

数学教育における教科書論考

宮 本 一 郎

On the Desirable Textbook for Mathematical Education

Ichiro MIYAMOTO

Many textbooks are used in mathematical education, but very few are really suitable. Because, some are insufficient in teaching contents, on the contrary some are too detailed and difficult, and some include unsuitable examples or problems, and so on. In this paper, the condition for desirable mathematical textbook are fundamentally considered and concretely analyzed from the educational point of view.

まえがき

「教科書」は授業の重要な道具であるが、さて実際に使用してみるといろいろの不都合を感じるのが常である。内容的に足りないところがあったり、逆にくわしすぎたり、説明が難しすぎてわかりにくかったり、あるいは例題や問題が適切でなかったりして、なかなか満足なよい教科書が見当たりにくい。もっとも、教科書は授業に必須のものではなく、また教師は「教科書で」教えるので、「教科書を」教えるのではないといわれる。しかし学生、生徒は教科書を金科玉条として絶対的に信頼することを忘れてはならない。教科書は教師のためのものというより、むしろ学習者のためのものであることを思うとき、よい教科書を作り、あるいは選択することはきわめて重要である。望ましい教科書はどのようなものであるか。これについて数学教育学的見地から基礎的な諸問題を分析検討する。

1. 教科書の基礎的考察

「教科書」とは教科用図書、すなわち（学校）教育で各教科の主要な教材として用いる図書のことであるが、法的には「教科書の発行に関する臨時措置法」（1948）第2条に、“この法律において『教科書』とは小学校、中学校、高等学校及びこれらに準ずる学校において、教科課程の構成に応じて組織配列された教科の主たる教材として、教授の用に供せられる児童又は生徒用図書であって、文部大臣の検定を経たもの又は文部大臣において著作権を有するものをいう。”とあ

り、その使用について学校教育法第21条に、“小学校においては、文部大臣の検定を経た教科用図書又は文部省が著作の名義を有する教科用図書を使用しなければならない。”また第40条、第51条にはそれぞれ中学校、高等学校への準用規定がある。“ただし高等学校での教科・科目によって教科書のない場合、その場合に限り他の図書を教科書として使用できる。”（施行規則第58条）とある。大学、高等専門学校には教科書について規定されていない。このように教科書は教育の一つの手段として用いられるものであるが、まず教科書そのものについて基礎的に検討を進める。

(1) 教科書の価値、得失

教科書はカリキュラムに従って授業（教授、学習）を有効に能率的に進めるためのものであるが、これを用いることには具体的に次のような得失が考えられる。

（利点）

- ①教材の選択配列が系統的具体的で、これに関する教師の労を省くことができる。
- ②教授（学習）内容が通覧できて便利である。
- ③複数の教師間で教授内容の標準化ができる。
- ④筆記の労を省き、講義と対照できて学習が効率化される。
- ⑤予習、復習に便利である。
- ⑥学習者に長く印象を残す。
- ⑦保存が便利で後日までも利用できる。

…など。

（欠点）

- ①教師がこれに依存し易く、また束縛される。いわゆる「教科書を」教えるようになりがちである。教科書があまり詳細でがっちりしているほどこの傾向が強くなる。
- ②叙述が簡明で論理的であるため無味乾燥になり易く、学習者の興味をひきにくい。
- ③学習者がその内容を絶対的なものと信じ易い。（教師が適宜修正、改善してもなかなか徹底しにくい。）
- ④学術の進歩に応じて直ちに変更改訂することが困難である。

…など。

(2) 教科書の望ましい条件

前記の得失を考察して、教科書を用いる場合どのようなものが望ましいかを具体的にまとめる。

- ①カリキュラムによく適合していること。

これは当然で、最も基本的な要請である。

- ②教材の選択、配列、展開が教育的に適切であること。

これが内容的に最も論議の対象となるところである。

- ③記述が正確で誤りがないこと。

学術的に誤りがないことはもちろんのこと誤植がないよう十分校正されねばならない。

④教師が使い易いこと。

内容があまり固定的でなくある程度の柔軟性をもち、これを用いていろいろの指導法が可能であることが望ましい。

⑤読み易くわかり易く、学習者の自学自習に適すること。

学習者の発達段階により、よくわかる言葉で叙述されることが必要で、高度な学術文体の乱用は避けるべきである。

⑥見易いこと。

読み易くても、あとで見てどこに何が書いてあるか見出しにくいものは教科書としてはよくない。そのためには章節のとり方が適当で、適宜要点のまとめがあり、また巻末索引の完備も必要である。

