

# 積 雪 深 の 極 値 分 布

前 田 博 司

## Extreme Value Distribution of Snowcover Depth

Hiroshi MAEDA

It is essential to snow-disaster prevention to predict the long-term trend of extreme snow-cover depth.

This study is aimed to investigate the statistical distribution of the annual maximum series of snowcover depth for the purpose of reasonable prediction. The distribution is discussed by means of the theory of extremes developed by E. J. Gumbel. And then the logarithmic normal distribution is also considered.

The predicted values of snowcover depth based upon the logarithmic normal distribution show good agreement with those based upon Gumbel's extreme value distribution.

### 1. はじめに

多雪地方においては、将来の一定期間内に起りうる最大積雪深の値を適確に予測することが、積雪災害の防災対策を計画する上で、きわめて重要な問題である。筆者らは、主として建築物の設計用雪荷重の適正化の面から、この問題について調査を行ない、その結果の一部を既に報告した<sup>1)~3)</sup>。本論は、それらの調査において資料処理手法の基盤をなした統計理論、特に最大積雪深の確率分布について、より詳細な検討を加えたものである。

従来、筆者らは、わが国の多雪地における年最大積雪深の確率分布が、対数正規分布で近似できることを利用し、それに基づいて再現期待値を求めた。これは、対数正規分布が変量を対数変換によって正規化したもので、その数学的取扱いが容易であることや、防災計画などにおいて、諸量が正規分布でモデル化されることが多いため、それらとの対応上、便利であるなどの理由によるものである。しかしながら、年最大積雪深の観測値は極値資料であって、厳密には、極値極限分布に従がうと考えるべきである。

ここでは、福井・敦賀・大野（いずれも福井県）の3地点の観測値について、極値分布としての性状を検討するとともに、対数正規分布による近似の妥当性を議論している。

その結果、これらの地点において、年最大積雪深の確率分布は、対数正規分布と考えることが適当であることが明らかとなった。

## 2. 観測値の分布

### (1) 観測資料

標本として用いた観測資料は、福井地方気象台、敦賀測候所、および大野気象観測所における午前9時の観測による積雪深の、1寒候期の最大値であり、各地点の統計期間は表1に示すとおりである。

なお、大野における欠測は、福井および敦賀での同年の値を検討した結果、いずれも単純欠測と考えられ、著しい有意性も認められないので、推定値の挿入などの補正は行なわないこととした。

### (2) 統計値

地点ごとに観測値の順序統計量を作成し、 $i$ 番目の大きさの値を $x_i$ とする。平均値 $\bar{x}$ および標準偏差 $S_x$ は、それぞれ次式で定義される。

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i \quad (1)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

$x_i$ の順位頻度（非超過確率） $\Phi_i$ を、Thomas Plotによって、次のように表わす。

$$\Phi_i = \frac{N+1-i}{N+1} \quad (3)$$

極値統計のために、次式で与えられる変量 $y_i$ を考える。 $y_i$ は標本の大きさ $N$ のみによる変量である。

$$y_i = -\ln\{-\ln(\Phi_i)\} \quad (4)$$

$y_i$ の平均値 $\bar{y}$ および標準偏差 $S_y$ は、それぞれ次式で定義される。

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i \quad (5)$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (6)$$

これらの統計値を表1に示す。

### (3) 分布性状

図1は、各地点の観測値を式(3)によって、極値確率紙にプロットしたものである。いずれも、観測値はほぼ直線的に分布しているので、極値理論の第1漸近分布が適用できることがわかる。

表1 年最大積雪深の統計値

	福 井	敦 賀	大 野
統計期間 自 至	1897 ~1979	1939 ~1979	1912 ~1979
欠測数	0	0	注) 4
$N$	82	41	64
$\bar{x}(\text{cm})$	70.82	64.27	124.77
$S_x(\text{cm})$	43.82	36.16	64.16
$\bar{y}$	0.5573	0.5442	0.5532
$S_y$	1.1953	1.1436	1.1793
$C'_s(x)$	1.3502	0.7423	1.0946
$C'_s(y)$	0.8243	0.7184	0.7887

