Diracの正準形式と変分原理

大　高　成　介

Canonical Formalism of Dirac and Variational Principle

Sigeyuki OOTAKA

We apply the undetermined multiplier of Lagrange to the weak equality in the Dirac's canonical formalism. Thereby, the Dirac's canonical equations can be derived whether the singular Lagrangian is or not. It is shown next that the canonical equation of the free electromagnetic field may be discussed as a Lorentz covariant.

§1.　Introduction

Heisenberg－Pauli形式[1]によるラグランジアン密度$\mathcal{L}$は

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

$$L=\int d^3x\,\mathcal{L} \tag{1.2}$$

とおく。ここで

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu}&=\partial^{\nu}A^{\mu}-\partial^{\mu}A^{\nu}\\&=A^{\mu,\nu}-A^{\nu,\mu}\end{aligned} \tag{1.3}$$

とし，また今後Heaviside有理化単位系を用いることとする。この理論の量子化をおこなうためにポテンシャルA^{μ}に正準共役な運動量π^{μ}を

$$\pi^{\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} \tag{1.4}$$

と定義すれば

$$\begin{aligned}\pi^{\mu}&=F^{\mu 0}\\&=A^{0,\mu}-A^{\mu,0}\end{aligned} \tag{1.5}$$

となる。よって，ゼロ成分は

$$\begin{aligned}\pi^{0}&=A^{0,0}-A^{0,0}\\&=0\end{aligned} \tag{1.6}$$

となる。つまり，正準変数A^{0}に正準共役な運動量π^{0}がゼロとなる。従って，現実の物理的世界

がローレンツ変換に対して共変であるから，電磁場のハミルトン形式はローレンツ共変でなければならない。もし，この理論形式がローレンツ共変でなければ，相互作用の高次の計算は発散してしまう。それ故，この理論形式の重大な困難を解決するためにいろいろな試みがある。

Fermi[2]はラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(A_{\mu},{}^{\mu})^2 \qquad (1.\ 7)$$

と置き，これにFermiの補助条件を要求する。そのことによって，正準運動量の空間成分は

$$\pi^0=A_{\mu},{}^{\mu} \qquad (1.\ 8)$$

となる。よって，Fermiの理論はローレンツ共変な正準形式になるが，交換関係とFermiの補助条件とがあい矛盾し，ハミルトニアンが正定値にならない。この欠点をGupterの補助条件と不定計量の導入によって解決したのがGupta－Bleulerの形式[3]である。さらに，共変ゲージ一般にまで適用できる理論形式に拡張したのがNakanishi－Lautrupの形式[4] [5]である。この方法の特別なゲージであるFeynmanゲージがGupta－Bleulerの形式で，このゲージ以外はdipole－ghost[4]が含まれる。

この成功した理論形式はdipole ghostなる物理的に正体不明な補助場を導入することによってローレンツ共変性を保ち，またこの理論の適用範囲は電磁場に限られている。

そこで次に登場するのが，束縛条件式の等号の意味をゆるめた理論（弱い等号）がDiracの正準形式[6]で，この理論形式は電磁場のみならず力学一般に適用できる。とくに，ゲージ理論においては作用積分に対してゲージ不変という強い条件を要求しているので，ハミルトニアンは束縛条件付きとなり，正準変数に共役な正準運動量が一対一の対応関係が成立せず，正準形式は非常に複雑になる。Diracはこの問題に対する一般的処方せんを与えている。

このハミルトニアンの束縛条件が正準変数と正準運動量にある関係をもたらす。このために束縛条件がないとき変分原理によって容易に導かれる運動方程式が束縛条件のある場合それができない。そこで，弱い等号の意味を少し拡張すれば，ハミルトニアンに束縛があるなしにかかわらず変分原理によって運動方程式が導かれることである。

この論文の目的はDiracの正準形式において束縛条件があるなしにかかわらず物理系に対して変分をとれば，運動方程式が導かれることを明らかにすることができる。これは§2において示される。また，実際上の応用として，§3においてsingular[6] [7]なラグランジアンをもつ電磁場に対して変分原理が適用される。