⑦用語・記号が標準的なものであること。

文部省の検定教科書ではこの点は規制されていて心配はないが、大学のテキストでは筆者の好みによっていろいろのものが見られ、他の教科書や参考書との互換性において不都合を生じるので、できるだけ統一することが望ましい。

⑧魅力的、印象的であること。

前記⑤、⑥のほか、図版を十分に入れ、必要に応じ写真、彩色をとり入れて、学習者に親しみのある「本」でありたい。

⑨印刷、紙質、活字、装丁などが教育的であること。

形式的なことであるが、学習者の心理的発達段階に応じて適当なものを選択することが必要である。

⑩ページ数、価格が適当であること。

これにより、前記諸条件がある程度制約を受けるがやむを得ない。

(3) 教科書の性格

前記は教科書の一般論であるが、このうち特に①、②に関して教科書の内容、形式が性格的に特徴づけられる。

①カリキュラムによる特徴

小、中、高、大の学校レベルによって、さらにくわしくは低学年、高学年と心理的発達段階、学習レベルによって異なる。たとえば図版の使用は小学校低学年では非常に多いが、学習レベルが進むにつれて減少していくのが見られる。

②教授理論、学習理論による特徴

通常の教科書は一斉講義法による系統学習に基づいているが、問題解決学習あるいはプログラム学習となると教科書の形式が全く異なってくる。またプラグマティズムの影響のためかアメリカの教科書には実例をとり入れた問題や課題が非常に豊富に盛られているのが見られる。

③国情による特徴

わが国の教科書は高校以下では大きく二つの制約を受けている。一つは教科書検定制度によって統制されていることであり、もう一つは入学試験との密接なかかわりによる拘束である。このため知識注入式、画一的になりがちで、日本の教科書は難しく、面白味がないといわれる。これにくらべて、欧米では教科書についての明確な定義も見られず、また法的な強い拘束もなく（ソ連では教育省の認定を必要とするが）、学習用図書として参考書と併用して自由に取扱われている。このため色彩に富むデザイン、体裁や構成の多様性、記述内容の豊富さ等においてわが国のものと大きく異なっている。

これに関して臨教審最終答申（62. 8. 7）において教科書制度改革の基本方向として「個性を尊重した多様な教育・学習を推進する観点に立って、教科書の在り方や利用の仕方を見直す。この際、とくに児童・生徒が使用する学習材としての性格を重視する。」とあり、また教科書の著作、編集機能の向上と研究開発体制の確立や新しい検定制度などについて述べられている。

2. 数学教科書の特質と諸問題

(1) 数学教科書の構成と展開

数学教育といっても、文化財としての「数学を」教える“Mathematics Education”と、「数学で」教える“Mathematical Education”との二つのいき方があり、これにより教科書の内容や展開も多少異なってくる。小、中の義務教育段階では後者に、大学では前者に重点をおき、高校ではその中間的ないき方をしているとみられる。しかしいずれにせよその内容は数学の学術書と異なり、学習者を主体とした、いわゆる「教育数学」として展開されねばならない。

教育数学では数学における論理性のほかに心理的発達段階に応じて直感性が重視される。このため数学内容の順序を変えたり、分散して循環式に取扱ったり（spiral方式）、また定理や公式の証明の厳密性がある程度失われることはやむを得ない。要は全体として論理性が保たれており、いろいろの場において問題解決に活用できるようにすることである。数学ではとかく文章が固く、また数学者臭くなりがちであるが、教科書の叙述はできるだけ常識的に（メタ言語で）わかりやすく書くことが大切である。また前述のように図版や表などを十分にとり入れて理解を助けることが望ましい。

数学の教科書の内容は通常、次の要素から構成される。

本文、例題、問、問題、演習問題

《本文》教科書の主要部分で、基礎的な考え方や定義（用語、記号）の導入と解説、定理・公式の証明や説明がなされる。また必要に応じて「例」をそえたり、「注」によって補足説明がなされる。