注) 1914年, 1939年, 1944年, 1945年

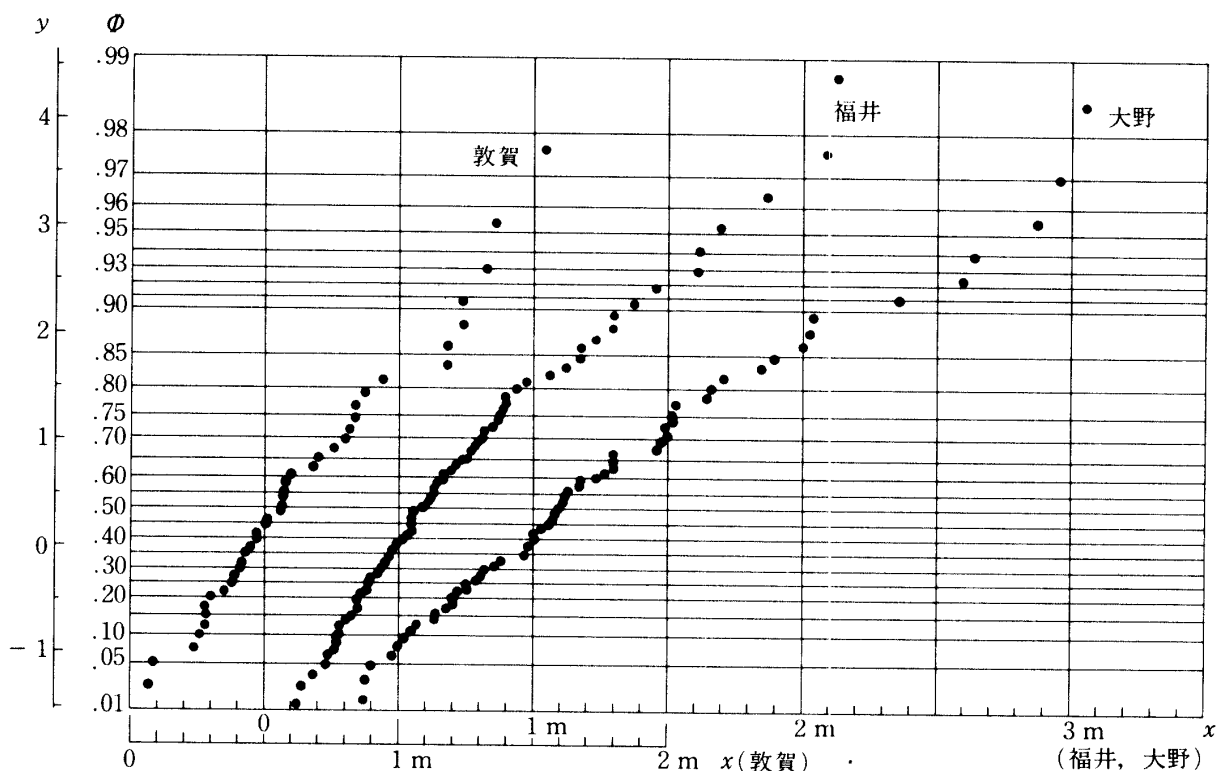


図1 極値確率紙上の観測値の分布

しかし、福井や大野では、極最大値（極値の最大値）付近を除けば、曲線状に弧を描くように分布し、第2漸近分布の傾向を示している。

このような観測値の分布性状を検討するために、次のようなひずみ係数  $C_s$  を考える。

$$C_s = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} \quad (7)$$

ここに、 $m_2$ 、 $m_3$  はそれぞれ平均値の回りの2次および3次のモーメントである。

標本分布については、 $\sqrt{m_2}$  は標準偏差  $S_x$  であるから、標本ひずみ係数  $C'_s(x)$  は、

$$C'_s(x) = \frac{\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 \cdot \bar{x} + 2\bar{x}^3}{S_x^3} \quad (8)$$