§2.　修正されたDiracの正準形式と変分原理

ここでもちいる表記法を

$$x^{\mu}=(x^{i},x^{0})=(\mathbf{x},t) \qquad (2.\ 1)$$

$$x_{\mu}=(x_{i},x_{0})=(\mathbf{x},-t) \qquad (2.\ 2)$$

$$\mu=1,2,3,0\ ;\ i=1,2,3$$

とすれば，スカラー積は

$$x^{\mu}x_{\mu}=x^{i}x_{i}+x^{0}x_{0}=\mathbf{x}^{2}-t^{2} \qquad (2.\ 3)$$

となる。

さて，弱い等号の意味[5]を更に次のように拡張して定義する。すなわち，$\phi_m(q, p)\approx 0$”を“始めは q_n, p^n を独立な変数，ϕ_m（q，p）をゼロでないとみなしてPoisson括弧の計算あるいは適当な計算をおこない，この計算の最後に“$\phi_m(q, p)\approx 0$”，すなわち，独立変数でない q_n, p^n の関係式を適用する。”と解釈することにする。今後，上述のように拡張された定義の“≈”を弱い等号と呼ぶこととし，それに対して普通の等号“＝”を従来どおり強い等号と呼ぶこととする。

さて，このような考えは，従来の文献の解釈をさらに拡張したものであり，この仮定をすることによって物理系に対して拘束条件があるなしにかかわらず統一的に変分原理によって運動方程式が導かれることがはじめて可能となる。そして，このような拡張をしても，従来のDiracの正準形式における取り扱い方法と全く同じように取り扱えることが可能となる。

実際，この定義をn個の自由度を持つ質点系に適用すれば，最初は正準座標 q_n，正準運動量 p^n，未定係数 $u_m(q, p)$ を互いに独立な変数とみなして，作用

$$S=\int dt\ \{p^n q_n-H(q, p)-u_m\phi_m(q, p)\} \qquad (2.\ 4)$$

の変分をとれば，

$$\delta S=\int dt\ \{q_n\delta p^n+p^n\delta q_n-\frac{\partial H}{\partial q_n}\partial q_n-\frac{\partial H}{\partial p^n}\delta p^n-\phi_m\delta u_m$$

$$-u_m\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial\phi_m}{\partial p^n}\delta p^n\right)\}$$

$$=\int dt\ \{\left(q_n-\frac{\partial H}{\partial p_n}-u_m\frac{\partial\phi_m}{\partial p^n}\right)\delta p^n$$

$$-\left(p^n+\frac{\partial H}{\partial q_n}u_m\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)\delta q_n-\phi_m\delta u_m\} \qquad (2.\ 5)$$

となるから

$$q_n=\frac{\partial H}{\partial p_n}+u_m\frac{\partial\phi_m}{\partial p^n}$$

$$=\{q_n, H\}+u_m\{q_n, \phi_m\} \qquad (2.\ 6)$$

$$p^n=-\frac{\partial H}{\partial q_n}-u_m\frac{\partial\phi_m}{\partial q_n}$$

$$=\{p_n, H\}+u_m\{p_n, \phi_m\} \qquad (2.\ 7)$$

および

$$\phi_m(q, p)=0 \qquad (2.\ 8)$$

が導かれる。そして，今後

$$\phi_m(q, p)\approx 0 \qquad (2.\ 9)$$

とする。ここでPoissom括弧は

$$\{A(q,p),\ B(q,p)\} = \frac{\partial B}{\partial q_n}\frac{\partial B}{\partial p^n} - \frac{\partial A}{\partial p^n}\frac{\partial B}{\partial q_n} \qquad (2.\ 10)$$

と定義し，そして

$$\{p^n, q_{n'}\} = -\delta^n{}_{n'} \qquad (2.\ 11)$$

なる関係式が導入される。

さて，一般に（2．6）～（2．9）よりq_n，p^n，u_mは互いに独立でないことが示される。しかしながら，このような数学的取り扱いはすでにLagrangeによって考案され，それはラグランジェの未定係数法としてひろく知られている。結局，ここでなされたアイディアというのはDiracによる弱い等号のアイディアにラグランジェの未定係数法を結び付けてDiracの弱い等号の意味をさらに拡張したことにある。このことによって，ラグランジアンがsingularであるなしにかかわらず変分原理で統一的に扱えることがはじめて可能となる。