《例題》具体的な適用問題例とその典型的な解法形式を示す。これは事実上学習者にとって最も大切な頼みの綱となるものであるから、その作成、選択に当たって次の諸件が配慮されねばならない。

- ①基礎的で、その解法が多くの問題の解決に転移できること。
- ②題意が明瞭で親しみ易く、解法も単純でわかり易いこと。いろいろの事項を盛りこんだ複雑な問題は適当ではない。
- ③数値例を適当にとり、無用の繁雑な計算を避けること。たとえば途中の2次方程式が簡単に因数分解できて整数解が得られるなど。(より複雑な計算は、後の問題でやればよい。)
- ④条件や数値例があまり特殊なことによる誤解を生じないように注意すること。たとえば直角二等辺三角形であるため三角比を用いなくてもよかったり、係数が1であるためそれに乗じなくてもよいと思ったりするなど。
- ⑤最少限の問題で重要な場合を網羅するようにすること。たとえば部分分数の分解の例題としては

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}$$

$$\frac{4x^2 - 2x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

でカバーできるであろう。

なお本文に入れるべき事項や補助公式などを簡略に例題で補足することがある。このような例題は上記のものと性格が異なるので、その重要性について注記することが必要である。

《問》問答式教授法の特色を活かし、本文と密接に関連してその補助的役割をもつ部分で、ここでは通常の問題と区別する。問には大きく二つの機能がある。

①本文へのレディネス、動機づけ

新教材に取り組む前に先習事項を復習確認したり、問題意欲を喚起したりするために用いる。これは主として小、中の教科書に用いられているが、高校以上においても適宜用いると有効であると思われる。

②本文の内容の補足、確認

本文の後におかれる問で、本文の延長としてこれを補足させたり、また別の側面からとらえさせたり(別法)、あるいは本文内容を拡張、一般化もしくは特殊化するのに用いられる。いずれの場合においても、問は学習者自身で取り組むことができることが大切で、あまり難しいものは過重負担となってよくない。

《問題》本文、例題、問における主要な教授内容についてその理解、定着をはかり、またこれを評価する役割をなすもので、次の二つに分けられる。

①教授内容の理解、消化を助けるもの

具体的な適用例(場面例)を与えて理解を深め、また内容消化のためのクッションとなる。理解度を深めるべき内容、理解が困難な内容については、この種の問題を多く課することが必要である(weightづけ)。問題の作成においては、適用場面をいろいろ変えたり(場面変更)、条件をゆるめたり、きつくしたりしていろいろ変えてみる(条件変更)など配慮する

とよい。

②特定の技能に習熟するためのもの

基本計算等，同一形式のものを反復して技能の定着をはかるもので，いわゆる「練習問題」（狭義）とか「ドリル」がこれである。

小・中における数の計算，高校における式の計算や方程式の解法，高・大における微積分計算など，重要なものについては問題量を十分に多くし，過剰練習により身につけさせることが望ましい。

問題の作成においては，起り得る種々の型の分析，またこれらに対するつまづきの調査に基づきなるべくいろいろの場合をカバーし（類型変更），また使用文字も x ， y だけでなく， t ， s や u ， v などいろいろ変える（文字変更）などの配慮が望ましい。

《演習問題》学習内容を総合的に確認し，また応用力も評価するためのもので，「章末問題」とか「まとめのれんしゅう」（小学）などがこれにあたる。これを「練習問題」（広義）とする教科書も多いが，前述の狭義の練習問題との差別を明瞭にし，応用問題もふくめて，少し古い感じもあるが，ここではあえて「演習問題」の語を用いることとした。

ここに配置される問題は多彩であるが，評価の観点から次の三つに分けられる。

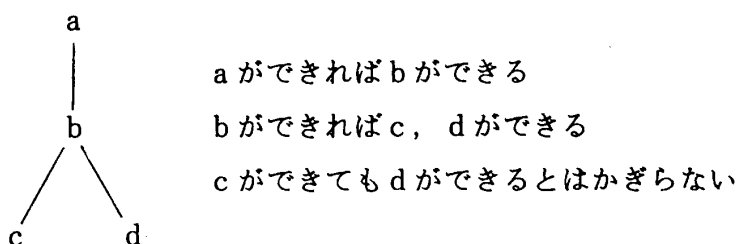
- 単純問（一つの観点につき評価する。）
- 複合問（いくつかの観点を同時に評価する。）
- 応用問（洞察力，応用力などを評価する。）