となる。

極値（最大値）分布の第1極限形式は、母関数が、

$$G(t) = \Gamma(1-t) \quad (9)$$

であるので、2次および3次のモーメントは、それぞれ次のようになる。

$$m_2 = (1!)S_2, \quad m_3 = (2!)S_3 \quad (10)$$

ただし、

$$S_\nu = \sum_{\lambda=2}^{\infty} \lambda^{-\nu} \quad (\nu = 1, 2) \quad (11)$$

したがって、母ひずみ係数  $C_s$  は、

$$C_s = \frac{2S_3}{S_2^{3/2}} \div 1.139548 \quad (12)$$

であり、ひずみ係数がこれより大きい値の場合は、第2極限形式で表わされることが知られている<sup>4)</sup>。

しかし、これは極限の場合の値であって、標本ひずみ係数  $C'_s(x)$  は、一般に、 $C_s$  より小さい値を示し、 $N \rightarrow \infty$  で  $C'_s(x) \rightarrow C_s$  となる。そこで、式(4)の  $y_i$  を用いて、

$$C'_3(y) = \frac{\bar{y}^3 - 3\bar{y}^2 \cdot \bar{y} + 2\bar{y}^3}{S_y^3} \quad (13)$$

の値を求め、 $C'_s(x)$  の値をこれと比較する（表1参照）。

その結果、敦賀では第1漸近分布とみなすことが適当であるが、福井や大野では第2漸近分布と考えるべきであることがわかる。

### 3. 極値統計解析

#### (1) 第1漸近分布

Gumbel<sup>5)</sup>によれば、極値（最大値）分布の第1極限形式は次式で表わされる。

$$F(x) = \exp(-e^{-y}) \quad (14)$$

ここに、 $y$  は変量  $x$  の線形変換変量（規準化変量）で、

$$y = a(x - u) \quad (15)$$

であり、ここに含まれる定数  $a$ 、 $u$  は、次のような関係をもつ極値パラメーターである。

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{\sigma_x \sqrt{6}}, \quad u = \mu_x - \frac{\gamma}{a}$$

ただし、 $\mu_x$ 、 $\sigma_x$  はそれぞれ  $x$  の母平均および母標準偏差であり、

$\gamma$  は Euler の定数 ( $\gamma = 0.5772 \dots$ ) である。

標本の大きさ  $N$  が十分大きいときは、 $\mu_x$ 、 $\sigma_x$  をそれぞれ  $\bar{x}$ 、 $S_x$  でおきかえることができるが、一般には次の推定量  $\hat{a}$ 、 $\hat{u}$  を用いる。

$$\frac{1}{\hat{a}} = \frac{S_y}{S_x}, \quad \hat{u} = \bar{x} - \frac{\bar{y}}{\hat{a}} \quad (17)$$

各地点の観測値から推定された極値パラメーターの値を表2に示す。また、この漸近直線を

表2 極値パラメーターの推定値

		福 井	敦 賀	大 野
第1漸近分布	$1/a$	36.7	31.6	54.4
	$u$	50.4	47.1	94.7
第2漸近分布	$v$	48.8	46.6	92.9
	$\epsilon$	-93.7	-816	-272
	$1/k$	0.202	0.036	0.130
第2漸近分布 (別解)	$v$	50.5		95.1
	$\epsilon$	-238		-612
	$1/k$	0.102		0.065

