連結された二車輛に打撃を加えた場合における振動的変位について

奥　田　　薫

On the Vibrating Displacements of the Two Wheels connecting by the Spring when the Various Blows of 'Strengh' have been acted.

Kaoru OKUDA

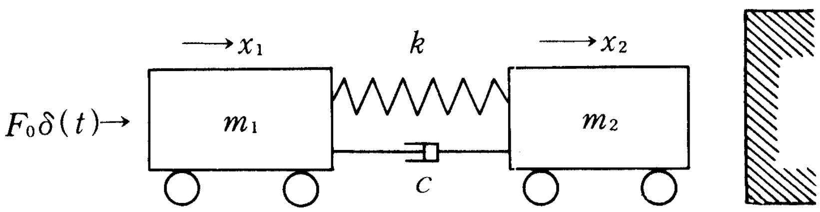
The auther has discussed the vibrating displacements of the two wheels when the various impulsive blows has been acted. And the blows are the simple impulsive blow, saw teeth impulsive blow, hafe sine impulsive blow.

We know that the vibrating displacements are indicated by the functions of t, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\sin kt$, e^{-as} and the step functions.

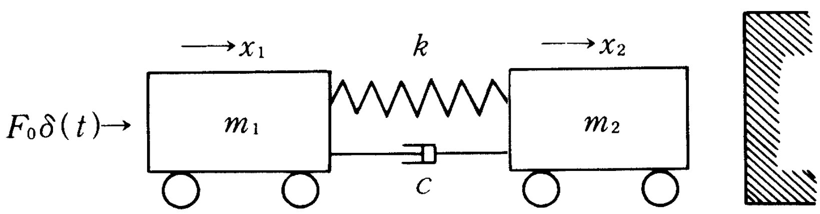
1　緒　　言

互にばねにて連結されている二個の車輛の前車輛に色々な打撃を与えた時二個の車輛の振動的変位を調査したものである。

この打撃力は強弱色々あり単一衝撃，鋸歯関数的衝撃，正弦曲線的衝撃また二車輛間に序擦係数を含む場合に打撃を与えた場合の二車輛の振動的変位を検討したものである。



2　単一衝撃をうける場合



物体 m_1 および m_2 がスプリング k によって連結されこれが一平面上にあり衝撃力 F_0 をうける時 $c=0$ とするとこの運動方程式は次のようになる。

$$m_1\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=F_0\delta(t) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$-k_1x+m_2\ddot{x}+kx_2=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

こゝに x_1 および x_2 は m_1 および m_2 の変位を示すものである。式(1)をラプラス変換すると

$$m_1[s^2X_1(s)-sX(o)-\dot{X}(o)]+kX_1(s)-kX_2(s)=F_0f_p(s) \qquad \cdots\cdots(3)$$

最初に m_1 および m_2 が静止していたと仮定すると

$$X(o)=0,\quad \dot{X}(o)=0$$

$$\therefore m_1s^2X_1(s)+kX_1(s)-kX_2(s)=F_0f_p(s) \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$X_1(s)[m_1s^2+k]-kX_2(s)=F_0f_p(s) \qquad \cdots\cdots(5)$$

同様にして(2)式をラプラス変換すれば

$$m_2[s^2X_2(s)]+kX_2(s)-kX_1(s)=0$$

$$X_2(s)[m_2s^2+k]-kX_1(s)=0$$

これを書き直して

$$-kX_1(s)+X_2(s)[m_2s^2+k]=0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

(5)および(6)の連立方程式を解くと

$$X_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} F_0f_p(s) & -k \\ 0 & m_2s^2+k \end{vmatrix}}{[m_1m_2s^2+k(m_1+m_2)]s^2}=\frac{F_0f_p(s)(m_2s^2+k)}{[m_1m_2s^2+k(m_1+m_2)]s^2}$$

$$X_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} m_1s^2+k & F_0f_p(s) \\ k & 0 \end{vmatrix}}{[m_1m_2s^2+k(m_1+m_2)]s^2}=\frac{kF_0f_p(s)}{[m_1m_2s^2+k(m_1+m_2)]s^2}$$

これより

$$X_1(s)=\frac{F_0f_p(s)}{m_1+m_2}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{\omega m_1}\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}\right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