たとえば不定積分の問題について示せば，

$$\int \frac{2}{x^2+4} dx \text{ (単純問)}, \int \frac{2}{x^4-1} dx \text{ (複合問)}, \int \frac{4x}{x^4+4} dx \text{ (応用問)}$$

となるであろう。

また問題は難易度のレベルにより，半順序をつけることも考えられる。



これは学習者の能力に応じて問題を選択したり，テスト問題の作成に役立てることができる。問題はまた次数を考えることができる。

- 1 次問（基本的内容を用いて解ける）
- 2 次問（ある特殊な 1 次問を用いて解ける）
- 高次問（ある特殊な 2 次問を用いて解ける）

数学教育上は 1 次問を主として配置し，2 次問以上は優秀な学習者のための余力問題，発展問題としていくらか添えるとよい。教科書によっては A，B（さらに C）と分けているものがある。

るが、その基礎として上記の考察が役立つであろう。

なお以上のほか付加的な要素として、目録、索引、付録について若干の考察を進める。

《目録》教科書の内容を概観するための役割をなすもので、通常は章・節と中項目まで示されるが、まれには小項目まで示されているものもある。この方式は教科書を「事典」的に活用できてより有効である。

《索引》巻末につけて教科書を「辞典」的に使用する役割をなすものであるが、その機能の完璧を期するために同義語に対しては \Rightarrow (を見よ)、さらにできれば関連語に対して \longrightarrow (を見よ) 参照をつけることが望ましい。また大学用のものでは英訳を添えるものもあるが、固有名詞や特に重要なものだけでよいであろう。

《付録》教科書のサービスの役割をなす部分で、補遺(略された定理の証明や補充教材)、便覧(重要公式集、曲線集など)、問題の解答とヒント、数値表(関数表、定数表)、ギリシャ文字表などで通常巻末におかれる。ただしこのうち数値表(関数表)は必須で本文の一部というべきもので、できれば折込式にする方が便利である。便覧があると大変有難いが、重要なものにしばって見易く書くのがよい。あまりくわしいものは利用価値が半減する。

(2) 表記について

「表記」とは、用語、記号のみならず文章(書き言葉)や図、表など、書き表わされ記載されたもののすべてを意味するものとする。従って教科書は形式的には表記から成り立っている。この面から主要な件につき考察する。

①用語

数学で用いる専門用語のことで、最初に定義もしくは説明されたとき通常ゴシック体で書かれる。高校以下では学習指導要領で示されているが、大学レベルになると著者の好みによりいろいろのものが用いられることがあり学習者に混乱を起させるので、統一することが望ましい。用語自体は「学術用語集数学論」(文部省)と「岩波数学辞典」によればよいが、その解釈に問題が起ることがある。たとえば「単調増加」は

i $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (狭義)

ii $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (広義)

の二通りのとり方があり、iの場合にはiiを「広義の単調増加」または「単調非減少」といい、iiの場合にはiは「狭義の単調増加」または「強い意味の単調増加」などといわれる。数学的には広義で論ずる方が都合であるが、初学者には狭義の方がわかり易いように思われる。また統計で「標準偏差」は「分散の平方根」であるが、「分散」の定義に次の二通りがある。

$$\textcircled{i} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \textcircled{ii} \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

①は平均値として自然なので高校の検定教科書は全部これを用いており、②は母集団の分散 σ^2 の不偏推定量となるので「不偏分散」として区別している。大学レベルになると①と②がおよ

そ半々に用いられており，アメリカの翻訳書では⑱が主流である。品質管理との関連でこの方が実用的であり，わが国でもJIS（日本工業規格）ではこれを採用している。しかし導入段階において， $n-1$ で割る説明ができないところに問題がある。教育的には⑰で導入し，後に⑱へ移行するのが自然であるが，同じ用語では混乱を来すので，一方を変える必要がある。このように用語にもいろいろの問題がある。