積雪深の極値分布

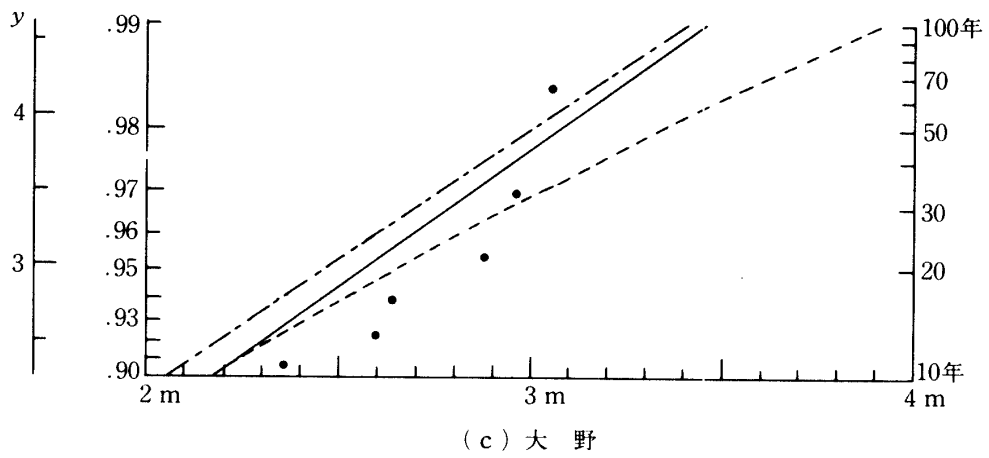
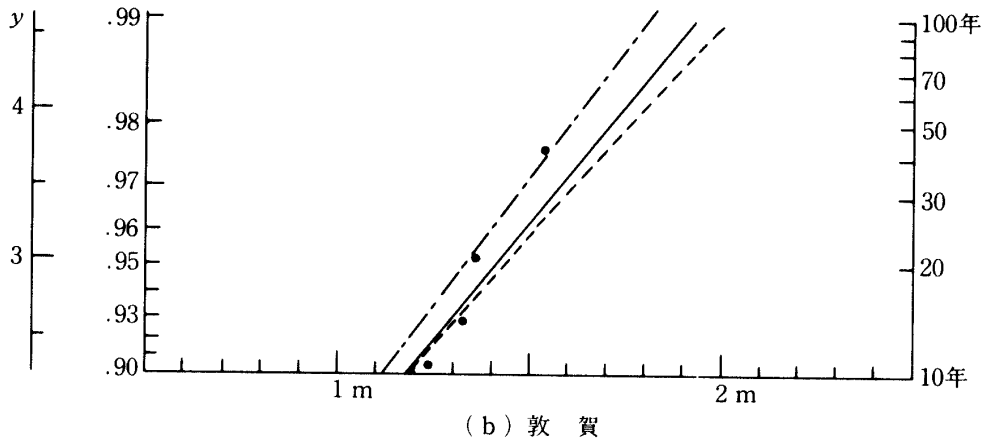
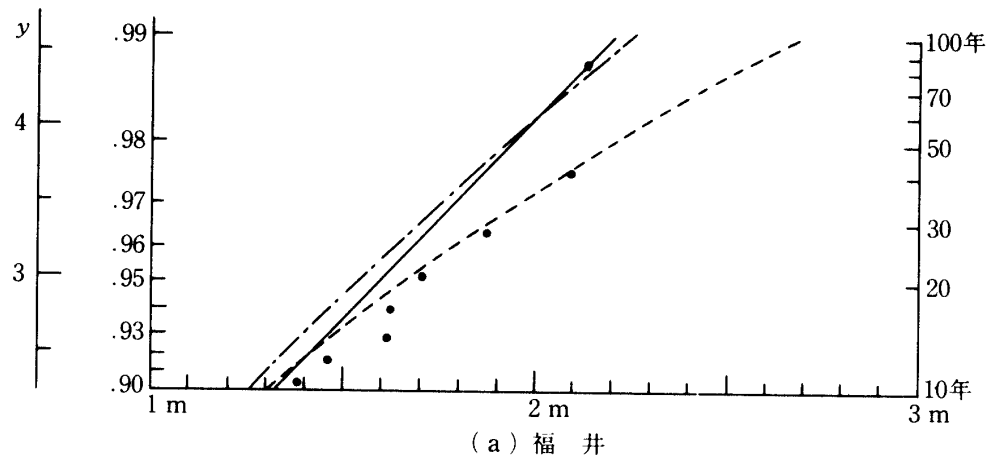


