

バス発車時刻の最適化について

吉 田 豊 穂

Optimization of Starting Time for Bus at Stop

Toyoho YOSHIDA

This theme is investigated the method how the best starting time is decided for the passengers to take as little time as possible when getting on the bus.

1 はじめに

(1) 本研究の意義・目的

本研究はバス利用者がバス停留所に到着してから乗車するまでの乗客待時間を最少となるように発車時刻の決定方法について考究するものである。バスに乗車するため利用者が停留所に到着するとバスがきて乗車するまでの間何分間か待たされるのが普通であって到着してすぐに乗車できることは稀である。鉄道の駅においては列車に乗車するときの待時間は待合室があり、またホームに出てから列車の到着を待つ間にも上家が設けられているから直接風雨雪にさらされることはない。ところがバス停留所では道路傍に停留所名と発車時刻の看板を取付けたポール1本だけであって上家は殆んど設けられていないのが実状である。それゆえ利用者は炎天下に立たされたり風雨雪をまともに受けることになるからそこに苦痛を伴い極端に低いサービス水準を強いられているのである。このことからバス利用者へのサービス水準を向上させるためにも待時間を最小となるような発車時刻の決定方法が望まれる。そこで本研究では福井駅前を起点として発車している福井市内バス路線網の1路線系統について朝のラッシュ時間帯をとらえてバス発車時刻の最適解を求めんとするものである。

(2) 調査・研究の対象とする路線系統について

福井市内バスは福井市の中心部である国鉄福井駅前を起点としてバス路線網を形成し全部で17路線系統ある。のりばは1番より11番のりばまで設けられており、8番のりばの赤十字病院線のみが1路線系統ののりばであって、6番のりばは臨時バス専用である外はすべて2乃至3路線系統を統合したのりばとなっている。ところで2乃至3路線系統を統合したのりばではどの系統に乗車するのか到着してくるバス利用者1人1人についてインタビュー調査をしなければならず、また路線系統の多くは左右に循環する系統であって調査が複雑である。したがって最も調査しやすい8番のりばの赤十字病院線を調査・研究の対象とする。

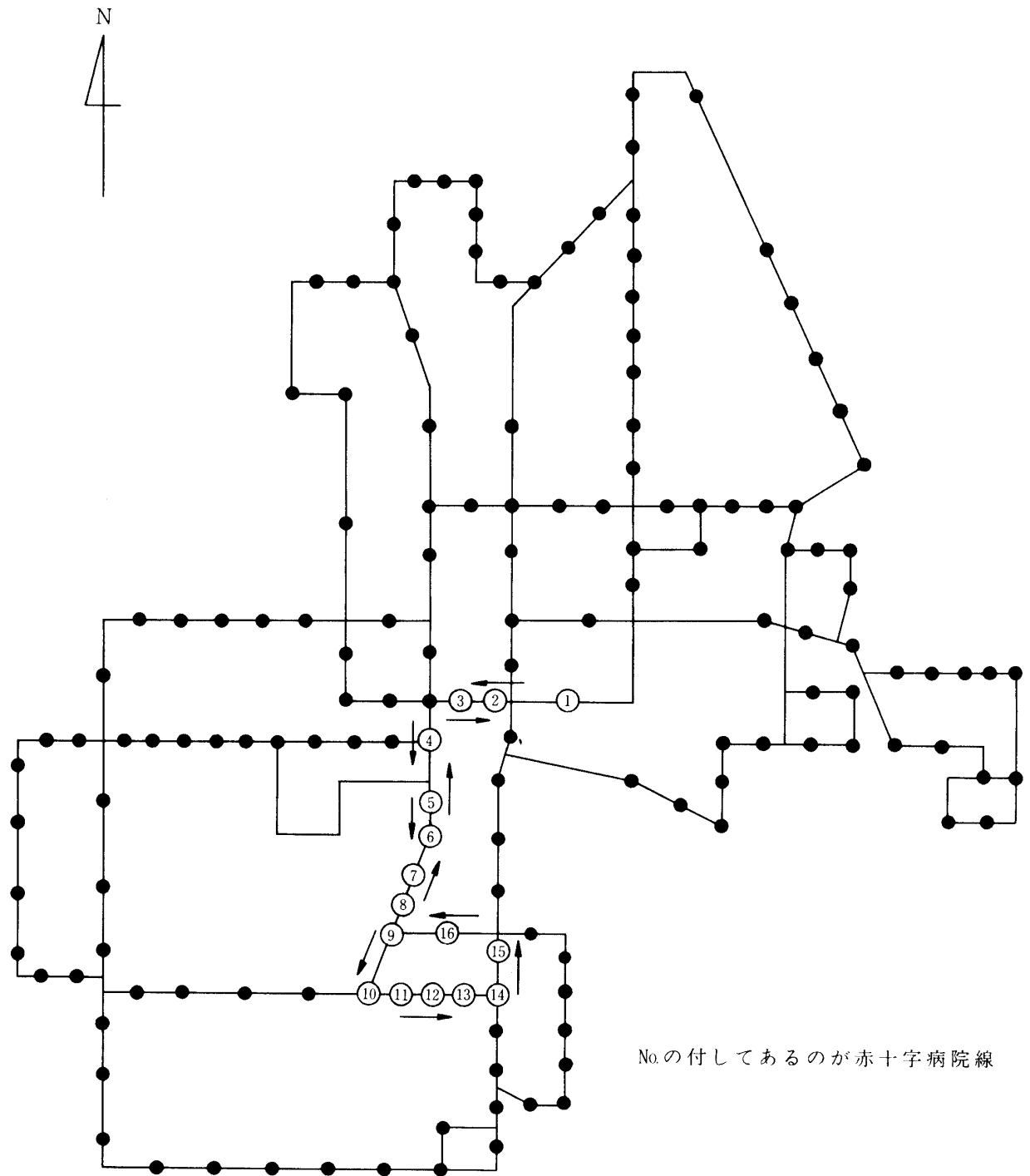


図-1 福井市内バス路線網図

(3) バス停留所への乗客到着人員と待時間について

図－1は福井市内バス路線網について赤十字病院線の系統図を示したものであり、また表－1は昭和54年6月20日に京福電鉄KK福井支社自動車部によって調査したOD表を示す。表－1のOD調査表によると1日あたりの乗車人員は1,891人であり、うち福井駅前乗車が756人で一番多くつぎが赤十字病院の360人である。また降車人員でもやはり福井駅前の534人が最も多くつぎが赤十字病院の347人である。福井駅前が乗降人員とも他の停留所よりも圧倒的に多いので福井駅前バス停留所を本研究のベースとして考究する。

表－1 OD調査表

調査日 昭和54年6月20日 単位：人

(8番のりば) 赤十字病院線	①福井駅前	②東映前	③片町入口	④久保町	⑤左内公園	⑥公園下	⑦不動山口	⑧山奥町入口	⑨山奥	⑩藤ヶ丘団地入口	⑪藤ヶ丘	⑫南局前	⑬赤十字病院	⑭福井新口	⑮大和紡前	⑯豊2丁目	⑰山奥	⑱不動山口	⑲公園下	⑳左内公園	㉑久保町	㉒片町入口	㉓東映前	㉔福井駅前	合計
①福井駅前			14	35	24	26	180	91	14	50	19	43	243	2	3	3	3	3					1	2	756
②東映前			1				6	5	2	1		1	7												23
③片町入口					1	32	9	4	12	1	11	30	1	2	1						1				105
④久保町					1	5	3	1	2	1	1	28	5	5											52
⑤左内公園							1	1		3	3	13		1											22
⑥公園下								1	1	2	2	3		1											10
⑦不動山口										1			5												6
⑧山奥町入口										2			4	1											7
⑨山奥													3											1	4
⑩藤ヶ丘団地入口					1								3	1									3	8	16
⑪藤ヶ丘													5	1	1			3		2	4	6	28		50
⑫南局前													1	1		2		1	2	3	3	11	23		47
⑬赤十字病院	1													1	2	6	7	2	8	33	36	44	220		360
⑭福井新口			1												2			1	2	5	9	3	25		48
⑮大和紡前			1															2	2	5	3	6	29		48
⑯豊2丁目																			1	3	12	4	7		27
⑰山奥																				1	14	14	38		67
⑱不動山口																			1	7	21	35	104		168
⑲公園下																				1		4	9		14
⑳左内公園												1										5	10		16
㉑久保町																					2		18		20
㉒片町入口													2										12		14
㉓東映前																		1							1
㉔福井駅前											1			1		3	4				1				10
合計	1	16	36	25	28	223	109	23	69	27	62	347	8	18	9	14	15	9	16	61	105	136	534		1891

昭和54年9月20日に福井駅前バス停留所において始発バス発車10分前の6時46分より朝のラッシュ時間の最終である8時55分発まで連続して1分間あたりの乗客到着人員の調査を実施したがこれを図－2に示す。図－2によると始発バス6時56分は到着人員が無く空車で発車している。

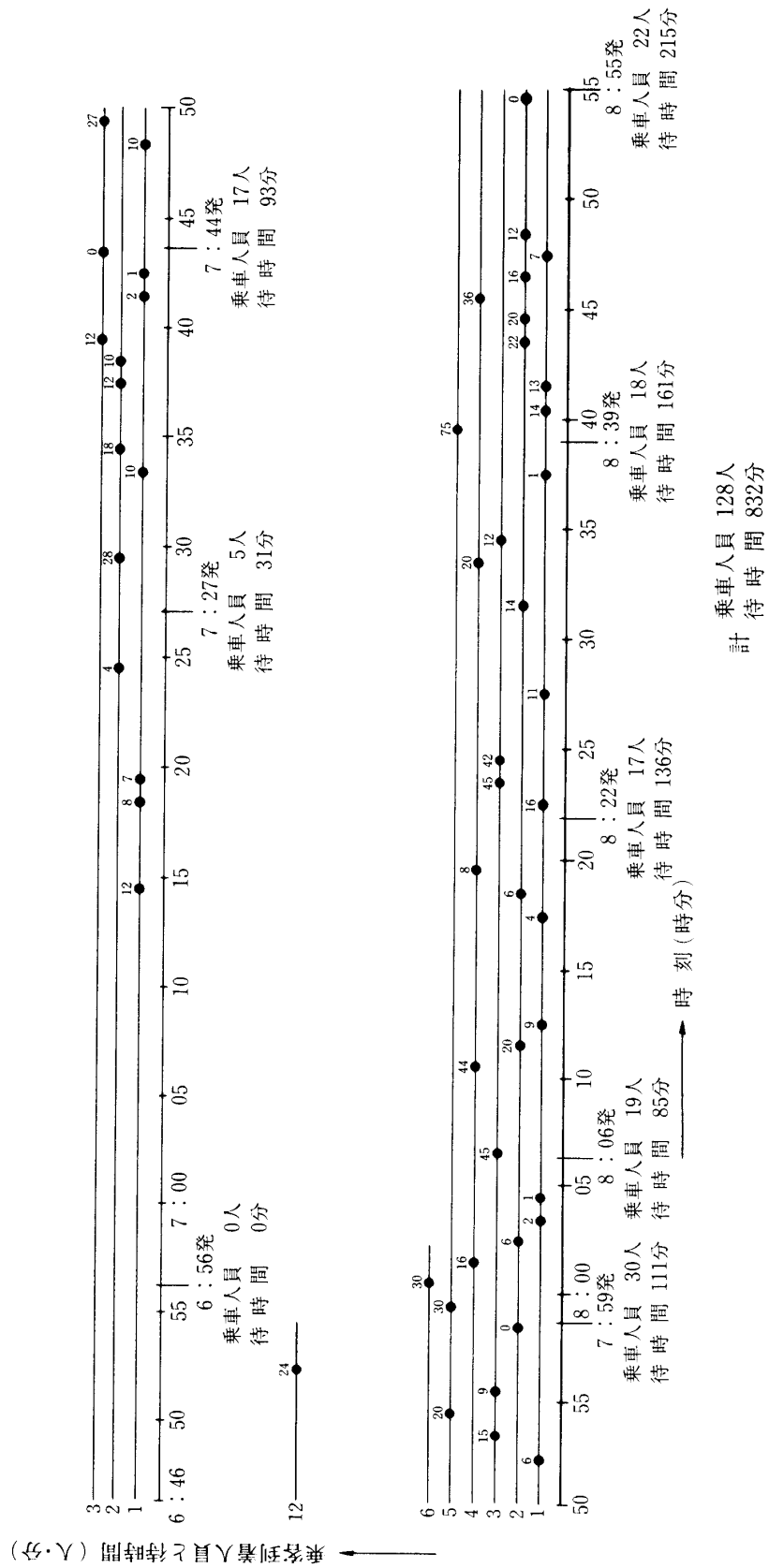


図-2 乗客到着人員と待時間 調査年月日 昭和54年9月20日 (木曜日)

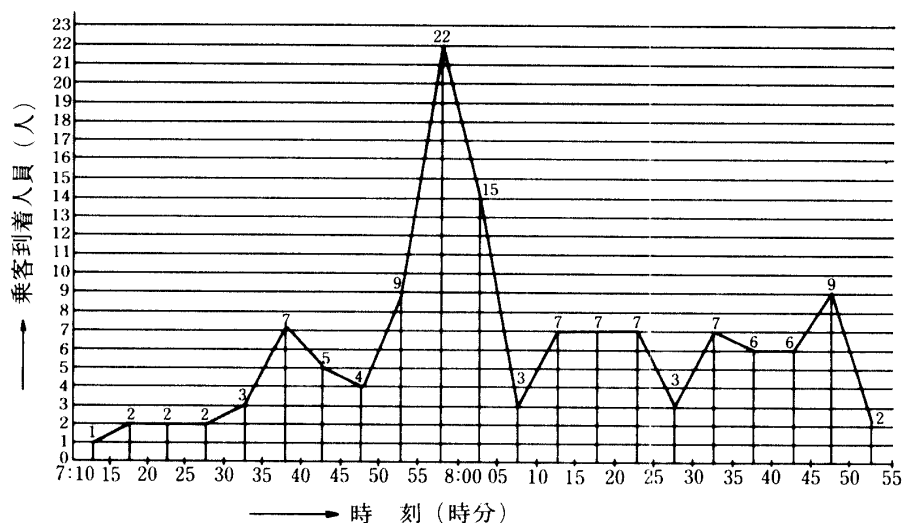
つぎに発車する 7 時 27 分には 7 時 14 分より 7 時 15 分の間に 1 人到着しておりバス発車までに 12 分間待たされている。また 18 分より 19 分までの間に 1 人、19 分より 20 分までに 1 人、24 分より 25 分までに 2 人到着しているからバス発車時刻までの待時間は 8 分、7 分、4 分となるから 7 時 27 分発には乗車人員 5 人で待時間合計は 31 分である。同様に計算すると 7 時 44 分発には乗車人員 17 人で待時間は 93 分であり、7 時 59 分発、8 時 06 分発、8 時 22 分発、8 時 39 分発、8 時 55 分発までの乗車人員および待時間の合計は 128 人、832 分である。いまここで始発バス 6 時 56 分は到着人員が無く空車で発車しているので考慮しないことにし、8 時 55 分発は朝のラッシュ時間の最終であるからこの発車時刻は変更せず、7 時 27 分発より 8 時 39 分発までの 6 回の発車時刻を改正することにより待時間の合計 832 分より少しでも小さくなるように発車時刻の決定方法を試みるものである。