②記号

記号にはその基礎となる概念があるので，これを明確にした後に導入し，その適切な具体的適用例を示すことが必要である。また難しい記号を導入したときには，その直後に記号そのものの練習を入れることが望ましい。高校以下の教科書ではこの点比較的によく配慮されているが，大学レベルのもので不十分なものがあるので注意を要する。

記号に二通り以上の表わし方のあるものがあり，これが教科書，参考書間の互換性を妨げている。たとえば，ベクトルを表わすのに，⑰ \vec{a} ，⑱ \mathbf{a} （肉太文字）の二通りの記法があるが，高校ではほとんど⑰，大学では⑱が多い。⑰は矢線ベクトルを連想させ，またベクトルであることを明確にする長所があるが，式が複雑になると矢のため見にくくなる欠点がある。（スエーデンの教科書のように \vec{a} を用いるものもある。）ベクトル空間やベクトル解析になると⑱の方が扱い易いが，ただ肉太文字は書きにくく，普通文字で書いてスカラーと混同する嫌いがある。（アメリカの教科書で大文字 A と書くものもある。）このように一長一短があるため著者の考えにより両方のものが用いられるが，数学教育学的に統一することが望ましい。高校の導入段階では⑰を用い，内積の定義以降⑱に切替えたかどうかと考える。また内積の記法にも $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ と (\mathbf{a}, \mathbf{b}) の二通りがあるが，前者の方が見易く実用的なのでこれに統一した方がよいと思われる。（後者は内積空間で愛用される記号であることを注記しておく。）このようなことは，補集合について \bar{A} ， A' ， A^c など，転置行列について $'A$ ， A' ， A^t など，いろいろあるが，長短を比較検討して統一することが望ましい。（数学者にはどちらでも大した問題ではないが，一般の学習者には案外大きな抵抗となっている！）また微分記号 y' ， $f'(x)$ ， $\frac{dy}{dx}$ など，それぞれ場合に依じて利用価値のあるものは統一の必要がなく，むしろいずれにも慣れるように教材の随所にとり混ぜて入れるようにした方がよい。

③使用文字

数学ではラテン文字のほか，ギリシャ文字や時にはドイツ文字やロシア文字も用いられるが，教科書では前二者に限定すべきである。ギリシャ文字でさえ最初抵抗があるので，巻末よりもむしろ巻首に一覧表を載せておく方が親切であろう。 π や α ， β ， γ まではよいが， δ ， Δ ， σ ， ω や ϕ ， ψ ， ξ ， η ， ζ あるいは μ ， ν など最初に出てきたときにその読み方と書き方（筆順）を欄外に示すことが望ましい。

文字の選択使用は，習慣的なものと著者の好みによるものとある。たとえば変数には x ， y ， z ； u ， v ， w ；あるいは t ， s など終りの方の文字を用い，定数には a ， b ， c など初めの方を用いるなど，また面積を S ，体積を V ，時間を t ，速さを v など英単語のイニシャルを用

いるなどは前者であり、B関数、 Γ 関数や χ^2 分布、t分布、F分布などは最初の命名者のものが継続使用されて習慣化したものである。このようなものはそのまま継承した方がよいが、著者の好みにより新しいものを常用しようとするときには、後のことをいろいろと考えて「整合性」に留意することが必要である。

文字は有限個であるから他の場合に重複するのはやむを得ないが、できるだけ統制して混乱しないことが望ましい。たとえば、基本ベクトルを表わすのに、①、i、j、k、② e_1 、 e_2 、 e_3 、③ e 、f、gなどが用いられているが、2次元では見かけない。また③は2次元で e 、fまではよいとしてもgが基本ベクトルと思えるであろうか？②は添え文字がある点に難があるが、これは2次元から3次元へ、さらにこのままn次元へと進めることができるし、またベクトルaの成分を (a_1, a_2, a_3) と表わすのに結びついてかえって好都合である。またaの成分を (a_x, a_y, a_z) と表わすものもあるが、書くのが煩わしいだけであろう。もう一つ統計の例をあげると、正規分布は④ $N(m, \sigma^2)$ 、⑤ $N(\mu, \sigma^2)$ の二通りに略記されている。④のmは平均値meanの頭字であるが、データの個数を表わすときn、mと表わすことがよくあるし、また母平均と標本平均とをはっきり区別するという点からも μ を用いた方がよい。標本平均は \bar{x} 、標本分散は s^2 で表わし、これに対応する母平均、母分散をそれぞれ μ 、 σ^2 で表わすというように、母数（母集団の定数）はギリシャ文字で表わすとすっきりする。（統計用電卓で、sを σ と書いているのは混乱してよくない。）また正規分布を標準化する計算で $(x - \mu)/\sigma = t$ とおいている教科書があるが、これは後に出てくるt分布のtと混乱するものとなるので感心しない。uまたはzとおく方がよい。

