	3000	6000	9000	16500	5000		5000
$w=0.4$	best	-216.772	-216.795	-216.795	-216.795	-216.797	$w=1\sim 0.2^{4)}$	-216.656	-216.654
	average	-145.521	-160.319	-169.635	-176.407	-196.355		-201.911	-187.319
	worst	9.240	7.534	6.148	5.017	4.743		9.344	7.217
	deviation	99.344	91.758	85.469	79.884	56.125		46.565	64.434
	Number of times ³⁾	59	70	75	78	87			
$w=0.6$	best	-216.788	-216.788	-216.788	-216.788	-216.788	$w=1\sim 0.2^{4)}$		
	average	-192.628	-206.545	-209.452	-209.684	-211.954			
	worst	139.643	4.788	4.788	4.247	-91.328			
	deviation	67.400	39.614	32.316	31.824	23.347			
	Number of times ³⁾	57	86	95	95	96			

1) Number of reset times of initial values

2) Number of iteration of minimization process

3) Number of times the optimum solution is obtained in 100 trials

4) w is initially set at 1.0 and is gradually reduced to 0.2

6.6 CASE6 の最適化問題

CASE6 では, 5 個の決定変数, 3 個の等号制約条件および各変数の上下限制約を考慮した非線形最適化問題を取り扱う. この問題に対する本手法, α PSO および α GA のそれぞれの手法を 100 回試行した結果の比較を Table6 に示す.

$$\text{minimize } f_6(\mathbf{x}) = e^{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$$

subject to

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 10, \quad x_2 x_3 - 5 x_4 x_5 = 0, \quad x_1^3 + x_2^3 = -1$$

$$-2.3 \leq x_i \leq 2.3 \quad (i = 1, 2), \quad -3.2 \leq x_i \leq 3.2 \quad (i = 3, 4, 5)$$

 Table 6 Comparisons of optimum solutions by the proposed method, α PSO and α GA

CASE6									
	method	proposed method					α PSO		α GA
		Number of reset ¹⁾ = 0	Number of reset ¹⁾ = 1	Number of reset ¹⁾ = 3	Number of reset ¹⁾ = 5	Number of reset ¹⁾ = 10			
	iteration ²⁾	1500	3000	6000	9000	16500	5000		5000
$w=0.4$	best	0.05396	0.05396	0.05395	0.05395	0.05395	$w=1\sim 0.2^{4)}$	0.05395	0.05396
	average	0.30740	0.25868	0.21916	0.19984	0.15445		0.05437	0.19049
	worst	1.03552	1.03510	1.02593	1.00050	1.00050		0.05641	1.00802
	deviation	0.31537	0.28682	0.26604	0.25039	0.22503		0.00051	0.21249
	Number of times ³⁾	54	60	67	70	80			
$w=0.6$	best	0.05396	0.05389	0.05389	0.05300	0.05300	$w=1\sim 0.2^{4)}$		
	average	0.27214	0.23462	0.17145	0.14154	0.11744			
	worst	1.04050	1.03500	1.00501	1.00501	1.00040			
	deviation	0.29850	0.27855	0.23262	0.20724	0.19187			
	Number of times ³⁾	59	65	76	82	88			

1) Number of reset times of initial values

2) Number of iteration of minimization process

3) Number of times the optimum solution is obtained in 100 trials

4) w is initially set at 1.0 and is gradually reduced to 0.2

この問題においては, α PSO の場合が最も信頼性の高い解が得られている. これは, 式(12)による α の制御がうまく機能した結果と思われる. 一方, 提案した方法では, 等号制約条件を考慮した場合に探索領域が

狭くなることより探索が進まない場合が見られた．今後，等号制約条件を考慮する場合には式(14)，(15)における ε_2 の制御を工夫する必要がある．

7 結 論

本研究により得られた結論は以下の通りである．

- 1) 本研究の方法において，慣性重み w を 0.4 および 0.6 と変化させて解を比較した結果，0.6 の場合がより信頼性の高い解が得られた．
- 2) 本研究の方法において，初期値に改良解を 1 回，3 回，5 回および 10 回取込み，改良回数を増加させた場合の結果の比較では，初期値の取込み回数を増加させることにより，確実に最良解へ到達する回数を増加させることができ，最良値，平均値，最適解への到達回数を大きく向上させることができることが明らかとなった．しかし，効率性を考慮すると，初期値の取込み回数は 3～5 回程度が適切であると考えられる．
- 3) 慣性重み w を 0.6 とし，改良回数がほぼ同程度となる本手法の初期値を 3 回取込んだ場合(6000 回改良)と， α PSO の手法(5000 回改良)との比較では，線形の問題の CASE1 はどちらも同程度に良好であり，CASE2～5 はすべて本手法の方がより信頼性の高い解が得られた．CASE6 の等号制約条件の場合には， α PSO の手法におけるパラメータのチューニングが良好に機能しており，本手法より良好な解を得ている．

謝 辞

本研究を進めるにあたり，計算結果の整理には建築土木工学科 4 回生の笠松 亮介 君の助力を得た．ここに，感謝の意を表します．

参考文献

- 1) James Kennedy, Russell Eberhart, “Particle Swarm Optimization”, *IEEE*, pp. 1942～1949, 1995.
- 2) 阪井節子，高濱徹行，“ α 制約パーティクルスウォームオプティマイザ α PSO による制約付き最適化”，数理解析研究所講究録 / 京都大学数理解析研究編，vol. 1457, pp. 233～240, November 2005.
- 3) 阪井節子，高濱徹行，“制約付き非線形最適化手法 α 制約法によるファジー制御ルール最適化”，電子情報通信学会論文誌，vol. J82-A, pp. 658～668, May 1999.
- 4) 阪井節子，高濱徹行，“ α 制約 Simplex 法によるファジー制御ルールの学習”，電子情報通信学会論文誌，vol. J83-D-I, pp. 770～779 July 2000.
- 5) 坂和正敏，矢内克裕，“非凸非線形計画問題に対する浮動小数点型遺伝的アルゴリズム:改良型 GENOCOP III”，電子情報通信学会論文誌，vol. J81-A, pp. 90～97, January 1998.
- 6) 阪井節子，高濱徹行，“ α 制約遺伝的アルゴリズム α GA による制約付き最適化”，電子情報通信学会論文誌，vol. J86-I, pp. 198～207, April 2003.

(2019 年 4 月 26 日受理)