2 基本的な考え方

図－2 の 1 分間あたりの乗客到着人員を 5 分間あたりの到着人員にまとめたのが図－3 のグラフである。このグラフでは図のように時刻別による到着人員の変化が激しいのでグラフを修正し、図－4 の第 1 案、図－5 の第 2 案の 2 とおりに作成し待時間を最小とする発車時刻の計算を行う。

本研究ではつぎのような前提条件を設定する。

- (1) 到着人員を 5 分間あたりとしたため 5 分刻みの発車時刻とする。
- (2) 乗客到着人数の時刻分布は発車時刻を改正しても不変である。
- (3) 乗客到着人数の最高が 7 時 55 分より 8 時 00 分までに 22 人であるから、途中バス停留所での乗車人員を考慮して福井駅前バス停留所での乗客定員を 25 人として計算を進める。ただしこの定員は乗客到着分布を変えないから発車時刻を改正することにより計算結果では多少定員を上まわることがある。
- (4) バス発車は 1 台とし、同時に 2 台以上は発車させない。



図－3 5 分間あたり乗客到着人員グラフ

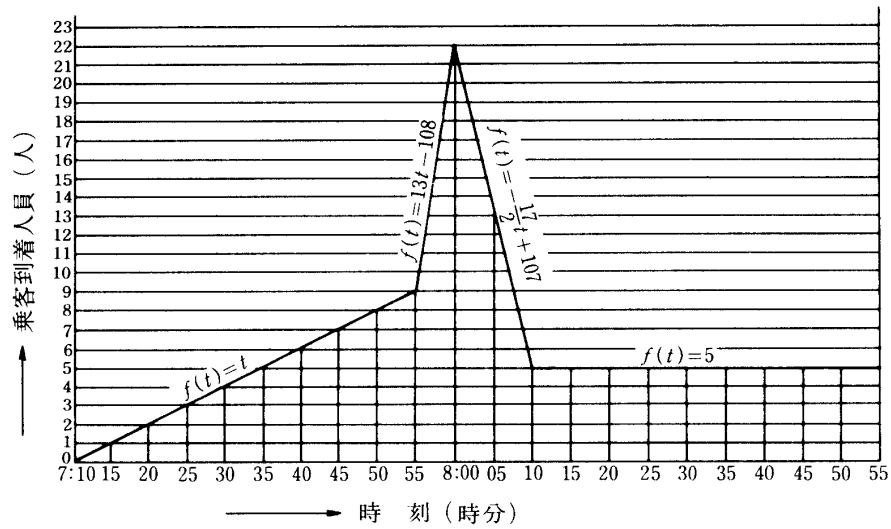


図-4 第1案 乗客到着人員グラフの修正

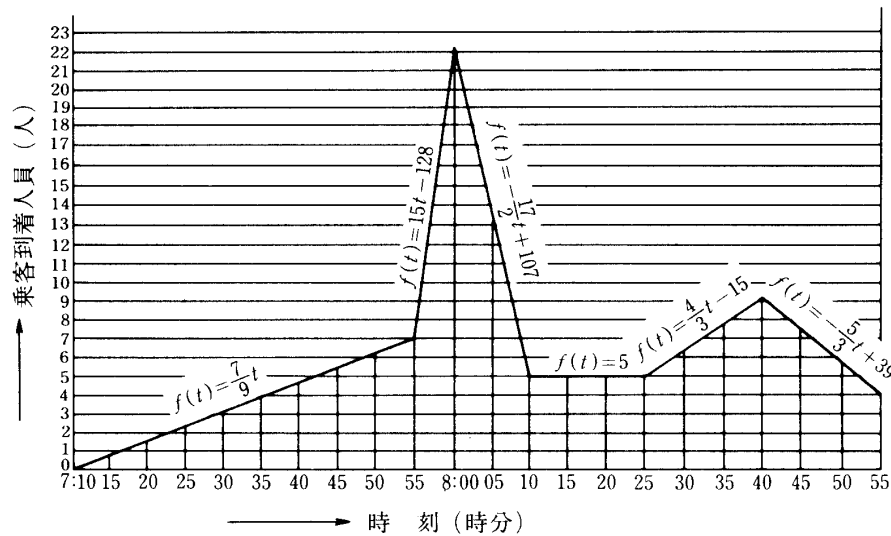


図-5 第2案 乗客到着人員グラフの修正

3 待時間の算定について

図-6において、時刻 $t_0 = 0$ より時刻 T までの間にバスを n 台運行させるとき、第 i 番目のバスを時刻 t_i で発車させると乗客の総待時間 $W(n \cdot T)$ はつぎのようにして求めることができる。ただし、最終バスの発車時刻 t_n は T とする

$$\begin{aligned}
 W(n \cdot T) = & \int_0^{t_1} f(t) \cdot (t_1 - t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot (t_2 - t) dt + \cdots \\
 & + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t) \cdot (t_n - t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) \cdot (t_k - t) dt
 \end{aligned} \quad (1)$$

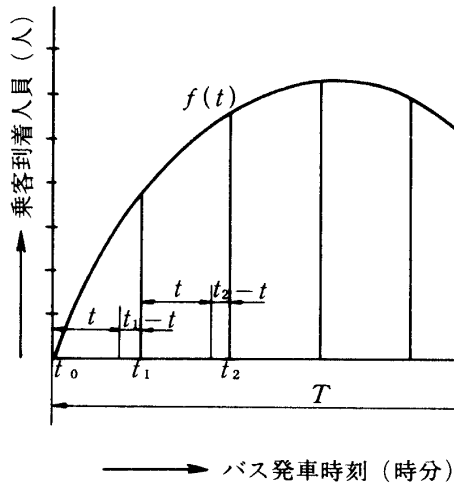


図-6

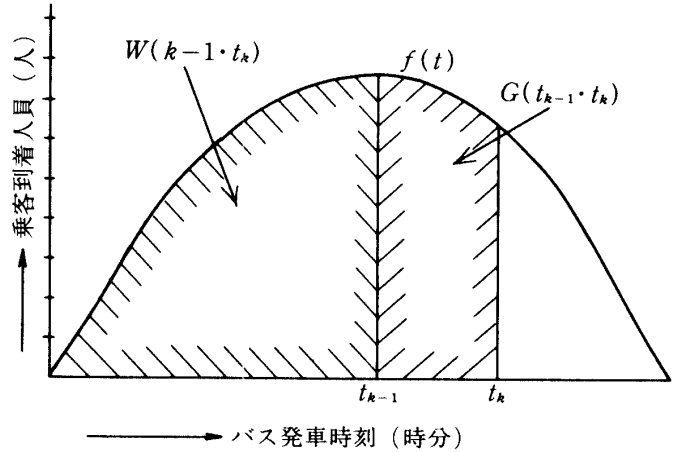


図-7

ここで、 k ：バス発車台数（台）

t_k ： k 番目に発車するバス時刻（ $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ）

t_{k-1} ： k 番目より 1 つ前に発車するバス時刻（ $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ）

乗客の積残しはしてはならないから式(2)のような制限条件式を付ける。

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dt \leq C \quad (2)$$

ここで、 C ：バス 1 台あたりの乗客定員（25人）

図-7において、時刻 t_{k-1} より t_k までの乗客待時間合計を $G(t_{k-1} \cdot t_k)$ とすると、

$$G(t_{k-1} \cdot t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) \cdot (t_k - t) dt \quad (3)$$

$W(n \cdot T)$ は動的計画法（Dynamic Programming）を用いて解くことができる。DPの繰返し関係式は式(4)のとおりである。

$$W(k \cdot t_k) = \min [G(t_{k-1} \cdot t_k) + W(k-1 \cdot t_{k-1})] \quad (4)$$

以上 4 式を用いて 5 分を 1 分として計算を行う。

4 待時間の計算と最適発車時刻について

(1) 第 1 案の計算

バス乗客総数 D は

$$\begin{aligned} D &= \int_0^9 t dt + \int_9^{10} (13t - 108) dt + \int_{10}^{12} \left(-\frac{17}{2}t + 107\right) dt + \int_{12}^{21} 5 dt \\ &= 40.5 + 15.5 + 27 + 45 = 128 \text{ 人} \end{aligned}$$

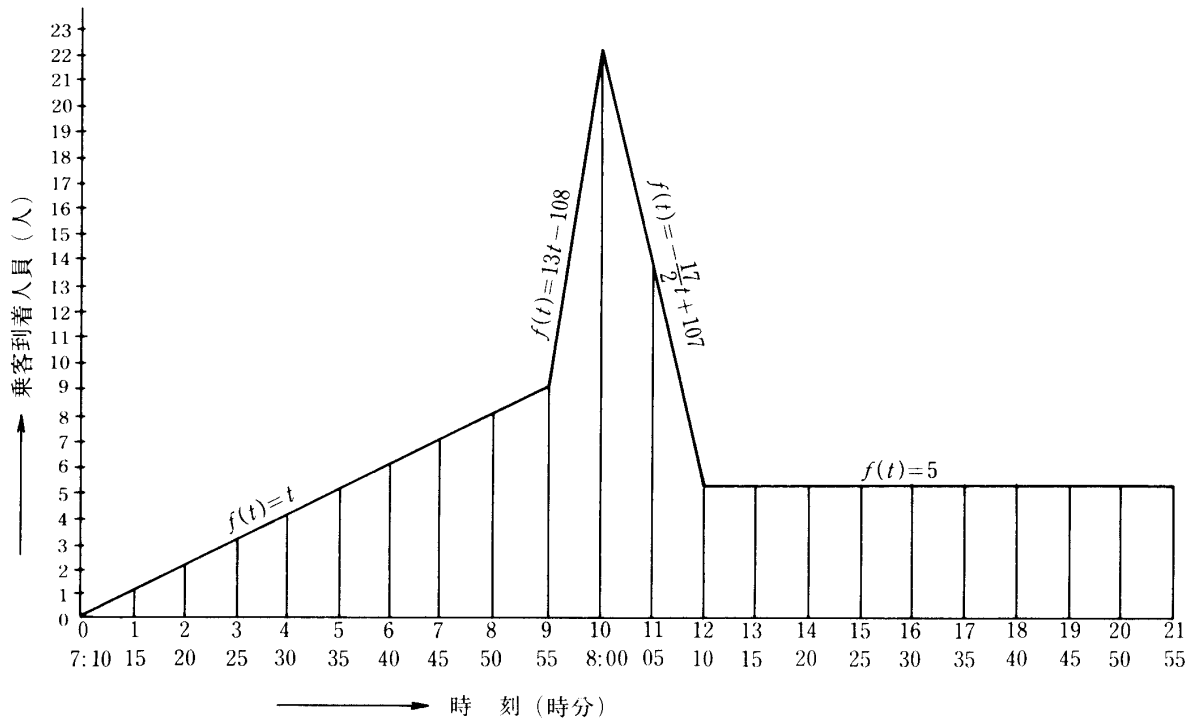


図-8 第1案時刻別乗客到着人員グラフ

Step 1 0分よりバス1台運行させるときの待時間の計算 $n = 1$

バスを1分に1台発車させるときの待時間

$$W(1 \cdot 1) = G(0 \cdot 1) = \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{1}{6}$$

バスを2分に1台発車させるときの待時間

$$W(1 \cdot 2) = G(0 \cdot 2) = \int_0^2 t(2-t) dt = \frac{4}{3}$$

バスを3分に1台発車させるときの待時間

$$W(1 \cdot 3) = G(0 \cdot 3) = \int_0^3 t(3-t) dt = \frac{9}{2}$$

$$W(1 \cdot 4) = G(0 \cdot 4) = \int_0^4 t(4-t) dt = \frac{32}{3}$$

$$W(1 \cdot 5) = \underbrace{G(0 \cdot 5)} = \int_0^5 t(5-t) dt = \frac{125}{6}$$

$$W(1 \cdot 6) = G(0 \cdot 6) = \int_0^6 t(6-t) dt = \frac{108}{3}$$

$$W(1 \cdot 7) = G(0 \cdot 7) = \int_0^7 t(7-t) dt = \frac{343}{6}$$

$n = 1$ の計算はここで終了する。なぜならばバスを8分に1台発車させるときの待時間すなわち $W(1 \cdot 8)$ は乗客人数が $\int_0^8 t dt = 32$ 人となってバス1台あたりの乗客定員25人を超過することになり積残しを起すからである。

Step 2 0分よりバス2台運行させるときの待時間の計算 $n = 2$

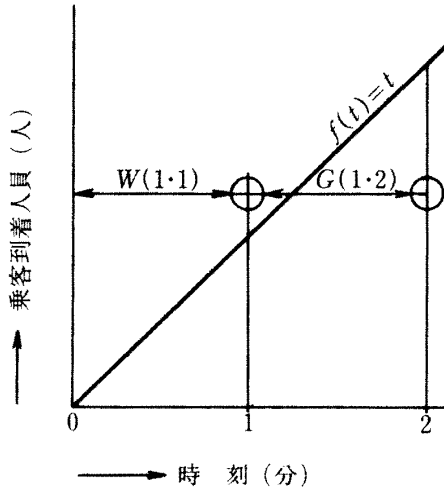


図-9 $W(2.2)$ バス発車方法

$W(2 \cdot 1)$ は1分間にバスを2台発車させることになるから、同時に2台発車はさせないので計算は不必要である。つぎに $W(2 \cdot 2)$ すなわち2分間にバス2台発車させるときは図-9が考えられる。1分に1台、2分に1台である。ゆえに式(4)を使って待時間合計を求めると、2分に1台発車させるときの待時間は $G(1 \cdot 2)$ であり、1分に1台発車させるときの待時間は $W(1 \cdot 1)$ であって $n = 1$ の場合の待時間 $W(1 \cdot 1) = \frac{1}{6}$ の値と同じである。ゆえに

$$W(2.2) = G(1.2) + W(1.1) = \int_1^2 t(2-t)dt + W(1.1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

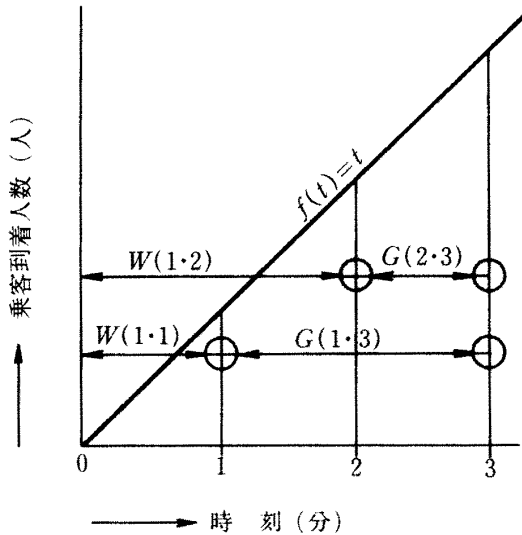
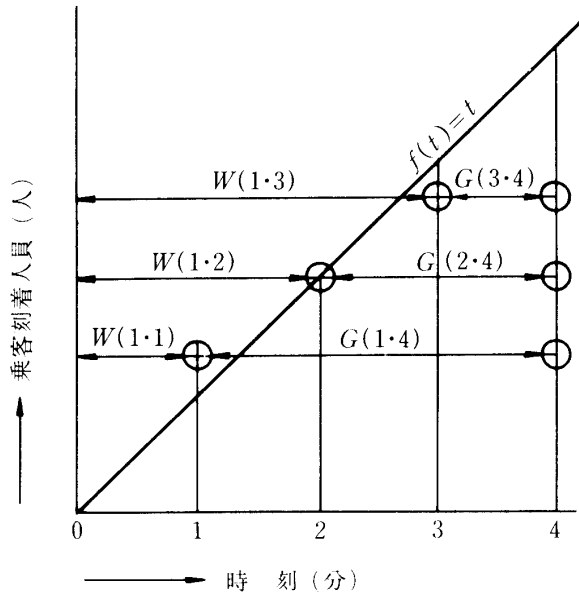