このように使用文字に関する問題例はいろいろ見出される。

③文章

前述のように教科書の文章は学習者に読み易いことが大切であるが、次第に論理的な表現に慣れるように仕向ける配慮も必要である。小・中段階では大体日常語で足りるが、高校になると数学用語（術語）以外に論理的な言葉、「または」、「……ならば」、「……とは限らない」、「すべての……」、「おのおのの……」、「ある……」、「……となるものが存在する」、……など日常語と少し異なるものが出てくる。これらについては特に定義はしないが、出てきたとき、具体例により誤解のないように解説することが必要である。言葉の理解がずれていることが問題を誤答する原因となることがあるからである。またわれわれの日常の言葉自体、論理的に欠けているところがあるので、高校段階の適当な時期に論理に関する一通りの指導を必要とする。しかしなかなか身につけにくいので、いわゆる「数学方言」はやむを得ないとき以外は避けて、できるだけ読み易く書くことが望ましい。たとえば、平均値の定理の結論は通常“ $f(b) - f(a) = f'(c)$ となるcがa、bの間に少なくとも一つ存在する。”と述べられるが、これを“a、bの間のある値cに対して、 $f(b) - f(a) = f'(c)$ が成り立つ。”といえればわかり易いし、また応用性も出てくると思われる。ただ一つの教科書だけがこのように書かれても、他の教科書や参考書がこれに順応していないと互換性の点で問題があり、歩調を揃えることが望

ましい。教科書の文章は案外わかりにくいので、できれば予習させてみて、わかりにくい個所を調べ、それが内容の難しさによるものか文章の難しさによるものかを分析し、もし後者によるときはこれをもっとわかり易く書き換えるという継続研究が望まれる。

おわりに

以上は教科書そのものの基礎的な考察に始まり、これに基づき数学の教科書の特質と諸問題をいろいろの見地から具体的に分析検討してまとめたもので、教科書の作成あるいは選択に何らかの参考となれば幸である。しかし、提起された各問題については、さらに詳細な研究が必要なので、今後引続きこれに取り組んでいきたいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 島本静夫：数学教育概説 (pp.105-114), 文明社, 1936.
- 2) 吉田辰雄編：学校教育心理学 (pp.61-100), 福村出版, 1981.
- 3) 伊藤信隆：教授・学習過程論 (pp.232-237), 大日本図書, 1985.
- 4) 高橋史朗：教科書検定〔中公新書867〕, 中央公論社, 1988.
- 5) 平林一栄：数学教育の活動主義的展開 (pp.374-401), 東洋館出版, 1987.
- 6) 福原満州雄・島田茂・細井勉・松尾吉知ほか4名：数学教育の周辺から一言語と歴史一(pp.8-96), 聖文社, 1988.
- 7) 宮本一郎：数学教育課程における「問題」の価値分析, 日本数学教育学会第61回特集号 (p.380), 1979.
- 8) 文部省：学術用語集数学編, 文部省, 1954.
- 9) 日本数学会：岩波数学辞典第3版, 岩波書店, 1986.
- 10) 青木利夫・森川正：微分積分学要論, 培風館, 1984., ほか大学用教科書.
- 11) C. R. Wylie & L. C. Barrett: Advanced Engineering Mathematics, 5th ed., McGraw-hill Co., 1983., ほか外国教科書.
- 12) 小平邦彦編：数学I, 東京書籍, 1972. ほか高校用教科書.