§3.　自由電磁場

(a)　ラグランジェ形式

ラグランジアン密度，ラグランジアンをそれぞれ

$$\mathcal{L} = -1/4F^{\mu\nu}(x)\,F_{\mu\nu}(x) \qquad (3.\ 1)$$

$$L = \int d^3x\mathcal{L} \qquad (3.\ 2)$$

とすれば，それに対応するハミルトニアン密度，ハミルトニアンはそれぞれ

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \frac{1}{4}4F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (3.\ 3)$$

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} \qquad (3.\ 4)$$

となる。従って，自由電磁場の作用は

$$S = \int d^4x\mathcal{L} \qquad (3.\ 5)$$

となる。

次にA_μを独立の変数として，これらの変分をとる。

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S \\
&= -\frac{1}{4}\int d^4x\ \{\delta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\ \delta F_{\mu\nu}(x)\} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4xF_{\mu\nu} \times \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\,(\partial^\mu F_{\mu\nu}\cdot\delta A^\nu - \partial^\nu F_{\mu\nu}\cdot\delta A^\mu) \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\,(\partial^\nu F_{\nu\mu} - \partial^\nu F_{\mu\nu})\,\delta A^\mu \\
&= -\int d^4x\partial^\nu F_{\mu\nu}\cdot\delta A^\mu
\end{aligned} \qquad (3.\ 6)$$

ゆえに，電磁場の方程式は

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \qquad (3.\ 7)$$

となる。

(b) 自由電磁場の束縛条件

従来の伝統的方法によると，電場E，磁場Bは

$$E^i = F^{0i},\ B^i = (\nabla \times \mathbf{A})^i \tag{3.8}$$

であるから，ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = 1/2\,(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \tag{3.9}$$

となる。ポテンシャルA の正準共役な運動量は

$$\pi^\mu = \partial^\mu \mathcal{L} = F^{\mu 0} \tag{3.10}$$

であるから，この空間成分と時間成分は

$$\pi^i = F^{i0} = -E^i,\ \pi^0 = \phi_1 \approx 0 \tag{3.11}$$

となる。よって，このラグランジアンに対応するハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\,(\pi^\mu A_\mu - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x\ \{\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{A} + 1/2\,(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

となり，

$$\pi^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \partial^i A^0 + \dot{A}^i \tag{3.13}$$

すなわち，

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\pi} - \nabla A^0 \tag{3.14}$$

であるから，ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\ \{\boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} - \nabla A^0) + 1/2\,(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\} \\ &= \int d^3x\,(1/2\ \ \boldsymbol{\pi}^2 + 1/2\ \ \mathbf{B}^2 - \boldsymbol{\pi} \cdot \nabla A^0) \end{aligned} \tag{3.15}$$

となる。そしてprimary constraint[6] [7]は

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0 \tag{3.16}$$

であるから，その持続性より

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \{\pi^0, H\} \\ &= \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = \phi_2 \approx 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。この場合ϕ_1，ϕ_2はfirst class[6] [7]である。