図-10 $W(2.3)$ バス発車方法

$W(2 \cdot 3)$ は3分間にバス2台発車させるから、図-10のように2とおりの発車方法が考えられる。すなわち2分に1台と3分に1台、1分に1台と3分に1台である。ゆえに

$$\begin{aligned} W(2.3) &= \min\{G(2.3) + W(1.2), G(1.3) + W(1.1)\} \\ &= \min\left\{\int_2^3 t(3-t)dt + W(1.2), \int_1^3 t(3-t)dt + W(1.1)\right\} \\ &= \min\left\{\frac{7}{6} + \frac{4}{3}, \frac{20}{6} + \frac{1}{6}\right\} = \min\left\{\frac{15}{6}, \frac{21}{6}\right\} = \frac{15}{6} \end{aligned}$$

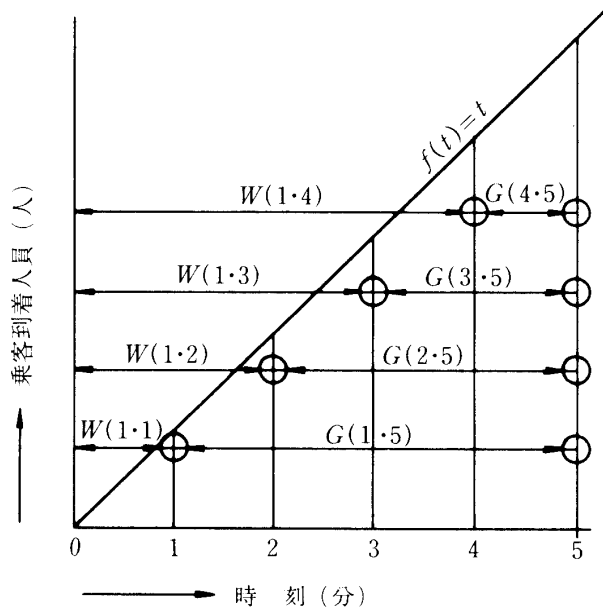
ここで、 $W(1.2)$ と $W(1.1)$ は $n = 1$ の場合の待時間合計と同じで $\frac{4}{3}$ と $\frac{1}{6}$ である。この2とおりの発車方法ではバスを2分に1台と3分に1台発車させる方が乗客待時間は最少値となる。



$W(2 \cdot 4)$ は4分間にバス2台発車させるから、図-11のように3とおりの発車方法が考えられる。

図-11 $W(2 \cdot 4)$ バス発車方法

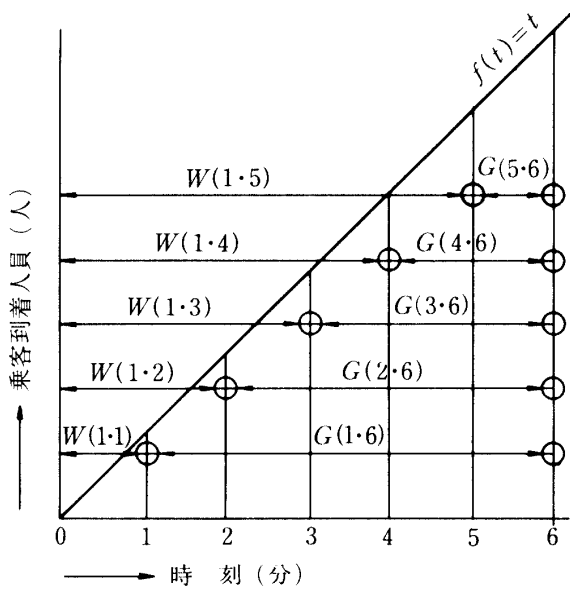
$$\begin{aligned}
 W(2 \cdot 4) &= \min\{G(3 \cdot 4) + W(1 \cdot 3), G(2 \cdot 4) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 4) + W(1 \cdot 1)\} \\
 &= \min\left\{\int_3^4 t((4-t)dt + W(1 \cdot 3), \int_2^4 t(4-t)dt + W(1 \cdot 2), \right. \\
 &\quad \left. \int_1^4 t(4-t)dt + W(1 \cdot 1)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{10}{6} + \frac{9}{2}, \frac{32}{6} + \frac{4}{3}, \frac{54}{6} + \frac{1}{6}\right\} = \min\left\{\frac{37}{6}, \frac{40}{6}, \frac{55}{6}\right\} = \frac{37}{6}
 \end{aligned}$$



$W(2 \cdot 5)$ は図-12のように4とおりの発車方法が考えられる。

図-12 $W(2 \cdot 5)$ バス発車方法

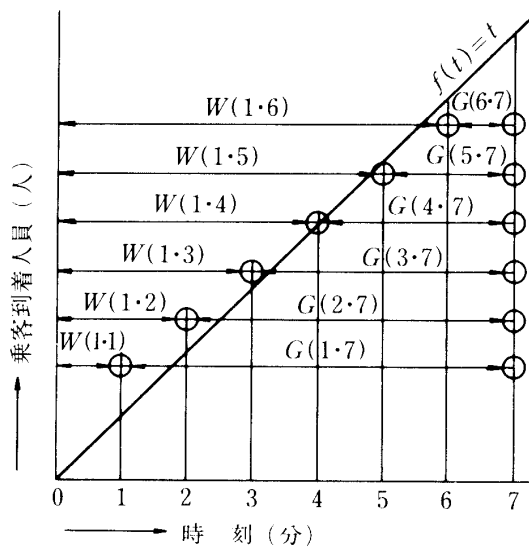
$$\begin{aligned}
 W(2 \cdot 5) &= \min\{G(4 \cdot 5) + W(1 \cdot 4), G(3 \cdot 5) + W(1 \cdot 3), G(2 \cdot 5) + W(1 \cdot 2), \\
 &\quad G(1 \cdot 5) + W(1 \cdot 1)\} \\
 &= \min\left\{\int_4^5 t((5-t)dt) + W(1 \cdot 4), \int_3^5 t(5-t)dt + W(1 \cdot 3), \right. \\
 &\quad \left. \int_2^5 t(5-t)dt + W(1 \cdot 2), \int_1^5 t(5-t)dt + W(1 \cdot 1)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{13}{6} + \frac{32}{3}, \frac{44}{6} + \frac{9}{2}, \frac{81}{6} + \frac{4}{3}, \frac{112}{7} + \frac{1}{6}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{77}{6}, \frac{71}{6}, \frac{89}{6}, \frac{113}{6}\right\} = \frac{71}{6}
 \end{aligned}$$



$W(2 \cdot 6)$ は図-13のように5とおりの発車方法が考えられる。

図-13 $W(2 \cdot 6)$ バス発車方法

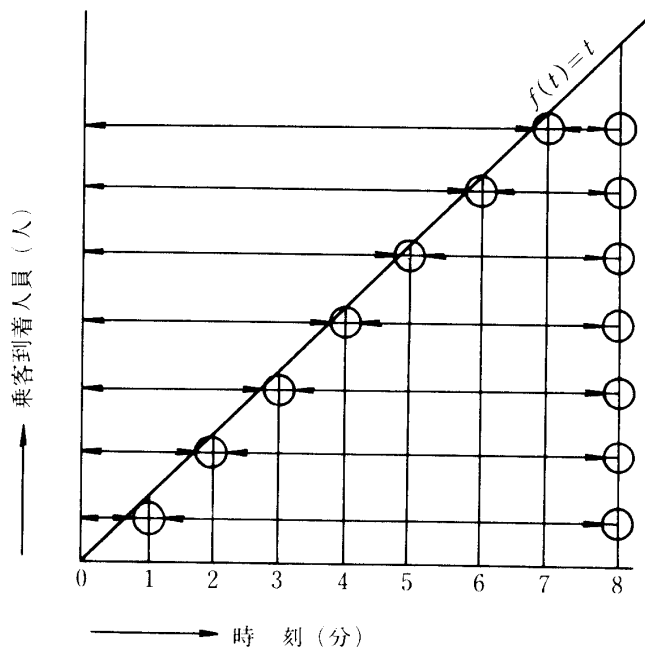
$$\begin{aligned}
 W(2 \cdot 6) &= \min\{G(5 \cdot 6) + W(1 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(1 \cdot 4), G(3 \cdot 6) + W(1 \cdot 3), \\
 &\quad G(2 \cdot 6) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 6) + W(1 \cdot 1)\} \\
 &= \min\left\{\int_5^6 t(6-t)dt + W(1 \cdot 5), \int_4^6 t(6-t)dt + W(1 \cdot 4), \int_3^6 t(6-t)dt + W(1 \cdot 3), \right. \\
 &\quad \left. \int_2^6 t(6-t)dt + W(1 \cdot 2), \int_1^6 t(6-t)dt + W(1 \cdot 1)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{16}{6} + \frac{125}{6}, \frac{56}{6} + \frac{32}{3}, \frac{108}{6} + \frac{9}{2}, \frac{160}{6} + \frac{4}{3}, \frac{200}{6} + \frac{1}{6}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{141}{6}, \frac{120}{6}, \frac{135}{6}, \frac{168}{6}, \frac{201}{6}\right\} = \frac{120}{6}
 \end{aligned}$$



$W(2 \cdot 7)$ は図-14のように6とおりの発車方法が考えられる。

図-14 $W(2 \cdot 7)$ バス発車方法

$$\begin{aligned}
 W(2 \cdot 7) &= \min\{G(6 \cdot 7) + W(1 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(1 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(1 \cdot 4), \\
 &\quad G(3 \cdot 7) + W(1 \cdot 3), G(2 \cdot 7) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 7) + W(1 \cdot 1)\} \\
 &= \min\left\{\int_6^7 t(7-t)dt + W(1 \cdot 6), \int_5^7 t(7-t)dt + W(1 \cdot 5), \right. \\
 &\quad \left. \int_4^7 t(7-t)dt + W(1 \cdot 4), \int_3^7 t(7-t)dt + W(1 \cdot 3), \right. \\
 &\quad \left. \int_2^7 t(7-t)dt + W(1 \cdot 2), \int_1^7 t(7-t)dt + W(1 \cdot 1)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{19}{6} + \frac{108}{3}, \frac{68}{6} + \frac{125}{6}, \frac{135}{6} + \frac{32}{3}, \frac{208}{6} + \frac{9}{2}, \frac{275}{6} + \frac{4}{3}, \frac{324}{6} + \frac{1}{6}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{235}{6}, \frac{193}{6}, \frac{199}{6}, \frac{235}{6}, \frac{283}{6}, \frac{325}{6}\right\} = \frac{193}{6}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &G(7 \cdot 8) + W(1 \cdot 7) \\
 &G(6 \cdot 8) + W(1 \cdot 6) \\
 &G(5 \cdot 8) + W(1 \cdot 5) \\
 &G(4 \cdot 8) + W(1 \cdot 4) \\
 &G(3 \cdot 8) + W(1 \cdot 3) \\
 &G(2 \cdot 8) + W(1 \cdot 2) \\
 &G(1 \cdot 8) + W(1 \cdot 1)
 \end{aligned}$$

図-15 $W(2 \cdot 8)$ バス発車方法

$W(2 \cdot 8)$ は図-15のように7とおりの発車方法が考えられるが、このうち $G(3 \cdot 8)$, $G(2 \cdot 8)$, $G(1 \cdot 8)$ は $\int t dt$ の値がそれぞれ27.5人, 30人, 31.5人となって乗客定員25人を超過するので発車できないから計算は不必要である。

$$\begin{aligned}
 W(2 \cdot 8) &= \min\{G(7 \cdot 8) + W(1 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(1 \cdot 6), \underline{G(5 \cdot 8) + W(1 \cdot 5)}, \\
 &\quad G(4 \cdot 8) + W(1 \cdot 4)\} \\
 &= \min\left\{\int_7^8 t(8-t)dt + W(1 \cdot 7), \int_6^8 t(8-t)dt + W(1 \cdot 6), \right. \\
 &\quad \left. \int_5^8 t(8-t)dt + W(1 \cdot 5), \int_4^8 t(8-t)dt + W(1 \cdot 4)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{22}{6} + \frac{343}{6}, \frac{80}{6} + \frac{108}{3}, \frac{162}{6} + \frac{125}{6}, \frac{256}{6} + \frac{32}{3}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{365}{6}, \frac{296}{6}, \frac{287}{6}, \frac{320}{6}\right\} = \frac{287}{6}
 \end{aligned}$$

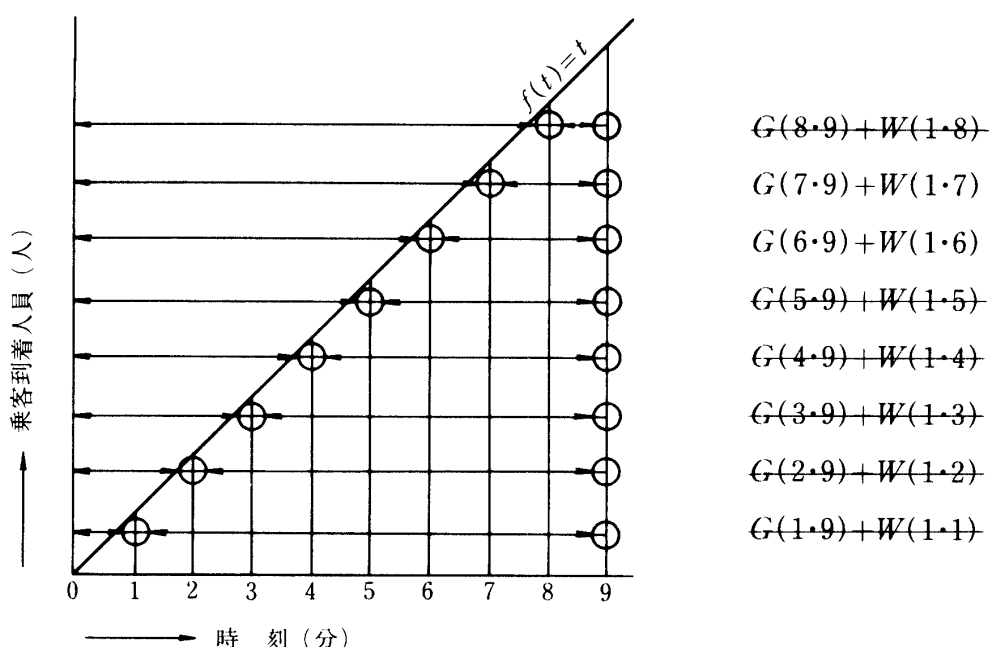


図-16 $W(2 \cdot 9)$ バス発車方法

$W(2 \cdot 9)$ は図-16のように8とおりの発車方法が考えられる。このうち、 $W(1 \cdot 8)$ は $n = 1$ のときと同じで $\int_0^8 t dt = 32$ 人となって乗客定員25人を超過するから計算の必要はない。また $G(5 \cdot 9)$, $G(4 \cdot 9)$, $G(3 \cdot 9)$, $G(2 \cdot 9)$, $G(1 \cdot 9)$ は $\int t dt$ の値がそれぞれ28人, 32.5人, 36人, 38.5人, 40人となって何れも乗客定員を超過するから計算は不必要である。したがって2とおりの発車方法のみが可能である。

$$\begin{aligned}
 W(2 \cdot 9) &= \min\{G(7 \cdot 9) + W(1 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(1 \cdot 6)\} \\
 &= \min\left\{\int_7^9 t(9-t)dt + W(1 \cdot 7), \int_6^9 t(9-t)dt + W(1 \cdot 6)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{92}{6} + \frac{343}{6}, \frac{189}{6} + \frac{108}{3}\right\} = \min\left\{\frac{435}{6}, \frac{405}{6}\right\} = \frac{405}{6}
 \end{aligned}$$