こゝに $\omega^2=\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}$ である。

いま衝撃力を $f_p(s)=e^{-st_0}\left(1-\dfrac{s\varepsilon}{2!}+\dfrac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right)$ を採用する。こゝに $f_p(t)=\varLambda(t-t_0,\varepsilon)$ なる直線単一衝撃関係とする。

$$\therefore X_1(s)=\frac{F_0e^{-st_0}\left(1-\dfrac{s\varepsilon}{2!}+\dfrac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right)}{m_1+m_2}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{\omega m_1}\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}\right\}$$

$$=\frac{F_0}{(m_1+m_2)}\frac{1}{s^2}e^{-st_0}\left(1-\frac{\varepsilon s}{2!}+\frac{\varepsilon^2s^2}{3!}-\cdots\cdots\right)$$

$$+\frac{F_0m_2}{(m_1+m_2)\omega m_1}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot e^{-st_0}\left(1-\frac{\varepsilon s}{2!}+\frac{\varepsilon^2s^2}{3!}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{F_0}{(m_1+m_2)}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{\varepsilon}{2!s}+\frac{\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right)e^{-st_0}+\frac{F_0m_2}{(m_1+m_2)\omega m_1}\cdot$$

$$\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-st_0}-\frac{\omega\varepsilon s}{2!(s^2+\omega^2)}e^{-st_0}+\frac{\varepsilon^2\omega}{3!}\frac{[(s^2+\omega^2)-\omega^2]}{(s^2+\omega^2)}e^{-st_0}\right\}$$

逆ラプラス変換すればその変位を求めることが出来る。

$$X_1(t)=\mathscr{L}^{-1}X(s)=\frac{F_0}{(m_1+m_2)}\Big[\mathbf{U}(t-t_0)(t-t_0)-\frac{\varepsilon\mathbf{U}(t-t_0)}{2!}$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{3!}\nu(t-t_0,\ \varepsilon)+\cdots\cdots\Big]+\frac{F_0m_2}{(m_1+m_2)\omega m_1}\Big[\mathbf{U}(t-t_0)\sin(t-t_0)$$
$$-\frac{\omega\varepsilon}{2!}\mathbf{U}(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)+\frac{\varepsilon^2}{3!}\omega\nu(t-t_0,\ \varepsilon)$$
$$+\frac{\varepsilon^2\omega^2}{3!}\mathbf{U}(t-t_0)\sin\omega(t-t_0)\Big] \qquad \cdots\cdots(9)$$

同様にして $X_2(s)$ を求めると次のようになる。

$$X_2(s)=\frac{kF_0f_p(s)}{[m_1m_2s^2+k(m_1+m_2)]s^2}=\frac{kF_0f_p(s)}{m_1m_2\left\{s^2+\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}\right\}s^2}$$
$$=\frac{kF_0f_p(s)}{m_1m_2\{s^2+\omega^2\}s^2}=\frac{kF_0f_p(s)}{m_1m_2\omega^2}\left\{\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}$$
$$\therefore X_s(s)=\frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]\left(\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\right)$$
$$\therefore X_s(s)=\frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]e^{-st_0}\left(1-\frac{\varepsilon s}{2!}+\frac{\varepsilon^2 s}{3!}-\cdots\cdots\right)$$
$$=\left[\left(\frac{e^{-st_0}}{s}-\frac{e^{-st_0}}{s^2+\omega^2}\right)-\left(\frac{\varepsilon e^{-st_0}}{2!s}-\frac{\varepsilon}{2!}\frac{s}{s^2+\omega^2}e^{-st_0}\right)\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\varepsilon^2}{3}e^{-st_0}-\frac{\varepsilon^2}{3}\left(1-\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\right)e^{-st_0}\right\}\right]$$
$$\therefore X_2(t)=\frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\Big[\mathbf{U}(t-t_0)-\frac{\mathbf{U}(t-t_0)}{\omega}\sin\omega(t-t_0)-\frac{\varepsilon}{2!}\mathbf{U}(t-t_0)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2!}\mathbf{U}(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)+\frac{\varepsilon^2}{3}\mathbf{U}(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)\Big] \qquad \cdots\cdots(10)$$

(8)および(12)の式をみると m_1 および m_2 の変位は段階関数と衝撃関数を含むことを知る。

3　鋸歯関数を加えた場合（単一関数）

物体 m_1に鋸歯的衝撃を与えた場合を考える。この場合は $f_p(s)=\frac{1-e^{-as}}{as^2}-\frac{1}{s}e^{-as}$ となる。したがって$X_1(s)$は次のようになる。

$$X_1(s)=\frac{F_0f_p(s)}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{\omega m_1}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$
$$=\frac{F_0}{(m_1+m_2)}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{\omega m_1}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)\left(\frac{1-e^{-as}}{as^2}-\frac{1}{s}e^{-as}\right)$$
$$=\frac{F_0}{m_1+m_2}\left[\frac{1}{as^4}-\frac{e^{-as}}{as^4}-\frac{e^{-as}}{s^3}+\frac{m_2}{a\omega m_1}\cdot\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)s^2}\right.$$

$$-\frac{m_2}{am_1\omega}\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{e^{-as}}{s^2}+\frac{m_2}{\omega m_1}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{e^{-as}}{s}\Bigg] \quad \cdots\cdots(11)$$