(c) ハミルトニアン形式

作用

$$S = \int d^4x\,(\pi^\mu A_\mu - H - u_m \phi_m) \tag{3.18}$$

に対して，A^μ と π^μ の変分をとれば

$$A^\mu = \{A^\mu, H\} + u_m \{A^\mu, \phi_m\} \tag{3.19}$$

$$\pi^\mu = \{\pi^\mu, H\} + u_m \{\pi^\mu, \phi_m\} \tag{3.20}$$

となる。従って

$$A^0 = \{A^0, H\} = \{A^0, v_1\pi_0\} = -u_1 \qquad (3.\ 21)$$

$$A = 1/2\ \{A^i, \pi_i\pi^i\} - \partial^i(v_2 + A^0)\{A^i(x), \pi_i(y)\}$$

$$= \pi^i - \partial^i A^0 + \partial u_2 \qquad (3.\ 22)$$

$$\pi^i = \{\pi^i, H\} = -F^{ij}{}_{,j} = -(\nabla \times \mathbf{B})^i$$

$$= F^{i0,}{}_0 = -E^i \qquad (3.\ 23)$$

となる。これをハミルトニアンに適用すれば

$$H' = H + u_m\phi_m$$

$$= \int d^3x\ \{1/2\ \boldsymbol{\pi}^2 + 1/2\ \mathbf{B}^2 + u_1\pi^0 + (u_2 + A^0)\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}\}$$

$$= \int d^3x\ (1/2\ \boldsymbol{\pi}^2 + 1/2\ \mathbf{B}^2 - A^0\pi^0 + A^0\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}) \qquad (3.\ 24)$$

となる。ただし，（3．21）より$u_1 = -\dot{A}^0$，そしてこれよりA^0は任意であるから，A^0を$A^0 - u_2$と置き換えることとする。

以上より，π_0，A_0は$\boldsymbol{\pi}$，Aと同等に取り扱うことが可能になり，電磁場におけるハミルトン形式はローレンツ変換に対して共変的になり，正準形式による古典論から量子論への容易な移行が可能になる。これをなし遂げたのがP. A. M. Diracである。

§4.　Discussion

結局，我々のなしたことは“弱い等号”の意味を拡張することにより，束縛条件のあるなしにかかわらず，そのハミルトン形式がローレンツ共変となり，変分原理で運動方程式が導かれることを示した。またこの仮定は，従来のものと全く同じように取り扱うことができ，そして何らの理論的内部矛盾もない。その応用として，作用のゲージ不変から自由電磁場のラグランジアンがsingularとなるにもかかわらず，ローレンツ共変な正準形式となることを明らかにした。

ところで，前回の論文[6]では

「一般の物理量Fの運動方程式は

$$F = \{F, H\} + \{F, \phi_m\}\ u_m \qquad (2-18)$$

となるから，物理量Fはゲージu_mによる。

したがって，first classで<u>意味のある観測量</u>はこのゲージu_mによらないものに限られる。

そのために観測量Fが

$$\{F,\ \phi_m\} = 0 \qquad (2-19)$$

をみたされなければならない。」

とあるが，下線の文章を“物理的に意味のある直接の観測量”と訂正する。言い換えるならば，Fが$\{F,\ \phi_m\} \neq 0$であるならば，Fは任意の数であるゲージu_mに依存する物理量となる。従って，他の物理的要請からゲージu_mが固定されないかぎり，物理量Fは直接の観測量とはならない。そして，理論展開中において他の物理量と同等のように取り扱われてはいるが，結局Fは単なる便宜上の数である。

謝　辞

この拡張された弱い等号のアイディアは福井在住の素粒子論グループの方々から「'≈' の従来のDiracの解釈によれば，singularなLargrangianに対して変分原理は使えない。」という指摘から生まれた。ここに深く感謝致します。

参 考 文 献

1) W. Heisenberg and W. Pauli, Z. Physik 56 (1926) 1；59 (1930) 168.
2) E. Fermi, Rev. Phys. Acta, 4 (1932) 125.
3) S. Gupta, Proc. Phys. London, A63 (1950) 681.
K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, 23 (1950) 567.
W. Heitler, Quantum Theory of Radiation, (Oxford University Press, 3rd ed.,1954)
4) N. Nakanishi, Progr. Theor. Phys. 35 (1966) 1111.
中西襄，場の量子論，（培風館，1975).
5) B. Lautrup, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.－fis. Medd. 35 no.11 (1967) 1.
6) P. A. M. Dirac, J. Math. 2 (1950) 129.
P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A246 (1958) 326.
P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science (Yeshiva University, New York, 1964).
崎田文二，吉川圭二，経路積分による多自由度の量子力学（岩波書店，1986).
A. J. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, Constrained Hamilton Systems (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1974).
7) S. Ootaka, 福井工業大学研究紀要, Vol.18 (1988) 335.