$n = 2$ のときの計算はここで終了する。なぜならば $W(2 \cdot 10)$ は乗客人数が $\int_0^9 t dt + \int_9^{10} (13t - 108) dt = 40.5 + 15.5 = 56$ 人となって乗客定員(25人) \times 運行台数(2台) = 50人を超過することになり、積残しを起すからである。

Step 3 0分よりバス3台運行させるときの待時間の計算 $n = 3$

$$W(3 \cdot 3) = G(2 \cdot 3) + W(2 \cdot 2) = \int_2^3 t(3-t)dt + W(2 \cdot 2) = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6}$$

$$\begin{aligned}
 W(3 \cdot 4) &= \min\{G(3 \cdot 4) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 4) + W(2 \cdot 2)\} \\
 &= \min\left\{\int_3^4 t(4-t)dt + W(2 \cdot 3), \int_2^4 t(4-t)dt + W(2 \cdot 2)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{10}{6} + \frac{15}{6}, \frac{32}{6} + \frac{5}{6}\right\} = \min\left\{\frac{25}{6}, \frac{37}{6}\right\} = \frac{25}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(3 \cdot 5) &= \min\{G(4 \cdot 5) + W(2 \cdot 4), G(3 \cdot 5) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 5) + W(2 \cdot 2)\} \\
 &= \min\left\{\int_4^5 t(5-t)dt + W(2 \cdot 4), \int_3^5 t(5-t)dt + W(2 \cdot 3), \int_2^5 t(5-t)dt + W(2 \cdot 2)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{13}{6} + \frac{37}{6}, \frac{44}{6} + \frac{15}{6}, \frac{81}{6} + \frac{5}{6}\right\} = \min\left\{\frac{50}{6}, \frac{59}{6}, \frac{86}{6}\right\} = \frac{50}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(3 \cdot 6) &= \min\{G(5 \cdot 6) + W(2 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(2 \cdot 4), G(3 \cdot 6) + W(2 \cdot 3), \\
 &\quad G(2 \cdot 6) + W(2 \cdot 2)\} \\
 &= \min\left\{\int_5^6 t(6-t)dt + W(2 \cdot 5), \int_4^6 t(6-t)dt + W(2 \cdot 4), \int_3^6 t(6-t)dt + W(2 \cdot 3), \int_2^6 t(6-t)dt + W(2 \cdot 2)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{16}{6} + \frac{71}{6}, \frac{56}{6} + \frac{37}{6}, \frac{108}{6} + \frac{15}{6}, \frac{160}{6} + \frac{5}{6}\right\} = \min\left\{\frac{87}{6}, \frac{93}{6}, \frac{123}{6}, \frac{165}{6}\right\} = \frac{87}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(3 \cdot 7) &= \min\{G(6 \cdot 7) + W(2 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(2 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(2 \cdot 4), \\
 &\quad G(3 \cdot 7) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 7) + W(2 \cdot 2)\} \\
 &= \min\left\{\int_6^7 t(7-t)dt + W(2 \cdot 6), \int_5^7 t(7-t)dt + W(2 \cdot 5), \int_4^7 t(7-t)dt + W(2 \cdot 4), \int_3^7 t(7-t)dt + W(2 \cdot 3), \int_2^7 t(7-t)dt + W(2 \cdot 2)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{19}{6} + \frac{120}{6}, \frac{68}{6} + \frac{71}{6}, \frac{135}{6} + \frac{37}{6}, \frac{208}{6} + \frac{15}{6}, \frac{275}{6} + \frac{5}{6}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{139}{6}, \frac{139}{6}, \frac{172}{6}, \frac{223}{6}, \frac{280}{6}\right\} = \frac{139}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(3 \cdot 8) &= \min\{G(7 \cdot 8) + W(2 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(2 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(2 \cdot 5), \\
 &\quad G(4 \cdot 8) + W(2 \cdot 4)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \min \left\{ \int_7^8 t(8-t)dt + W(2 \cdot 7), \int_6^8 t(8-t)dt + W(2 \cdot 6), \right. \\
 &\quad \left. \int_5^8 t(8-t)dt + W(2 \cdot 5), \int_4^8 t(8-t)dt + W(2 \cdot 4) \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{22}{6} + \frac{193}{6}, \frac{80}{6} + \frac{120}{6}, \frac{162}{6} + \frac{71}{6}, \frac{256}{6} + \frac{37}{6} \right\} = \min \left\{ \frac{215}{6}, \frac{200}{6}, \frac{233}{6}, \frac{293}{6} \right\} = \frac{200}{6} \\
 W(3 \cdot 9) &= \min \{ G(8 \cdot 9) + W(2 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(2 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(2 \cdot 6) \} \\
 &= \min \left\{ \int_8^9 t(9-t)dt + W(2 \cdot 8), \int_7^9 t(9-t)dt + W(2 \cdot 7), \int_6^9 t(9-t)dt + W(2 \cdot 6) \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{25}{6} + \frac{287}{6}, \frac{92}{6} + \frac{193}{6}, \frac{189}{6} + \frac{120}{6} \right\} = \min \left\{ \frac{312}{6}, \frac{285}{6}, \frac{309}{6} \right\} = \frac{285}{6} \\
 W(3 \cdot 10) &= \min \{ G(9 \cdot 10) + W(2 \cdot 9), \underbrace{G(8 \cdot 10) + W(2 \cdot 8)} \} \\
 &= \min \left\{ \int_9^{10} (13t - 108)(10-t)dt + W(2 \cdot 9), \right. \\
 &\quad \left. \int_8^9 t(10-t)dt + \int_9^{10} (13t - 108)(10-t)dt + W(2 \cdot 8) \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{40}{6} + \frac{405}{6}, \frac{76}{6} + \frac{40}{6} + \frac{287}{6} \right\} = \min \left\{ \frac{445}{6}, \frac{403}{6} \right\} = \frac{403}{6}
 \end{aligned}$$

$W(3 \cdot 11)$ はつぎのような9とおりの発車方法が考えられる。

$$\begin{aligned}
 &G(10 \cdot 11) + W(2 \cdot 10), G(9 \cdot 11) + W(2 \cdot 9), G(8 \cdot 11) + W(2 \cdot 8), G(7 \cdot 11) + W(2 \cdot 7), \\
 &G(6 \cdot 11) + W(2 \cdot 6), G(5 \cdot 11) + W(2 \cdot 5), G(4 \cdot 11) + W(2 \cdot 4), G(3 \cdot 11) + W(2 \cdot 3), \\
 &G(2 \cdot 11) + W(2 \cdot 2)
 \end{aligned}$$

ここで、 $W(2 \cdot 10)$ は $n = 2$ の場合と同様にバス2台あたりの乗客定員50人を超過するので計算は不必要である。また $G(9 \cdot 11)$ は $\int_9^{10} (13t - 108)dt + \int_{10}^{11} \left(-\frac{17}{2}t + 107\right)dt = 15.5 + 17.75 = 33.25$ 人となってバス1台あたりの乗客定員25人を超過する。同様にして考えると $G(8 \cdot 11)$ 以下 $G(2 \cdot 11)$ までいずれも乗客定員を超過するので積残しを起すことになり発車させることはできない。したがって $n = 3$ の計算は $W(3 \cdot 10)$ までで終了する。

Step 4 0分よりバス4台運行させるときの待時間の計算 $n = 4$

$$\begin{aligned}
 W(4 \cdot 4) &= G(3 \cdot 4) + W(3 \cdot 3) = \frac{10}{6} + \frac{12}{6} = \frac{22}{6} \\
 W(4 \cdot 5) &= \min \{ G(4 \cdot 5) + W(3 \cdot 4), G(3 \cdot 5) + W(3 \cdot 3) \} \\
 &= \min \left\{ \frac{13}{6} + \frac{25}{6}, \frac{44}{6} + \frac{12}{6} \right\} = \min \left\{ \frac{38}{6}, \frac{56}{6} \right\} = \frac{38}{6} \\
 W(4 \cdot 6) &= \min \{ G(5 \cdot 6) + W(3 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(3 \cdot 4), G(3 \cdot 6) + W(3 \cdot 3) \} \\
 &= \min \left\{ \frac{16}{6} + \frac{50}{6}, \frac{56}{6} + \frac{25}{6}, \frac{108}{6} + \frac{12}{6} \right\} = \min \left\{ \frac{66}{6}, \frac{81}{6}, \frac{120}{6} \right\} = \frac{66}{6} \\
 W(4 \cdot 7) &= \min \{ G(6 \cdot 7) + W(3 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(3 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(3 \cdot 4), \\
 &\quad G(3 \cdot 7) + W(3 \cdot 3) \} \\
 &= \min \left\{ \frac{19}{6} + \frac{87}{6}, \frac{68}{6} + \frac{50}{6}, \frac{135}{6} + \frac{25}{6}, \frac{208}{6} + \frac{12}{6} \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \min\left\{\frac{106}{6}, \frac{118}{6}, \frac{160}{6}, \frac{220}{6}\right\} = \frac{106}{6}$$

$$W(4 \cdot 8) = \min\{G(7 \cdot 8) + W(3 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(3 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(3 \cdot 5), \\ G(4 \cdot 8) + W(3 \cdot 4)\}$$

$$= \min\left\{\frac{22}{6} + \frac{139}{6}, \frac{80}{6} + \frac{87}{6}, \frac{162}{6} + \frac{50}{6}, \frac{256}{6} + \frac{25}{6}\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{161}{6}, \frac{167}{6}, \frac{212}{6}, \frac{281}{6}\right\} = \frac{161}{6}$$

$$W(4 \cdot 9) = \min\{G(8 \cdot 9) + W(3 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(3 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(3 \cdot 6)\}$$

$$= \min\left\{\frac{25}{6} + \frac{200}{6}, \frac{92}{6} + \frac{139}{6}, \frac{189}{6} + \frac{87}{6}\right\} = \min\left\{\frac{225}{6}, \frac{231}{6}, \frac{276}{6}\right\} = \frac{225}{6}$$

$$W(4 \cdot 10) = \min\{G(9 \cdot 10) + W(3 \cdot 9), G(8 \cdot 10) + W(3 \cdot 8)\}$$

$$= \min\left\{\frac{40}{6} + \frac{285}{6}, \frac{76}{6} + \frac{40}{6} + \frac{200}{6}\right\} = \min\left\{\frac{325}{6}, \frac{316}{6}\right\} = \frac{316}{6}$$

$$W(4 \cdot 11) = \underbrace{G(10 \cdot 11) + W(3 \cdot 10)}_{= \frac{115}{12} + \frac{806}{12} = \frac{921}{12}} = \int_{10}^{11} \left(-\frac{17}{2}t + 107\right)(11-t)dt + W(3 \cdot 10)$$

$W(4 \cdot 12)$ は $G(11 \cdot 12) + W(3 \cdot 11)$ より $G(3 \cdot 12) + W(3 \cdot 3)$ まで9とおりの発車方法があるが、いづれも乗客定員を超過するので積残すことになり発車させることはできない。したがって $n = 4$ の計算はここまでで終了する。

Step 5 0分よりバス5台運行させるときの待時間の計算 $n = 5$

$$W(5 \cdot 5) = G(4 \cdot 5) + W(4 \cdot 4) = \frac{13}{6} + \frac{22}{6} = \frac{35}{6}$$

$$W(5 \cdot 6) = \min\{G(5 \cdot 6) + W(4 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(4 \cdot 4)\}$$

$$= \min\left\{\frac{16}{6} + \frac{38}{6}, \frac{56}{6} + \frac{22}{6}\right\} = \min\left\{\frac{54}{6}, \frac{78}{6}\right\} = \frac{54}{6}$$

$$W(5 \cdot 7) = \min\{G(6 \cdot 7) + W(4 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(4 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(4 \cdot 4)\}$$

$$= \min\left\{\frac{19}{6} + \frac{66}{6}, \frac{68}{6} + \frac{38}{6}, \frac{135}{6} + \frac{22}{6}\right\} = \min\left\{\frac{85}{6}, \frac{106}{6}, \frac{157}{6}\right\} = \frac{85}{6}$$

$$W(5 \cdot 8) = \min\{G(7 \cdot 8) + W(4 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(4 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(4 \cdot 5), \\ G(4 \cdot 8) + W(4 \cdot 4)\}$$

$$= \min\left\{\frac{22}{6} + \frac{106}{6}, \frac{80}{6} + \frac{66}{6}, \frac{162}{6} + \frac{38}{6}, \frac{256}{6} + \frac{22}{6}\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{128}{6}, \frac{146}{6}, \frac{200}{6}, \frac{278}{6}\right\} = \frac{128}{6}$$

$$W(5 \cdot 9) = \min\{G(8 \cdot 9) + W(4 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(4 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(4 \cdot 6)\}$$

$$= \min\left\{\frac{25}{6} + \frac{161}{6}, \frac{92}{6} + \frac{106}{6}, \frac{189}{6} + \frac{66}{6}\right\} = \min\left\{\frac{186}{6}, \frac{198}{6}, \frac{255}{6}\right\} = \frac{186}{6}$$

$$W(5 \cdot 10) = \min\{G(9 \cdot 10) + W(4 \cdot 9), G(8 \cdot 10) + W(4 \cdot 8)\}$$

$$= \min\left\{\frac{40}{6} + \frac{225}{6}, \frac{116}{6} + \frac{161}{6}\right\} = \min\left\{\frac{265}{6}, \frac{277}{6}\right\} = \frac{265}{6}$$

$$W(5 \cdot 11) = G(10 \cdot 11) + W(4 \cdot 10) = \frac{115}{12} + \frac{316}{6} = \frac{115}{12} + \frac{632}{12} = \frac{747}{12}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 12) &= G(11 \cdot 12) + W(4 \cdot 11) = \int_{11}^{12} \left(-\frac{17}{2}t + 107 \right) (12 - t) dt + W(4 \cdot 11) \\ &= \frac{32}{6} + \frac{921}{12} = \frac{64}{12} + \frac{921}{12} = \frac{985}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 13) &= G(11 \cdot 13) + W(4 \cdot 11) = \int_{11}^{12} \left(-\frac{17}{2}t + 107 \right) (13 - t) dt + \int_{12}^{13} 5(13 - t) dt + W(4 \cdot 11) \\ &= \frac{87.5}{6} + \frac{15}{6} + \frac{921}{12} = \frac{102.5}{6} + \frac{921}{12} = \frac{205}{12} + \frac{921}{12} = \frac{1126}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 14) &= \underbrace{G(11 \cdot 14) + W(4 \cdot 11)}_{\text{~~~~~}} = \int_{11}^{12} \left(-\frac{17}{2}t + 107 \right) (14 - t) dt + \int_{12}^{14} 5(14 - t) dt + W(4 \cdot 11) \\ &= \frac{143}{6} + \frac{60}{6} + \frac{921}{12} = \frac{406}{12} + \frac{921}{12} = \frac{1327}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 15) &= G(11 \cdot 15) + W(4 \cdot 11) = \int_{11}^{12} \left(-\frac{17}{2}t + 107 \right) (15 - t) dt + \int_{12}^{15} 5(15 - t) dt + W(4 \cdot 11) \\ &= \frac{198.5}{6} + \frac{135}{6} + \frac{921}{12} = \frac{667}{12} + \frac{921}{12} = \frac{1588}{12} \end{aligned}$$