図2 漸近線の比較

図2(a)~(c)に実線で示す。

## (2) 第2漸近分布

極値(最大値)分布の第2極限形式は、次式で表わされる。

$$F(x) = \exp \left[ - \left( \frac{v - \varepsilon}{x - \varepsilon} \right)^k \right] \quad (18)$$

これは、変換変量を、

$$z = -k \cdot \ln \left( \frac{v - \varepsilon}{x - \varepsilon} \right) \quad (19)$$

とおくことによって、式(14)と同様に表現できる。

この形式は、パラメーターが3つになるので、解法は容易でない。そこで、観測値から定数(極値パラメーター)  $v$ ,  $\varepsilon$ ,  $k$ を推定するために、Denis・Ozakiの方法<sup>6)</sup>を用い、次のようなプロット位置の分散を考える。

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum (z_i - y_i)^2 \quad (20)$$

ここに、 $z_i$ は式(19)に観測値  $x_i$ を代入して得られる値であり、 $y_i$ は式(4)で得られる値である。

この分散  $\sigma_N^2$ を最小にする  $v$ ,  $\varepsilon$ ,  $k$ が求める値であり、次の関係が成立する。

$$\frac{\partial \sigma_N^2}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_N^2}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_N^2}{\partial k} = 0 \quad (21)$$

式(21)から次式を得ることにより、 $k$ が  $v$  および  $\varepsilon$  によって決定される。

$$k = - \frac{\sum y_i \cdot \ln \left( \frac{v - \varepsilon}{x_i - \varepsilon} \right)}{\sum \left\{ \ln \left( \frac{v - \varepsilon}{x_i - \varepsilon} \right) \right\}^2} \quad (22)$$

これを用いて、 $\sigma_N^2$ を最小にする  $v$ ,  $\varepsilon$ の値を求めれば、極値パラメーター  $v$ ,  $\varepsilon$ ,  $k$ が推定できる。

その手順は次のとおりである。

まず、 $v$ と  $\varepsilon$ に適当な値を仮定して、それに対応する  $k$ を式(22)から求め、それらを式(19)の関係に代入することによって  $x_i$ に対応する  $z_i$ を得る。これと式(4)による  $y_i$ から、 $\sigma_N^2$ の値が計算できる。次に、 $v$ ,  $\varepsilon$ の仮定値を変化させて、同様の計算をくりかえし、 $\sigma_N^2$ の最小値を与える  $v$ ,  $\varepsilon$ ,  $k$ の推定値  $\hat{v}$ ,  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{k}$ を近似的に求めるのである。

この方法によって推定された極値パラメーターの値を表2に示し、この漸近曲線を図2(a)~(c)に破線で示す。

## (3) 第2漸近分布の別解

図2(a)~(c)で明らかなように、第2漸近分布を適用すれば、超過確率の小さい箇所( $\Phi_i < 0.9$ )ではよく適合している。しかし、極最大値付近では、逆に適合が悪く、再現期待値は実現値を大きく上回る傾向にある。このことは、統計期間より長い再現期間を問題にするような場合には、好ましくない。

このような問題については、プロット位置を修正する方法<sup>7)</sup>による解決も可能と考えられるが、ここでは、次のような方法でパラメーターを推定することを試みた。すなわち、母ひずみ係数  $C_s$  が  $1/k$  のみの関数で表わされることに着目し、 $v$ 、 $\varepsilon$  も  $1/k$  の関数で表わして、標本ひずみ係数  $C'_s(x)$  と  $C_s$  あるいは  $1/k$  との関係を得ることによって、第2漸近分布のパラメーターを推定しようとするものである。