$W(5 \cdot 16)$ は $G(15 \cdot 16) + W(4 \cdot 15)$ より $G(4 \cdot 16) + W(4 \cdot 4)$ まで12とおりの発車方法があるが、いずれも乗客定員を超過するので積残しを起すことになり発車させることはできない。したがって $n = 5$ の計算は $W(5 \cdot 15)$ までで終了する。

Step 6 0分よりバス6台運行させるときの待時間の計算 $n = 6$

$$W(6 \cdot 6) = G(5 \cdot 6) + W(5 \cdot 5) = \frac{16}{6} + \frac{35}{6} = \frac{51}{6}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 7) &= \min\{G(6 \cdot 7) + W(5 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(5 \cdot 5)\} \\ &= \min\left\{\frac{19}{6} + \frac{54}{6}, \frac{68}{6} + \frac{35}{6}\right\} = \min\left\{\frac{73}{6}, \frac{103}{6}\right\} = \frac{73}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 8) &= \min\{G(7 \cdot 8) + W(5 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(5 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(5 \cdot 5)\} \\ &= \min\left\{\frac{22}{6} + \frac{85}{6}, \frac{80}{6} + \frac{54}{6}, \frac{162}{6} + \frac{35}{6}\right\} = \min\left\{\frac{107}{6}, \frac{134}{6}, \frac{197}{6}\right\} = \frac{107}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 9) &= \min\{G(8 \cdot 9) + W(5 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(5 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(5 \cdot 6)\} \\ &= \min\left\{\frac{25}{6} + \frac{128}{6}, \frac{92}{6} + \frac{85}{6}, \frac{189}{6} + \frac{54}{6}\right\} = \min\left\{\frac{153}{6}, \frac{177}{6}, \frac{243}{6}\right\} = \frac{153}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 10) &= \min\{G(9 \cdot 10) + W(5 \cdot 9), G(8 \cdot 10) + W(5 \cdot 8)\} \\ &= \min\left\{\frac{40}{6} + \frac{186}{6}, \frac{116}{6} + \frac{128}{6}\right\} = \min\left\{\frac{226}{6}, \frac{244}{6}\right\} = \frac{226}{6} \end{aligned}$$

$$W(6 \cdot 11) = G(10 \cdot 11) + W(5 \cdot 10) = \frac{115}{12} + \frac{265}{6} = \frac{645}{12}$$

$$W(6 \cdot 12) = G(11 \cdot 12) + W(5 \cdot 11) = \frac{32}{6} + \frac{747}{12} = \frac{811}{12}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 13) &= \min\{G(12 \cdot 13) + W(5 \cdot 12), G(11 \cdot 13) + W(5 \cdot 11)\} \\ &= \min\left\{\frac{15}{6} + \frac{985}{12}, \frac{102.5}{6} + \frac{747}{12}\right\} = \min\left\{\frac{1015}{12}, \frac{952}{12}\right\} = \frac{952}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(6 \cdot 14) &= \min\{G(13 \cdot 14) + W(5 \cdot 13), G(12 \cdot 14) + W(5 \cdot 12), G(11 \cdot 14) + W(5 \cdot 11)\} \\
 &= \min\left\{\int_{13}^{14} 5(14-t)dt + W(5 \cdot 13), \int_{12}^{14} 5(14-t)dt + W(5 \cdot 12), \frac{203}{6} + W(5 \cdot 11)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{15}{6} + \frac{1126}{12}, \frac{60}{6} + \frac{985}{12}, \frac{203}{6} + \frac{747}{12}\right\} = \min\left\{\frac{1156}{12}, \frac{1105}{12}, \frac{1153}{12}\right\} = \frac{1105}{12} \\
 W(6 \cdot 15) &= \min\{G(14 \cdot 15) + W(5 \cdot 14), G(13 \cdot 15) + W(5 \cdot 13), G(12 \cdot 15) + W(5 \cdot 12), \\
 &\quad G(11 \cdot 15) + W(5 \cdot 11)\} \\
 &= \min\left\{\int_{14}^{15} 5(15-t)dt + W(5 \cdot 14), \int_{13}^{15} 5(15-t)dt + W(5 \cdot 13), \right. \\
 &\quad \left. \int_{12}^{15} 5(15-t)dt + W(5 \cdot 12), \frac{667}{12} + W(5 \cdot 11)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{1327}{12}, \frac{120}{12} + \frac{1126}{12}, \frac{270}{12} + \frac{985}{12}, \frac{667}{12} + \frac{747}{12}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{1357}{12}, \frac{1246}{12}, \frac{1255}{12}, \frac{1414}{12}\right\} = \frac{1246}{12} \\
 W(6 \cdot 16) &= \min\{G(15 \cdot 16) + W(5 \cdot 15), G(14 \cdot 16) + W(5 \cdot 14), G(13 \cdot 16) + W(5 \cdot 13), \\
 &\quad G(12 \cdot 16) + W(5 \cdot 12)\} \\
 &= \min\left\{\int_{15}^{16} 5(16-t)dt + W(5 \cdot 15), \int_{14}^{16} 5(16-t)dt + W(5 \cdot 14), \right. \\
 &\quad \left. \int_{13}^{16} 5(16-t)dt + W(5 \cdot 13), \int_{12}^{16} 5(16-t)dt + W(5 \cdot 12)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{1588}{12}, \frac{120}{12} + \frac{1327}{12}, \frac{270}{12} + \frac{1126}{12}, \frac{480}{12} + \frac{985}{12}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{1618}{12}, \frac{1447}{12}, \frac{1396}{12}, \frac{1465}{12}\right\} = \frac{1396}{12} \\
 W(6 \cdot 17) &= \min\{G(15 \cdot 17) + W(5 \cdot 15), \underbrace{G(14 \cdot 17) + W(5 \cdot 14)}, G(13 \cdot 17) + W(5 \cdot 13), \\
 &\quad G(12 \cdot 17) + W(5 \cdot 12)\} \\
 &= \min\left\{\int_{15}^{17} 5(17-t)dt + W(5 \cdot 15), \int_{14}^{17} 5(17-t)dt + W(5 \cdot 14), \right. \\
 &\quad \left. \int_{13}^{17} 5(17-t)dt + W(5 \cdot 13), \int_{12}^{17} 5(17-t)dt + W(5 \cdot 12)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{60}{6} + \frac{1588}{12}, \frac{135}{6} + \frac{1327}{12}, \frac{240}{6} + \frac{1126}{12}, \frac{375}{6} + \frac{985}{12}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{1708}{12}, \frac{1597}{12}, \frac{1606}{12}, \frac{1735}{12}\right\} = \frac{1597}{12} \\
 W(6 \cdot 18) &= \min\{G(15 \cdot 18) + W(5 \cdot 15), \underbrace{G(14 \cdot 18) + W(5 \cdot 14)}, G(13 \cdot 18) + W(5 \cdot 13)\} \\
 &= \min\left\{\int_{15}^{18} 5(18-t)dt + W(5 \cdot 15), \int_{14}^{18} 5(18-t)dt + W(5 \cdot 14), \right. \\
 &\quad \left. \int_{13}^{18} 5(18-t)dt + W(5 \cdot 13)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{270}{12} + \frac{1588}{12}, \frac{480}{12} + \frac{1327}{12}, \frac{750}{12} + \frac{1126}{12}\right\} = \min\left\{\frac{1858}{12}, \frac{1807}{12}, \frac{1876}{12}\right\} = \frac{1807}{12} \\
 W(6 \cdot 19) &= \min\{G(15 \cdot 19) + W(5 \cdot 15), G(14 \cdot 19) + W(5 \cdot 14)\}
 \end{aligned}$$

$$= \min \left\{ \int_{15}^{19} 5(19-t)dt + W(5 \cdot 15), \int_{14}^{19} 5(19-t)dt + W(5 \cdot 14) \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{480}{12} + \frac{1588}{12}, \frac{750}{12} + \frac{1327}{12} \right\} = \min \left\{ \frac{2068}{12}, \frac{2077}{12} \right\} = \frac{2068}{12}$$

$$W(6 \cdot 20) = G(15 \cdot 20) + W(5 \cdot 15) = \int_{15}^{20} 5(20-t)dt + W(5 \cdot 15) = \frac{750}{12} + \frac{1588}{12} = \frac{2338}{12}$$

$W(6 \cdot 21)$ は $G(20 \cdot 21) + W(5 \cdot 20)$ より $G(5 \cdot 21) + W(5 \cdot 5)$ まで16とおりの発車方法が考えられるが、いずれも乗客定員を超過するので発車できない。したがって $n = 6$ の計算は $W(6 \cdot 20)$ までで終了する。

Step 7 0分よりバス7台を運行させるときの待時間の計算 $n = 7$

最終バスは21分と定められているから、0分より21分までの間にバス7台を運行するときの待時間最小値を求めればよい。

$$W(7 \cdot 21) = \min \{ G(20 \cdot 21) + W(6 \cdot 20), G(19 \cdot 21) + W(6 \cdot 19), \underline{G(18 \cdot 21) + W(6 \cdot 18)},$$

$$\underline{G(17 \cdot 21) + W(6 \cdot 17)}, G(16 \cdot 21) + W(6 \cdot 16) \}$$

$$= \min \left\{ \int_{20}^{21} 5(21-t)dt + W(6 \cdot 20), \int_{19}^{21} 5(21-t)dt + W(6 \cdot 19), \right.$$

$$\int_{18}^{21} 5(21-t)dt + W(6 \cdot 18), \int_{17}^{21} 5(21-t)dt + W(6 \cdot 17),$$

$$\left. \int_{16}^{21} 5(21-t)dt + W(6 \cdot 16) \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{30}{12} + \frac{2338}{12}, \frac{120}{12} + \frac{2068}{12}, \frac{270}{12} + \frac{1807}{12}, \frac{480}{12} + \frac{1597}{12}, \frac{750}{12} + \frac{1396}{12} \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{2368}{12}, \frac{2188}{12}, \underline{\frac{2077}{12}}, \frac{2077}{12}, \frac{2146}{12} \right\} = \frac{2077}{12}$$

以上で計算は終了するのでつぎにバス発車時刻の最適解を求める。 $W(7 \cdot 21)$ において $G(18 \cdot 21) + W(6 \cdot 18)$ と $G(17 \cdot 21) + W(6 \cdot 17)$ の2とおりが同じ値の $\frac{2077}{12}$ という値になったが、この場合の $W(6 \cdot 18)$ と $W(6 \cdot 17)$ の最小値は $n = 6$ をみると $G(14 \cdot 18) + W(5 \cdot 14)$, $G(14 \cdot 17) + W(5 \cdot 14)$ である。図-8をみると8時40分と8時35分である。また $W(5 \cdot 14)$ は $n = 5$ をみると $G(11 \cdot 14) + W(4 \cdot 11)$ であって8時20分である。 $W(4 \cdot 11)$ は $n = 4$ をみると $G(10 \cdot 11) + W(3 \cdot 10)$ であり8時05分である。つぎに $W(3 \cdot 10)$ の最小値は $n = 3$ をみると $G(8 \cdot 10) + W(2 \cdot 8)$ であるから8時00分である。このようにして求めてみると待時間を最小とするバス発車時刻の最適解はつぎのとおりである。

第1案 (A)

$G(18 \cdot 21)$	$G(14 \cdot 18)$	$G(11 \cdot 14)$	$G(10 \cdot 11)$	$G(8 \cdot 10)$	$G(5 \cdot 8)$	$G(0 \cdot 5)$
8:55	8:40	8:20	8:05	8:00	7:50	7:35

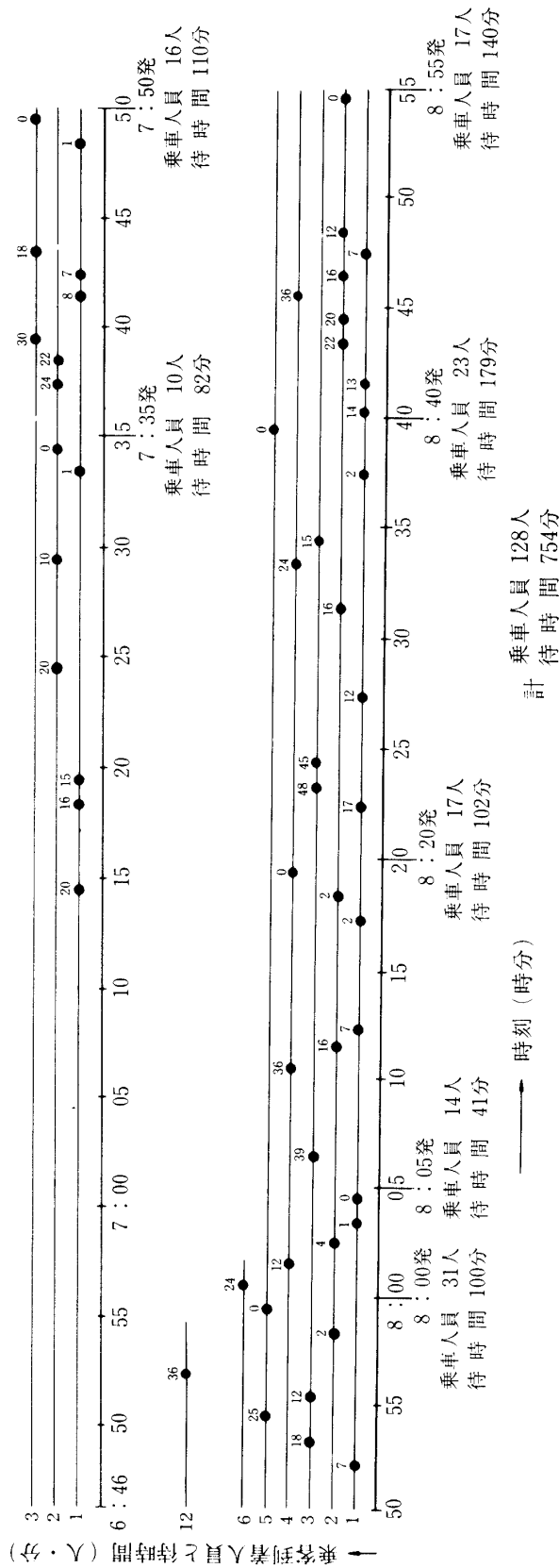


図-17 第1案(A)による乗客到着人員と待時間

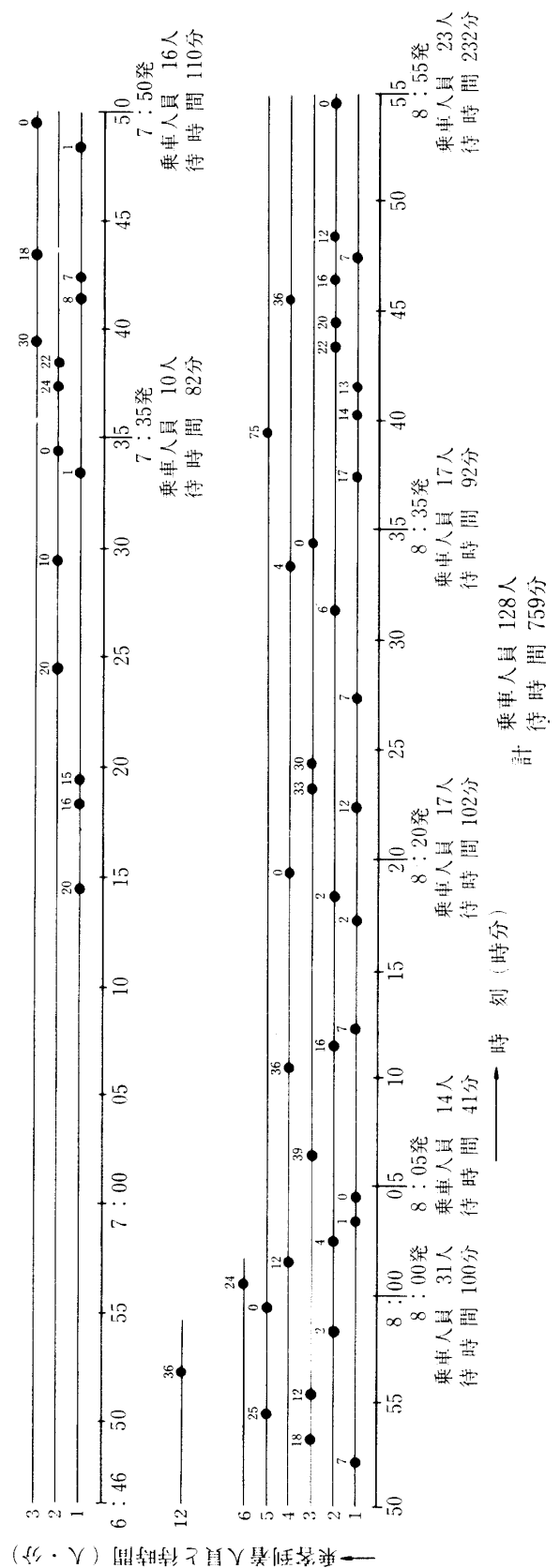


図-18 第1案(B)による乗客到着人員と待時間

第1案 (B)

$G(17 \cdot 21)$	$G(14 \cdot 17)$	$G(11 \cdot 14)$	$G(10 \cdot 11)$	$G(8 \cdot 10)$	$G(5 \cdot 8)$	$G(0 \cdot 5)$
8:55	8:35	8:20	8:05	8:00	7:50	7:35

上記第1案の(A), (B)について乗客到着人数の時刻今布を変えないで改正した発車時刻毎の乗車人員とその待時間およびその集計を示したのが図-17・18である。現行の待時間合計は832分であるが、(A)では754分(B)では759分となるから78分と73分それぞれ減少する。

(2) 第2案の計算

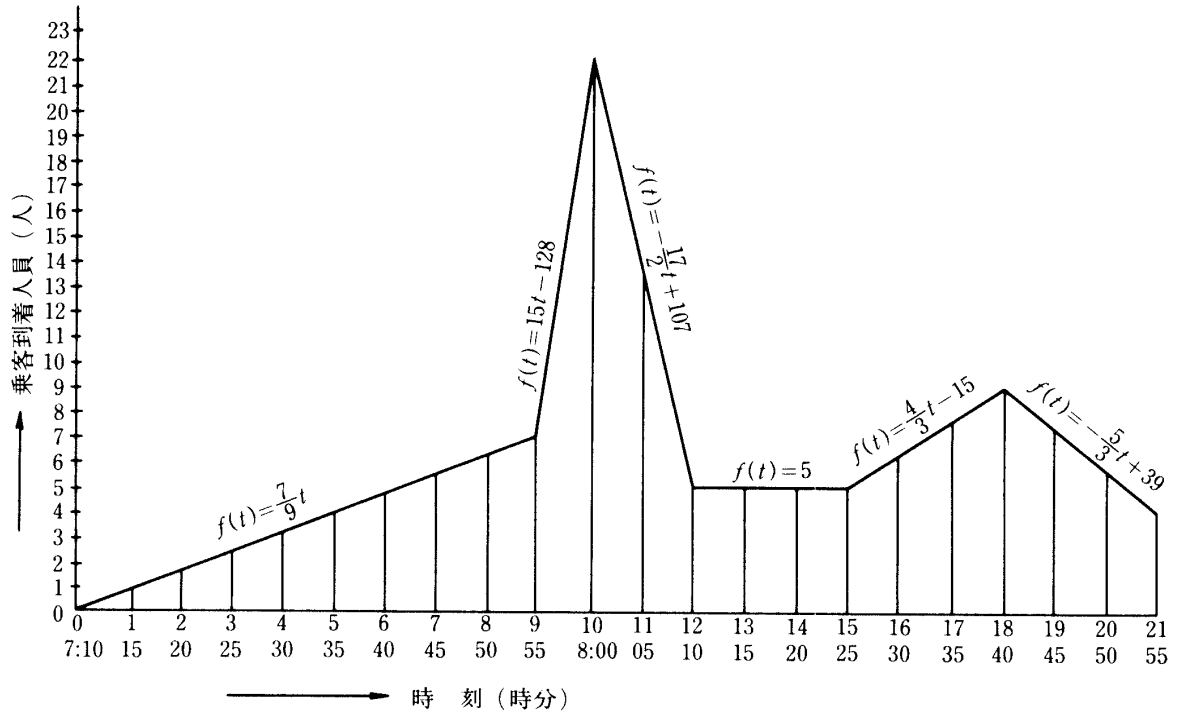


図-19 第2案時刻別乗客到着人員グラフ

バス乗客総数 D は

$$D = \int_0^9 \frac{7}{9}t dt + \int_9^{10} (15t - 128) dt + \int_{10}^{12} \left(-\frac{17}{2}t + 107\right) dt + \int_{12}^{15} 5 dt + \int_{15}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15\right) dt$$

$$= 31.5 + 14.5 + 27 + 15 + 21 + 19.5 = 128.5 \text{ 人}$$

Step 1 $n = 1$

$$W(1 \cdot 1) = G(0 \cdot 1) = \int_0^1 \frac{7}{9}t(1-t) dt = \frac{7}{54}$$

$$W(1 \cdot 2) = G(0 \cdot 2) = \int_0^2 \frac{7}{9}t(2-t) dt = \frac{56}{54}$$

$$W(1 \cdot 3) = G(0 \cdot 3) = \int_0^3 \frac{7}{9}t(3-t) dt = \frac{189}{54}$$

$$W(1 \cdot 4) = G(0 \cdot 4) = \int_0^4 \frac{7}{9}t(4-t) dt = \frac{448}{54}$$

$$W(1 \cdot 5) = G(0 \cdot 5) = \int_0^5 \frac{7}{9} t(5-t) dt = \frac{875}{54}$$

$$W(1 \cdot 6) = G(0 \cdot 6) = \int_0^6 \frac{7}{9} t(6-t) dt = \frac{1512}{54}$$

$$W(1 \cdot 7) = G(0 \cdot 7) = \int_0^7 \frac{7}{9} t(7-t) dt = \frac{2401}{54}$$

$$W(1 \cdot 8) = \underline{G(0 \cdot 8)} = \int_0^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt = \frac{3584}{54}$$

Step 2 $n = 2$

$$W(2 \cdot 2) = G(1 \cdot 2) + W(1 \cdot 1) = \int_1^2 \frac{7}{9} t(2-t) dt + W(1 \cdot 1) = \frac{28}{54} + \frac{7}{54} = \frac{35}{54}$$

$$W(2 \cdot 3) = \min\{G(2 \cdot 3) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 3) + W(1 \cdot 1)\}$$

$$= \min\left\{\int_2^3 \frac{7}{9} t(3-t) dt + W(1 \cdot 2), \int_1^3 \frac{7}{9} t(3-t) dt + W(1 \cdot 1)\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{49}{54} + \frac{56}{54}, \frac{140}{54} + \frac{7}{54}\right\} = \min\left\{\frac{105}{54}, \frac{147}{54}\right\} = \frac{105}{54}$$

$$W(2 \cdot 4) = \min\{G(3 \cdot 4) + W(1 \cdot 3), G(2 \cdot 4) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 4) + W(1 \cdot 1)\}$$

$$= \min\left\{\int_3^4 \frac{7}{9} t(4-t) dt + W(1 \cdot 3), \int_2^4 \frac{7}{9} t(4-t) dt + W(1 \cdot 2), \right.$$

$$\left. \int_1^4 \frac{7}{9} t(4-t) dt + W(1 \cdot 1)\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{70}{54} + \frac{189}{54}, \frac{224}{54} + \frac{56}{54}, \frac{378}{54} + \frac{7}{54}\right\} = \min\left\{\frac{259}{54}, \frac{280}{54}, \frac{385}{54}\right\} = \frac{259}{54}$$

$$W(2 \cdot 5) = \min\{G(4 \cdot 5) + W(1 \cdot 4), G(3 \cdot 5) + W(1 \cdot 3),$$

$$G(2 \cdot 5) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 5) + W(1 \cdot 1)\}$$

$$= \min\left\{\int_4^5 \frac{7}{9} t(5-t) dt + W(1 \cdot 4), \int_3^5 \frac{7}{9} t(5-t) dt + W(1 \cdot 3), \right.$$

$$\left. \int_2^5 \frac{7}{9} t(5-t) dt + W(1 \cdot 2), \int_1^5 \frac{7}{9} t(5-t) dt + W(1 \cdot 1)\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{91}{54} + \frac{448}{54}, \frac{308}{54} + \frac{189}{54}, \frac{567}{54} + \frac{56}{54}, \frac{784}{54} + \frac{7}{54}\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{539}{54}, \frac{497}{54}, \frac{623}{54}, \frac{791}{54}\right\} = \frac{497}{54}$$

$$W(2 \cdot 6) = \min\{G(5 \cdot 6) + W(1 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(1 \cdot 4), G(3 \cdot 6) + W(1 \cdot 3),$$

$$G(2 \cdot 6) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 6) + W(1 \cdot 1)\}$$

$$= \min\left\{\int_5^6 \frac{7}{9} t(6-t) dt + W(1 \cdot 5), \int_4^6 \frac{7}{9} t(6-t) dt + W(1 \cdot 4), \right.$$

$$\int_3^6 \frac{7}{9} t(6-t) dt + W(1 \cdot 3), \int_2^6 \frac{7}{9} t(6-t) dt + W(1 \cdot 2),$$

$$\left. \int_1^6 \frac{7}{9} t(6-t) dt + W(1 \cdot 1)\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{112}{54} + \frac{875}{54}, \frac{392}{54} + \frac{448}{54}, \frac{756}{54} + \frac{189}{54}, \frac{1120}{54} + \frac{56}{54}, \frac{1400}{54} + \frac{7}{54}\right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{987}{54}, \frac{840}{54}, \frac{945}{54}, \frac{1176}{54}, \frac{1407}{54} \right\} = \frac{840}{54}$$

$$W(2 \cdot 7) = \min \{ G(6 \cdot 7) + W(1 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(1 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(1 \cdot 4), \\ G(3 \cdot 7) + W(1 \cdot 3), G(2 \cdot 7) + W(1 \cdot 2), G(1 \cdot 7) + W(1 \cdot 1) \}$$

$$= \min \left\{ \int_6^7 \frac{7}{9} t(7-t) dt + W(1 \cdot 6), \int_5^7 \frac{7}{9} t(7-t) dt + W(1 \cdot 5), \right. \\ \int_4^7 \frac{7}{9} t(7-t) dt + W(1 \cdot 4), \int_3^7 \frac{7}{9} t(7-t) dt + W(1 \cdot 3), \\ \left. \int_2^7 \frac{7}{9} t(7-t) dt + W(1 \cdot 2), \int_1^7 \frac{7}{9} t(7-t) dt + W(1 \cdot 1) \right\} \\ = \min \left\{ \frac{133}{54} + \frac{1512}{54}, \frac{476}{54} + \frac{875}{54}, \frac{945}{54} + \frac{448}{54}, \frac{1456}{54} + \frac{189}{54}, \frac{1925}{54} + \frac{56}{54}, \frac{2268}{54} + \frac{7}{54} \right\} \\ = \min \left\{ \frac{1645}{54}, \frac{1351}{54}, \frac{1393}{54}, \frac{1645}{54}, \frac{1981}{54}, \frac{2275}{54} \right\} = \frac{1351}{54}$$

$$W(2 \cdot 8) = \min \{ G(7 \cdot 8) + W(1 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(1 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(1 \cdot 5), \\ G(4 \cdot 8) + W(1 \cdot 4), G(3 \cdot 8) + W(1 \cdot 3), G(2 \cdot 8) + W(1 \cdot 2), \\ G(1 \cdot 8) + W(1 \cdot 1) \}$$

$$= \min \left\{ \int_7^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt + W(1 \cdot 7), \int_6^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt + W(1 \cdot 6), \right. \\ \int_5^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt + W(1 \cdot 5), \int_4^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt + W(1 \cdot 4), \\ \int_3^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt + W(1 \cdot 3), \int_2^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt + W(1 \cdot 2), \\ \left. \int_1^8 \frac{7}{9} t(8-t) dt + W(1 \cdot 1) \right\} \\ = \min \left\{ \frac{154}{54} + \frac{2401}{54}, \frac{560}{54} + \frac{1512}{54}, \frac{1134}{54} + \frac{875}{54}, \frac{1792}{54} + \frac{448}{54}, \frac{2450}{54} + \frac{189}{54}, \frac{3024}{54} + \frac{56}{54}, \right. \\ \left. \frac{3430}{54} + \frac{7}{54} \right\} \\ = \min \left\{ \frac{2555}{54}, \frac{2072}{54}, \frac{2009}{54}, \frac{2240}{54}, \frac{2639}{54}, \frac{3080}{54}, \frac{3437}{54} \right\} = \frac{2009}{54}$$

$$W(2 \cdot 9) = \min \{ G(8 \cdot 9) + W(1 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(1 \cdot 7), \\ G(6 \cdot 9) + W(1 \cdot 6), G(5 \cdot 9) + W(1 \cdot 5) \}$$

$$= \min \left\{ \int_8^9 \frac{7}{9} t(9-t) dt + W(1 \cdot 8), \int_7^9 \frac{7}{9} t(9-t) dt + W(1 \cdot 7), \right. \\ \left. \int_6^9 \frac{7}{9} t(9-t) dt + W(1 \cdot 6), \int_5^9 \frac{7}{9} t(9-t) dt + W(1 \cdot 5) \right\} \\ = \min \left\{ \frac{175}{54} + \frac{3584}{54}, \frac{644}{54} + \frac{2401}{54}, \frac{1323}{54} + \frac{1512}{54}, \frac{2128}{54} + \frac{875}{54} \right\} \\ = \min \left\{ \frac{3759}{54}, \frac{3045}{54}, \frac{2835}{54}, \frac{3003}{54} \right\} = \frac{2835}{54}$$

$$W(2 \cdot 10) = \underbrace{G(8 \cdot 10) + W(1 \cdot 8)} = \int_9^{10} (15t - 128)(10-t) dt + \int_8^9 \frac{7}{9} t(10-t) dt + W(1 \cdot 8)$$