第2極限形式の母関数は、式(19)の対数変換によって、式(9)と同様に表現できるので、 $(v - \varepsilon)$  のまわりの  $n$  次のモーメント  $m_n$  は、

$$m_n = (v - \varepsilon)^n \Gamma(1 - n/k) \quad (23)$$

で、 $k > n$  なる限りモーメントは存在する。したがって、母平均  $\mu_x$ 、母分散  $\sigma_x^2$ 、母ひずみ係数  $C_s$  は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= (v - \varepsilon) \Gamma(1 - 1/k) + \varepsilon \\ \sigma_x^2 &= (v - \varepsilon)^2 [\Gamma(1 - 2/k) - \Gamma^2(1 - 1/k)] \\ C_s &= \frac{\Gamma(1 - 3/k) - 3\Gamma(1 - 2/k)\Gamma(1 - 1/k) + 2\Gamma^3(1 - 1/k)}{[\Gamma(1 - 2/k) - \Gamma^2(1 - 1/k)]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \mu_x - \frac{\Gamma(1 - 1/k)}{[\Gamma(1 - 2/k) - \Gamma^2(1 - 1/k)]^{1/2}} \cdot \sigma_x \\ v &= \mu_x - \frac{\Gamma(1 - 1/k) - 1}{[\Gamma(1 - 2/k) - \Gamma^2(1 - 1/k)]^{1/2}} \cdot \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

の関係を得る。これを、

$$\varepsilon = \mu_x - A \cdot \sigma_x, \quad v = \mu_x - B \cdot \sigma_x \quad (26)$$

とおけば、 $A$ 、 $B$  は  $1/k$  のみの関数で、 $\varepsilon$  および  $v$  は  $\mu_x$ 、 $\sigma_x$  の推定量と  $1/k$  によって推定できる。

母平均  $\mu_x$  の最尤推定量は標本平均  $\bar{x}$  であるので、

$$\hat{\mu}_x = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i \quad (27)$$

また、母分散  $\sigma_x^2$  の最尤推定量は不偏分散  $V_x$  であり、

$$\hat{\sigma}_x^2 = V_x = \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad (28)$$

であるので、Bessel の補正係数を用いて、

$$\hat{\sigma}_x = S_x \sqrt{\frac{N}{N-1}} \quad (29)$$

とする。

$1/k$  の推定は、 $C'_s(x)$  から  $C_s$  を推定し、式(24)の第3式によって求める方法<sup>4)</sup>も考えられるが、数学的に難解であるので、ここでは、 $1/k$  に仮定値を代入し、これを変化させて式(20)の  $\sigma_N^2$  を最小にする値を近似的に求める方法を採用した。

この方法によって推定された極値パラメーターの値を表2に示し、この漸近曲線を図2(a)に鎖線で示す。

これによれば、 $\sigma_x^2$ の値はやや大きくなるが、極最大値付近での適合は良好であることがわかる。したがって、福井や大野では、この方法による第2漸近分布の適用が適当であると考えられる。

#### 4. 対数正規分布による近似

##### (1) 対数正規分布

極値資料の確率分布に対数正規分布が適用できる例が多いことは、経験的によく知られているところである。これは、対数正規分布が下限値をもつひずんだ分布であるからである。したがって、この分布の極値資料への適用は、理論的な背景は十分ではないが、取扱かいの簡便さと良好な適合性から、実用的な近似法として有効であると考えられる。

対数正規分布の確率分布密度関数は、次のように表わされる。

$$f(x) = \frac{7}{x\sqrt{2\pi}\cdot\zeta} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] \quad (30)$$

ここに、 $x$ の母平均を $\mu_x$ 、母分散を $\sigma_x^2$ とすれば、定数 $\lambda$ 、 $\zeta$ は、

$$\lambda = \ln\mu_x - \frac{\zeta^2}{2}, \quad \zeta^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2}\right) \quad (31)$$

の関係にあり、それぞれ $\ln x$ の母平均および母分散である。

$\lambda$ 、 $\zeta$ は、観測値の統計量から $\mu_x$ 、 $\sigma_x$ を推定し、式(31)によって求められる。 $\mu_x$ 、 $\sigma_x$ の推定量 $\hat{\mu}_x$ 、 $\hat{\sigma}_x$ は、式(27)および式(28)または式(29)で与えられる。