$$= \frac{324}{54} + \frac{532}{54} + \frac{3584}{54} = \frac{4440}{54}$$

Step 3 $n = 3$

$$W(3 \cdot 3) = G(2 \cdot 3) + W(2 \cdot 2) = \frac{49}{54} + \frac{35}{54} = \frac{84}{54}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 4) &= \min\{G(3 \cdot 4) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 4) + W(2 \cdot 2)\} \\ &= \min\left\{\frac{70}{54} + \frac{105}{54}, \frac{224}{54} + \frac{35}{54}\right\} = \min\left\{\frac{175}{54}, \frac{259}{54}\right\} = \frac{175}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 5) &= \min\{G(4 \cdot 5) + W(2 \cdot 4), G(3 \cdot 5) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 5) + W(2 \cdot 2)\} \\ &= \min\left\{\frac{91}{54} + \frac{259}{54}, \frac{308}{54} + \frac{105}{54}, \frac{567}{54} + \frac{35}{54}\right\} = \min\left\{\frac{350}{54}, \frac{413}{54}, \frac{602}{54}\right\} = \frac{350}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 6) &= \min\{G(5 \cdot 6) + W(2 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(2 \cdot 4), \\ &\quad G(3 \cdot 6) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 6) + W(2 \cdot 2)\} \\ &= \min\left\{\frac{112}{54} + \frac{497}{54}, \frac{392}{54} + \frac{259}{54}, \frac{756}{54} + \frac{105}{54}, \frac{1120}{54} + \frac{35}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{609}{54}, \frac{651}{54}, \frac{861}{54}, \frac{1155}{54}\right\} = \frac{609}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 7) &= \min\{G(6 \cdot 7) + W(2 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(2 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(2 \cdot 4), \\ &\quad G(3 \cdot 7) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 7) + W(2 \cdot 2)\} \\ &= \min\left\{\frac{133}{54} + \frac{840}{54}, \frac{476}{54} + \frac{497}{54}, \frac{945}{54} + \frac{259}{54}, \frac{1456}{54} + \frac{105}{54}, \frac{1925}{54} + \frac{35}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{973}{54}, \frac{973}{54}, \frac{1204}{54}, \frac{1561}{54}, \frac{1960}{54}\right\} = \frac{973}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 8) &= \min\{G(7 \cdot 8) + W(2 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(2 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(2 \cdot 5), \\ &\quad G(4 \cdot 8) + W(2 \cdot 4), G(3 \cdot 8) + W(2 \cdot 3), G(2 \cdot 8) + W(2 \cdot 2)\} \\ &= \min\left\{\frac{154}{54} + \frac{1351}{54}, \frac{560}{54} + \frac{840}{54}, \frac{1134}{54} + \frac{497}{54}, \frac{1792}{54} + \frac{259}{54}, \frac{2450}{54} + \frac{105}{54}, \frac{3024}{54} + \frac{35}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{1505}{54}, \frac{1400}{54}, \frac{1631}{54}, \frac{2051}{54}, \frac{2555}{54}, \frac{3059}{54}\right\} = \frac{1400}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 9) &= \min\{G(8 \cdot 9) + W(2 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(2 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(2 \cdot 6), \\ &\quad G(5 \cdot 9) + W(2 \cdot 5)\} \\ &= \min\left\{\frac{175}{54} + \frac{2009}{54}, \frac{644}{54} + \frac{1351}{54}, \frac{1323}{54} + \frac{840}{54}, \frac{2128}{54} + \frac{350}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{2184}{54}, \frac{1995}{54}, \frac{2163}{54}, \frac{2478}{54}\right\} = \frac{1995}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 10) &= \min\{G(9 \cdot 10) + W(2 \cdot 9), G(8 \cdot 10) + W(2 \cdot 8)\} \\ &= \min\left\{\frac{324}{54} + \frac{2835}{54}, \frac{856}{54} + \frac{2009}{54}\right\} = \min\left\{\frac{3159}{54}, \frac{2865}{54}\right\} = \frac{2865}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3 \cdot 11) &= \underbrace{G(10 \cdot 11) + W(2 \cdot 10)}_{\text{integral}} = \int_{10}^{11} \left(-\frac{17}{2}t + 107\right)(11-t)dt + W(2 \cdot 10) \\ &= \frac{115}{12} + \frac{4440}{54} = \frac{9915}{108} \end{aligned}$$

Step 4 $n = 4$

$$W(4 \cdot 4) = G(3 \cdot 4) + W(3 \cdot 3) = \frac{70}{54} + \frac{84}{54} = \frac{154}{54}$$

$$\begin{aligned} W(4 \cdot 5) &= \min\{G(4 \cdot 5) + W(3 \cdot 4), G(3 \cdot 5) + W(3 \cdot 3)\} \\ &= \min\left\{\frac{91}{54} + \frac{175}{54}, \frac{308}{54} + \frac{84}{54}\right\} = \min\left\{\frac{266}{54}, \frac{392}{54}\right\} = \frac{266}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4 \cdot 6) &= \min\{G(5 \cdot 6) + W(3 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(3 \cdot 4), G(3 \cdot 6) + W(3 \cdot 3)\} \\ &= \min\left\{\frac{112}{54} + \frac{350}{54}, \frac{392}{54} + \frac{175}{54}, \frac{756}{54} + \frac{84}{54}\right\} = \min\left\{\frac{462}{54}, \frac{567}{54}, \frac{840}{54}\right\} = \frac{462}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4 \cdot 7) &= \min\{G(6 \cdot 7) + W(3 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(3 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(3 \cdot 4), \\ &\quad G(3 \cdot 7) + W(3 \cdot 3)\} \\ &= \min\left\{\frac{133}{54} + \frac{609}{54}, \frac{476}{54} + \frac{350}{54}, \frac{945}{54} + \frac{175}{54}, \frac{1456}{54} + \frac{84}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{742}{54}, \frac{826}{54}, \frac{1120}{54}, \frac{1540}{54}\right\} = \frac{742}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4 \cdot 8) &= \min\{G(7 \cdot 8) + W(3 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(3 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(3 \cdot 5), \\ &\quad G(4 \cdot 8) + W(3 \cdot 4), G(3 \cdot 8) + W(3 \cdot 3)\} \\ &= \min\left\{\frac{154}{54} + \frac{973}{54}, \frac{560}{54} + \frac{609}{54}, \frac{1134}{54} + \frac{350}{54}, \frac{1792}{54} + \frac{175}{54}, \frac{2450}{54} + \frac{84}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{1127}{54}, \frac{1169}{54}, \frac{1484}{54}, \frac{1967}{54}, \frac{2534}{54}\right\} = \frac{1127}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4 \cdot 9) &= \min\{G(8 \cdot 9) + W(3 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(3 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(3 \cdot 6), \\ &\quad G(5 \cdot 9) + W(3 \cdot 5)\} \\ &= \min\left\{\frac{175}{54} + \frac{1400}{54}, \frac{644}{54} + \frac{973}{54}, \frac{1323}{54} + \frac{609}{54}, \frac{2128}{54} + \frac{350}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{1575}{54}, \frac{1617}{54}, \frac{1932}{54}, \frac{2478}{54}\right\} = \frac{1575}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4 \cdot 10) &= \min\{G(9 \cdot 10) + W(3 \cdot 9), G(8 \cdot 10) + W(3 \cdot 8)\} \\ &= \min\left\{\frac{324}{54} + \frac{1995}{54}, \frac{856}{54} + \frac{1400}{54}\right\} = \min\left\{\frac{2319}{54}, \frac{2256}{54}\right\} = \frac{2256}{54} \end{aligned}$$

$$W(4 \cdot 11) = G(10 \cdot 11) + W(3 \cdot 10) = \frac{115}{12} + \frac{2865}{54} = \frac{6765}{108}$$

$$W(4 \cdot 12) = G(11 \cdot 12) + W(3 \cdot 11) = \frac{64}{12} + \frac{9915}{108} = \frac{10491}{108}$$

$$\begin{aligned} W(4 \cdot 13) &= \underbrace{G(11 \cdot 13) + W(3 \cdot 11)} = \int_{11}^{12} \left(-\frac{17}{2}t + 107\right)(13 - t)dt + \int_{12}^{13} 5(13 - t)dt + W(3 \cdot 11) \\ &= \frac{175}{12} + \frac{30}{12} + \frac{9915}{108} = \frac{11760}{108} \end{aligned}$$

$$W(4 \cdot 14) = G(11 \cdot 14) + W(3 \cdot 11) = \frac{406}{12} + \frac{9915}{108} = \frac{13569}{108}$$

$$W(4 \cdot 15) = G(11 \cdot 15) + W(3 \cdot 11) = \frac{667}{12} + \frac{9915}{108} = \frac{15918}{108}$$

Step 5 $n = 5$

$$W(5 \cdot 5) = G(4 \cdot 5) + W(4 \cdot 4) = \frac{91}{54} + \frac{154}{54} = \frac{245}{54}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 6) &= \min\{G(5 \cdot 6) + W(4 \cdot 5), G(4 \cdot 6) + W(4 \cdot 4)\} \\ &= \min\left\{\frac{112}{54} + \frac{266}{54}, \frac{392}{54} + \frac{154}{54}\right\} = \min\left\{\frac{378}{54}, \frac{546}{54}\right\} = \frac{378}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 7) &= \min\{G(6 \cdot 7) + W(4 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(4 \cdot 5), G(4 \cdot 7) + W(4 \cdot 4)\} \\ &= \min\left\{\frac{133}{54} + \frac{462}{54}, \frac{476}{54} + \frac{266}{54}, \frac{945}{54} + \frac{154}{54}\right\} = \min\left\{\frac{595}{54}, \frac{742}{54}, \frac{1099}{54}\right\} = \frac{595}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 8) &= \min\{G(7 \cdot 8) + W(4 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(4 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(4 \cdot 5), \\ &\quad G(4 \cdot 8) + W(4 \cdot 4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \min\left\{\frac{154}{54} + \frac{742}{54}, \frac{560}{54} + \frac{462}{54}, \frac{1134}{54} + \frac{266}{54}, \frac{1792}{54} + \frac{154}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{896}{54}, \frac{1022}{54}, \frac{1400}{54}, \frac{1946}{54}\right\} = \frac{896}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 9) &= \min\{G(8 \cdot 9) + W(4 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(4 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(4 \cdot 6), \\ &\quad G(5 \cdot 9) + W(4 \cdot 5)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \min\left\{\frac{175}{54} + \frac{1127}{54}, \frac{644}{54} + \frac{742}{54}, \frac{1323}{54} + \frac{462}{54}, \frac{2128}{54} + \frac{266}{54}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{1302}{54}, \frac{1386}{54}, \frac{1785}{54}, \frac{2394}{54}\right\} = \frac{1302}{54} \end{aligned}$$

$$W(5 \cdot 10) = \min\{G(9 \cdot 10) + W(4 \cdot 9), G(8 \cdot 10) + W(4 \cdot 8)\}$$

$$= \min\left\{\frac{324}{54} + \frac{1575}{54}, \frac{856}{54} + \frac{1127}{54}\right\} = \min\left\{\frac{1899}{54}, \frac{1983}{54}\right\} = \frac{1899}{54}$$

$$W(5 \cdot 11) = G(10 \cdot 11) + W(4 \cdot 10) = \frac{115}{12} + \frac{2256}{54} = \frac{5547}{108}$$

$$W(5 \cdot 12) = G(11 \cdot 12) + W(4 \cdot 11) = \frac{64}{12} + \frac{6765}{108} = \frac{7341}{108}$$

$$W(5 \cdot 13) = \min\{G(12 \cdot 13) + W(4 \cdot 12), G(11 \cdot 13) + W(4 \cdot 11)\}$$

$$= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{10491}{108}, \frac{1845}{108} + \frac{6765}{108}\right\} = \min\left\{\frac{10761}{108}, \frac{8610}{108}\right\} = \frac{8610}{108}$$

$$W(5 \cdot 14) = \min\{G(13 \cdot 14) + W(4 \cdot 13), G(12 \cdot 14) + W(4 \cdot 12), G(11 \cdot 14) + W(4 \cdot 11)\}$$

$$= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{11760}{108}, \frac{120}{12} + \frac{10491}{108}, \frac{406}{12} + \frac{6765}{108}\right\} = \min\left\{\frac{12030}{108}, \frac{11571}{108}, \frac{10419}{108}\right\} = \frac{10419}{108}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 15) &= \min\{G(14 \cdot 15) + W(4 \cdot 14), G(13 \cdot 15) + W(4 \cdot 13), G(12 \cdot 15) + W(4 \cdot 12), \\ &\quad G(11 \cdot 15) + W(4 \cdot 11)\} \end{aligned}$$

$$= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{13569}{108}, \frac{120}{12} + \frac{11760}{108}, \frac{270}{12} + \frac{10491}{108}, \frac{667}{12} + \frac{6765}{108}\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{13839}{108}, \frac{12840}{108}, \frac{12921}{108}, \frac{12768}{108}\right\} = \frac{12768}{108}$$

$$\begin{aligned} W(5 \cdot 16) &= \min\{G(15 \cdot 16) + W(4 \cdot 15), G(14 \cdot 16) + W(4 \cdot 14), \underbrace{G(13 \cdot 16) + W(4 \cdot 13)}, \\ &\quad G(12 \cdot 16) + W(4 \cdot 12)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \min \left\{ \int_{15}^{16} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) (16-t) dt + W(4 \cdot 15), \int_{14}^{15} 5(16-t) dt + \int_{15}^{16} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) \right. \\
 &\quad (16-t) dt + W(4 \cdot 14), \int_{13}^{15} 5(16-t) dt + \int_{15}^{16} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) (16-t) dt \\
 &\quad \left. + W(4 \cdot 13), \int_{12}^{15} 5(16-t) dt + \int_{15}^{16} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) (16-t) dt + W(4 \cdot 12) \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{294}{108} + \frac{15918}{108}, \frac{294}{108} + \frac{810}{108} + \frac{13569}{108}, \frac{294}{108} + \frac{2160}{108} + \frac{11760}{108}, \frac{294}{108} + \frac{4050}{108} + \frac{10491}{108} \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{16212}{108}, \frac{14673}{108}, \frac{14214}{108}, \frac{14835}{108} \right\} = \frac{14214}{108}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(5 \cdot 17) &= \min \{ G(15 \cdot 17) + W(4 \cdot 15), G(14 \cdot 17) + W(4 \cdot 14), G(13 \cdot 17) + W(4 \cdot 13) \} \\
 &= \min \left\{ \int_{15}^{17} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) (17-t) dt + W(4 \cdot 15), \int_{14}^{15} 5(17-t) dt + \int_{15}^{17} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) \right. \\
 &\quad (17-t) dt + W(4 \cdot 14), \int_{13}^{15} 5(17-t) dt + \int_{15}^{17} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) (17-t) dt \\
 &\quad \left. + W(4 \cdot 13) \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{1272}{108} + \frac{15918}{108}, \frac{1272}{108} + \frac{1350}{108} + \frac{13569}{108}, \frac{1272}{108} + \frac{3240}{108} + \frac{11760}{108} \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{17190}{108}, \frac{16191}{108}, \frac{16272}{108} \right\} = \frac{16191}{108}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(5 \cdot 18) &= G(15 \cdot 18) + W(4 \cdot 15) = \int_{15}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15 \right) (18-t) dt + W(4 \cdot 15) \\
 &= \frac{3078}{108} + \frac{15918}{108} = \frac{18996}{108}
 \end{aligned}$$

Step 6 $n = 6$

$$W(6 \cdot 6) = G(5 \cdot 6) + W(5 \cdot 5) = \frac{112}{54} + \frac{245}{54} = \frac{357}{54}$$

$$\begin{aligned}
 W(6 \cdot 7) &= \min \{ G(6 \cdot 7) + W(5 \cdot 6), G(5 \cdot 7) + W(5 \cdot 5) \} \\
 &= \min \left\{ \frac{133}{54} + \frac{378}{54}, \frac{476}{54} + \frac{245}{54} \right\} = \min \left\{ \frac{511}{54}, \frac{721}{54} \right\} = \frac{511}{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(6 \cdot 8) &= \min \{ G(7 \cdot 8) + W(5 \cdot 7), G(6 \cdot 8) + W(5 \cdot 6), G(5 \cdot 8) + W(5 \cdot 5) \} \\
 &= \min \left\{ \frac{154}{54} + \frac{594}{54}, \frac{560}{54} + \frac{378}{54}, \frac{1134}{54} + \frac{245}{54} \right\} = \min \left\{ \frac{748}{54}, \frac{938}{54}, \frac{1379}{54} \right\} = \frac{748}{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(6 \cdot 9) &= \min \{ G(8 \cdot 9) + W(5 \cdot 8), G(7 \cdot 9) + W(5 \cdot 7), G(6 \cdot 9) + W(5 \cdot 6), \\
 &\quad G(5 \cdot 9) + W(5 \cdot 5) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \min \left\{ \frac{175}{54} + \frac{896}{54}, \frac{644}{54} + \frac{595}{54}, \frac{1323}{54} + \frac{378}{54}, \frac{2128}{54} + \frac{245}{54} \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{1071}{54}, \frac{1239}{54}, \frac{1701}{54}, \frac{2373}{54} \right\} = \frac{1071}{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(6 \cdot 10) &= \min \{ G(9 \cdot 10) + W(5 \cdot 9), G(8 \cdot 10) + W(5 \cdot 8) \} \\
 &= \min \left\{ \frac{324}{54} + \frac{1302}{54}, \frac{856}{54} + \frac{896}{54} \right\} = \min \left\{ \frac{1626}{54}, \frac{1752}{54} \right\} = \frac{1626}{54}
 \end{aligned}$$

$$W(6 \cdot 11) = G(10 \cdot 11) + W(5 \cdot 10) = \frac{115}{12} + \frac{1899}{54} = \frac{4833}{108}$$

$$W(6 \cdot 12) = G(11 \cdot 12) + W(5 \cdot 11) = \frac{64}{12} + \frac{5547}{108} = \frac{6123}{108}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 13) &= \min\{G(12 \cdot 13) + W(5 \cdot 12), G(11 \cdot 13) + W(5 \cdot 11)\} \\ &= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{7341}{108}, \frac{1845}{108} + \frac{5547}{108}\right\} = \min\left\{\frac{7611}{108}, \frac{7392}{108}\right\} = \frac{7392}{108} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 14) &= \min\{G(13 \cdot 14) + W(5 \cdot 13), G(12 \cdot 14) + W(5 \cdot 12), G(11 \cdot 14) + W(5 \cdot 11)\} \\ &= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{8610}{108}, \frac{120}{12} + \frac{7341}{108}, \frac{406}{12} + \frac{5547}{108}\right\} = \min\left\{\frac{8880}{108}, \frac{8421}{108}, \frac{9201}{108}\right\} = \frac{8421}{108} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 15) &= \min\{G(14 \cdot 15) + W(5 \cdot 14), G(13 \cdot 15) + W(5 \cdot 13), G(12 \cdot 15) + W(5 \cdot 12), \\ &\quad G(11 \cdot 15) + W(5 \cdot 11)\} \\ &= \min\left\{\frac{30}{12} + \frac{10419}{108}, \frac{120}{12} + \frac{8610}{108}, \frac{270}{12} + \frac{7341}{108}, \frac{667}{12} + \frac{5547}{108}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{10689}{108}, \frac{9690}{108}, \frac{9771}{108}, \frac{11550}{108}\right\} = \frac{9690}{108} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 16) &= \min\{G(15 \cdot 16) + W(5 \cdot 15), G(14 \cdot 16) + W(5 \cdot 14), G(13 \cdot 16) + W(5 \cdot 13), \\ &\quad G(12 \cdot 16) + W(5 \cdot 12)\} \\ &= \min\left\{\frac{294}{108} + \frac{12768}{108}, \frac{1104}{108} + \frac{10419}{108}, \frac{2454}{108} + \frac{8610}{108}, \frac{4344}{108} + \frac{7341}{108}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{13062}{108}, \frac{11523}{108}, \frac{11064}{108}, \frac{11685}{108}\right\} = \frac{11064}{108} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 17) &= \min\{G(16 \cdot 17) + W(5 \cdot 16), G(15 \cdot 17) + W(5 \cdot 15), G(14 \cdot 17) + W(5 \cdot 14), \\ &\quad G(13 \cdot 17) + W(5 \cdot 13)\} \\ &= \min\left\{\int_{16}^{17} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(17-t)dt + W(5 \cdot 16), \int_{15}^{17} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(17-t)dt \right. \\ &\quad \left. + W(5 \cdot 15), \int_{14}^{15} 5(17-t)dt + \int_{15}^{17} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(17-t)dt + W(5 \cdot 14), \right. \\ &\quad \left. \int_{13}^{15} 5(17-t)dt + \int_{15}^{17} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(17-t)dt + W(5 \cdot 13)\right\} \\ &= \min\left\{\frac{366}{108} + \frac{14214}{108}, \frac{1272}{108} + \frac{12768}{108}, \frac{1272}{108} + \frac{1350}{108} + \frac{10419}{108}, \frac{1272}{108} + \frac{3240}{108} + \frac{8610}{108}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{14580}{108}, \frac{14040}{108}, \frac{13041}{108}, \frac{13122}{108}\right\} = \frac{13041}{108} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(6 \cdot 18) &= \min\{G(17 \cdot 18) + W(5 \cdot 17), G(16 \cdot 18) + W(5 \cdot 16), G(15 \cdot 18) + W(5 \cdot 15)\} \\ &= \min\left\{\int_{17}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(18-t)dt + W(5 \cdot 17), \int_{16}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(18-t)dt \right. \\ &\quad \left. + W(5 \cdot 16), \int_{15}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(18-t)dt + W(5 \cdot 15)\right\} \\ &= \min\left\{\frac{438}{108} + \frac{16191}{108}, \frac{1560}{108} + \frac{14214}{108}, \frac{3078}{108} + \frac{12768}{108}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{16629}{108}, \frac{15774}{108}, \frac{15846}{108}\right\} = \frac{15774}{108} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(6 \cdot 19) &= \min\{G(18 \cdot 19) + W(5 \cdot 18), \quad G(17 \cdot 19) + W(5 \cdot 17), \quad \underline{G(16 \cdot 19) + W(5 \cdot 16)}\} \\
 &= \min\left\{\int_{18}^{19} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(19-t)dt + W(5 \cdot 18), \right. \\
 &\quad \int_{17}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(19-t)dt + \int_{18}^{19} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(19-t)dt + W(5 \cdot 17), \\
 &\quad \left. \int_{16}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(19-t)dt + \int_{18}^{19} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(19-t)dt + W(5 \cdot 16)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{456}{108} + \frac{18996}{108}, \quad \frac{456}{108} + \frac{1338}{108} + \frac{16191}{108}, \quad \frac{456}{108} + \frac{3216}{108} + \frac{14214}{108}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{19452}{108}, \quad \frac{17985}{108}, \quad \frac{17886}{108}\right\} = \frac{17886}{108} \\
 W(6 \cdot 20) &= \min\{G(18 \cdot 20) + W(5 \cdot 18), \quad G(17 \cdot 20) + W(5 \cdot 17)\} \\
 &= \min\left\{\int_{18}^{20} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(20-t)dt + W(5 \cdot 18), \right. \\
 &\quad \left. \int_{17}^{18} \left(\frac{4}{3}t - 15\right)(20-t)dt + \int_{18}^{20} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(20-t)dt + W(5 \cdot 17)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{1704}{108} + \frac{18996}{108}, \quad \frac{1704}{108} + \frac{2238}{108} + \frac{16191}{108}\right\} = \min\left\{\frac{20700}{108}, \quad \frac{20133}{108}\right\} = \frac{20133}{108} \\
 W(6 \cdot 21) &= G(18 \cdot 21) + W(5 \cdot 18) = \int_{18}^{21} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(21-t)dt + W(5 \cdot 18) \\
 &= \frac{3564}{108} + \frac{18996}{108} = \frac{22560}{108}
 \end{aligned}$$

Step 7 $n = 7$

$$\begin{aligned}
 W(7 \cdot 21) &= \min\{G(20 \cdot 21) + W(6 \cdot 20), \quad \underline{G(19 \cdot 21) + W(6 \cdot 19)}, \quad G(18 \cdot 21) + W(6 \cdot 18)\} \\
 &= \min\left\{\int_{20}^{21} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(21-t)dt + W(6 \cdot 20), \quad \int_{19}^{21} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(21-t)dt \right. \\
 &\quad \left. + W(6 \cdot 19), \quad \int_{18}^{21} \left(-\frac{5}{3}t + 39\right)(21-t)dt + W(6 \cdot 18)\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{276}{108} + \frac{20133}{108}, \quad \frac{1344}{108} + \frac{17886}{108}, \quad \frac{3564}{108} + \frac{15774}{108}\right\} \\
 &= \min\left\{\frac{20409}{108}, \quad \frac{19230}{108}, \quad \frac{19338}{108}\right\} = \frac{19230}{108}
 \end{aligned}$$

以上で計算は終了したので待時間を最小とするバス発車時刻はつぎのとおりである。

$G(19 \cdot 21)$	$G(16 \cdot 19)$	$G(13 \cdot 16)$	$G(11 \cdot 13)$	$G(10 \cdot 11)$	$G(8 \cdot 10)$	$G(0 \cdot 8)$
8:55	8:45	8:30	8:15	8:05	8:00	7:50

上記第2案について乗客到着人数の時刻分布を変えないで改正した発車時刻毎の乗車人員とその待時間およびその集計を示したのが図-20である。現行の待時間合計832分に対して859分となるので27分増加する。

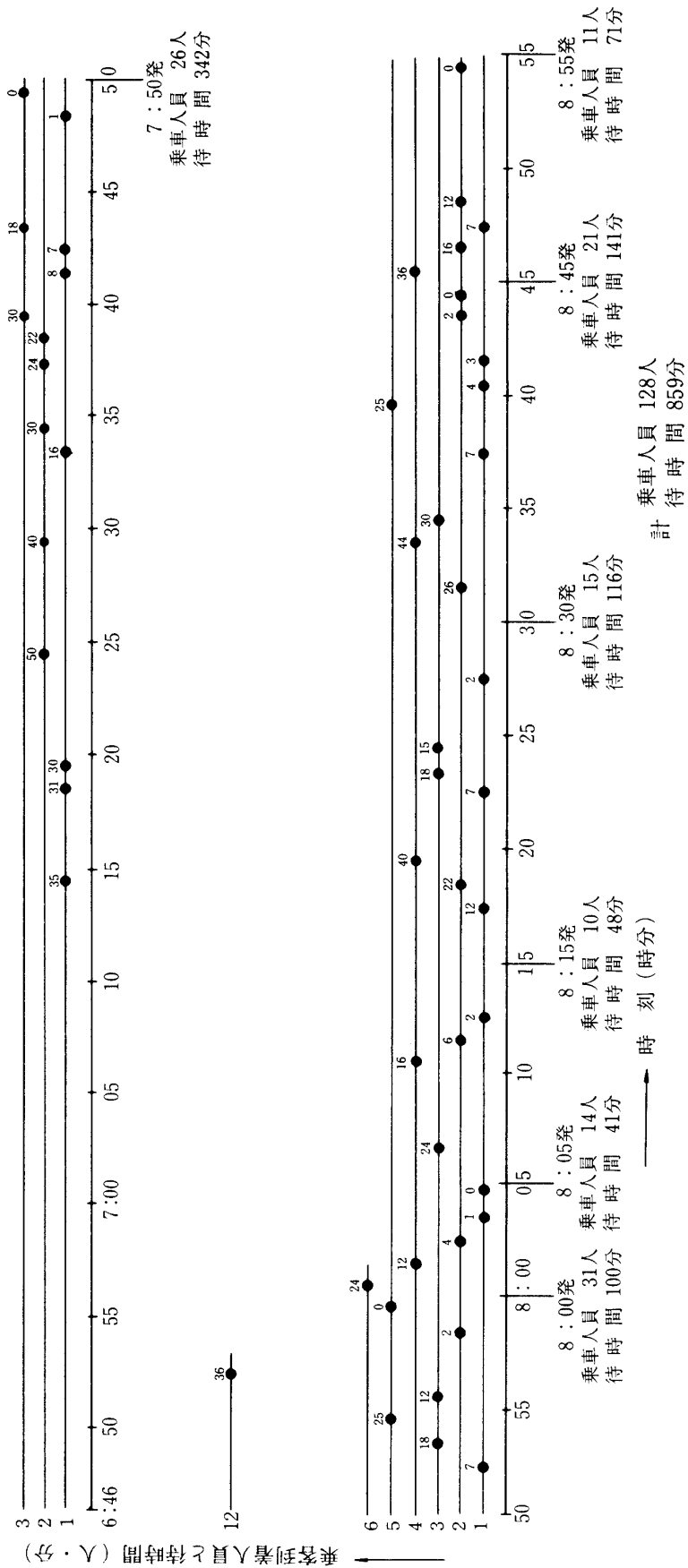


図-20 第2案の乗客到着人員と待時間

5 ま と め

本研究の計算結果を表－2に示す。表－2によると現行発車時刻による乗客総待時間832分に対して第1案(A)の計算では待時間は最小となり754分である。差引すると78分小さくなるが乗客人数128人を対象としているから減少は僅かである。これについては朝のラッシュ時間における

表－2 発車時刻と待時間

現 行			第 1 案						第 2 案		
			(A)			(B)					
発時刻	乗車人員 (人)	待時間 (分)	発時刻	乗車人員 (人)	待時間 (分)	発時刻	乗車人員 (人)	待時間 (分)	発時刻	乗車人員 (人)	待時間 (分)
7：27	5	31	7：35	10	82	7：35	10	82	7：50	26	342
44	17	93	50	16	110	50	16	110	8：00	31	100
59	30	111	8：00	31	100	8：00	31	100	05	14	41
8：06	19	85	05	14	41	05	14	41	15	10	48
22	17	136	20	17	102	20	17	102	30	15	116
39	18	161	40	23	179	35	17	92	45	21	141
55	22	215	55	17	140	55	23	232	55	11	71
計	128	832	計	128	754	計	128	759	計	128	859

調査・研究であるため、バス利用者は通勤・通学者が圧倒的に多く予めバス発車時刻を知っているためと思われる。そしてまた他の交通機関である国鉄・私鉄線より下車して乗継ぐ利用者のためにバス発車時刻を組むことは容易であることから現行バス発車時刻にこのことがうかがえる。しかるになおかつ待時間78分の減少をきたしたのであるから発車時刻を改正することにより実際にはさらに減少することも予想される。福井駅前の各バスのりばにおいてバスの同時発車を行うとバスの回転運用を著しくわるくして配車台数を多くする。そこでバスの回転運用を高めるために各路線系統の所要時間とバス運転手のハンドル時間とを考慮しながら運行ダイヤを作成しているから発車時刻にはすべて時間のずれをもたせて発車させている。しかしながらこの運行ダイヤには乗客待時間についての考慮はされていない。バス経営者にとっては営業収入の増大を計るとともにバスの回転運用を高めて経費の節減につとめ会社経営の安定を計ることは当然ではあるが、逐次本研究の手法を用いて乗客待時間を最小となるようなバス発車時刻の改正をなしバス利用者へのサービス水準の向上を計ることが望まれる。

謝 辞

終りに本研究につきましては、終始懇切な御指導を給われました金沢大学工学部建設工学教室 工博 飯田恭敬教授に対して深甚なる謝意を表します。

参 考 文 献

鍋島一郎：動的計画法 森北出版株式会社