このようにして推定されたパラメーターの値による分布則の適合度は、 $\chi^2$ 分布によって検討した結果、有意水準5%と

して、いずれも仮定は棄却

されない。したがって、各 表3 再現期待値の比較

地点の年最大積雪深の観測値は、対数正規分布と考えるてもよいことになる。

##### (2) 再現期待値

再現期間 $T$ の期待値 $X_T$ は、 $X_T$ の過超確率を $W(X_T)$ とすれば、次の関係から求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= W(X_T) = \\ &= \int_{X_T}^{\infty} f(x) dx \quad (32) \end{aligned}$$

表3は、極値分布から得られた再現期待値と、対数正規分布を仮定して得られ

再現期間 (年)	福 井	敦 賀	大 野
	E.V.D. : L.N.D.	E.V.D. : L.N.D.	E.V.D. : L.N.D.
10	126 : 125	118 : 110	206 : 207
20	153 : 154	141 : 134	246 : 247
30	170 : 172	154 : 148	269 : 271
40	182 : 185	163 : 158	286 : 288
50	192 : 195	170 : 166	299 : 302
60	200 : 203	176 : 173	310 : 313
70	207 : 211	181 : 178	319 : 322
80	214 : 217	185 : 183	328 : 331
90	219 : 223	189 : 188	335 : 338
100	224 : 228	193 : 192	341 : 345

注) E.V.D.……極値分布, L.N.D.……対数正規分布



た再現期待値を比較したものである。ただし、極値分布については、福井および大野は第2漸近分布(別解による)、敦賀では第1漸近分布を適用している。

これによって明らかなように、いずれの地点においても両者の値はほとんど一致し、積雪深に関しては、対数正規分布が極値分布の良い近似であることがわかった。

また、筆者らの試算によって、ここで検討した3地点ばかりでなく、北海道から本州の日本海側にかけてのわが国の多雪地帯におけるほとんどの地点で、年最大積雪深の観測値の分布は、対数正規分布による近似で良い適合性が得られることが明らかとなっている。

## 5. む す び

最大積雪深の確率分布は、概略的には極値理論の第1漸近分布が適用できるが、地点によっては、厳密には第2漸近分布を考えるべきである。いずれの分布形式をとるかの判断は、ひずみ係数によって検討されなければならない。また、統計期間より長い再現期間を問題にする場合には、第2漸近分布の極値パラメーターの推定は慎重な検討が必要である。

これに対して、本論では、対数正規分布が良い近似性を示すことを述べた。

特に、第1漸近分布と第2漸近分布のいずれに対しても同一の表現で、しかも極最大値付近での適合も良好であることは注目される。したがって、防災計画などにおいて、実用的には最積雪深の確率分布は対数正規分布に従がうと考えることが適当である。

こうすることによって、ひずみ係数の検討をはじめ、極値統計(特に第2漸近分布)の数学的なわずらわしさを避けることができると同時に、総合的な防災計画などのように、諸量が正規分布でモデル化される場合にも容易に対応できるという利点も付加されるので、さらに意義があると考えられる。

## 参 考 文 献

- 1) 前田博司：福井県各地における最大積雪深の期待値。日本建築学会北陸支部研究報告集No. 19(1977・2)
- 2) 前田博司：北陸地方における雪荷重の統計資料。日本建築学会北陸支部研究報告集No. 22(1979・6)
- 3) 前田博司・辰巳愁侍：雪荷重基準値の地域差について。日本建築学会昭和53年度大会学術講演梗概集(1978・9)
- 4) 岩井重久・石黒政儀：応用水文統計学。森北出版、東京(1970)
- 5) Gumbel, E. J. : Statistics of Extremes. Columbia Univ. Press (1958)  
河田竜夫 他(訳)：極値統計学。広川書店、東京(1962)
- 6) Denis, M. S. and Ozaki, M.: Application of the Prediction of Extreme Values. 日本建築学会論文報告集No. 228 (1975・2)
- 7) 鈴木栄一：環境統計学。地人書館、東京(1979)