しかるに

$$\frac{e^{-as}}{(s^2+\omega^2)s^2}=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)e^{-as}$$

$$\frac{e^{-as}}{(s^2+\omega^2)s}=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)e^{-as}$$ であるから

$$\therefore X_1(t)=\frac{F_0}{(m_1+m_2)}\Bigg[\frac{\mathbf{U}(t)}{a}\frac{t^3}{3!}-\frac{\mathbf{U}(t-a)(t-a)^2}{2!}+\frac{m_2}{am_1}\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$
$$-\frac{1}{a}\mathbf{U}(t-a)\frac{(t-a)^3}{3!}-\frac{m_2}{am_1}\cdot\frac{1}{\omega^2}\Big\{\mathbf{U}(t-a)(t-a)-\frac{1}{\omega}\mathbf{U}(t-a)\cdot$$
$$\sin\omega(t-a)\Big\}-\mathbf{U}(t-a)\frac{(t-a)^2}{2}-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{1}{\omega^2}\{\mathbf{U}(t-a)(t-a)$$
$$-\mathbf{U}(t-a)\cos\omega(t-a)\}\Bigg] \quad \cdots\cdots(12)$$

同様にして

$$X_2(s)=\frac{kF_0f_p(s)}{[m_1m_2s^2+k(m_1+m_2)]s^2}=\frac{kF_0f_p(s)}{m_1m_2\omega^2}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}$$
$$=\frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}\left(\frac{1-e^{-as}}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s}\right)$$
$$=\frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\Bigg\{\frac{1}{as^4}-\frac{1}{a\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)-\frac{e^{-as}}{as^4}$$
$$+\frac{1}{a\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)e^{-as}-\frac{e^{-as}}{s^3}+\frac{e^{-as}}{\omega^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\Bigg\}$$

変位は

$$X_2(t)=\frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\Bigg[\frac{t^3}{a3!}-\frac{1}{a\omega^2}\left(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)-\frac{(t-a)^3}{a3!}\mathbf{U}(t-a)$$
$$+\frac{1}{a\omega^2}\left(\mathbf{U}(t-a)-\frac{\mathbf{U}(t-a)}{\omega}\sin\omega(t-a)\right)$$
$$-\frac{\mathbf{U}(t-a)^2}{2!}+\frac{1}{\omega^2}\{\mathbf{U}(t-a)-\mathbf{U}(t-a)\cos\omega(t-a)\}\Bigg] \quad \cdots\cdots(13)$$

この場合は m_1 および m_2 の変位は段階関数のみを含むことになる。

4　連続的に鋸歯的衝撃を加えた場合（複関数）

この場合加える力を $t=a$　高さ1，$t=2a$　高さ1，$t=3a$　高さ1，等のものが加わると仮定する。

$$f_p(s)=\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$$ であるから振動方程式は次のようになる。

$$X_1(s)=\frac{F_0}{(m_1+m_2)}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{m_1}\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\right\}\left\{\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\right\}$$

$$= \frac{F_0}{(m_1+m_2)}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{m_1}\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\right\}\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{ae^{-as}}{s(1-e^{-as})}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

しかるに
$$\frac{e^{-as}}{1-e^{-as}} = e^{-as}+e^{-2as}+e^{-3as}+\cdots\cdots+e^{-nas}$$

$$\therefore X_1(s) = \frac{F_0}{a(m_1+m_2)}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{m_1}\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{a}{s}(e^{-as}+e^{-2as}+e^{-3as}+\cdots\cdots+e^{-nas})\right\}$$

$$= \frac{F_0}{a(m_1+m_2)}\left\{\frac{1}{s^4}+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{a}{s^3}(e^{-as}+e^{-2as}+e^{-\ as}+\cdots\cdots+e^{-nas})-\frac{m_2}{m_1}\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\frac{a}{s}(e^{-as}+e^{-2as}+e^{-3as}+\cdots\cdots+e^{-nas})\right\}$$

しかるに

$$\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

したがって変位は次のようになる。

$$X_1(t) = \frac{F_0}{a(m_1+m_2)}\left\{\frac{t^3}{3!}+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)-a\left\{\mathbf{U}(t-a)\frac{(t-a)^2}{2!}+\mathbf{U}(t-2a)\frac{(t-2a)}{2!}+\mathbf{U}(t-3a)\frac{(t-3a)}{2!}+\cdots\cdots\mathbf{U}(t-na)\frac{(t-na)}{2!}\right\}\right.$$
$$-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{1}{\omega^2}[\{\mathbf{U}(t-a)+\mathbf{U}(t-2a)+\cdots\cdots\mathbf{U}(t-na)\}+\{\mathbf{U}(t-a)\cos\omega(t-a)+\mathbf{U}(t-2a)\cos\omega(t-2a)+\cdots\cdots\mathbf{U}(t-2a)\cos\omega(t-na)\}] \quad \cdots\cdots(15)$$

また m_2 の変位は同様にして求められる。

$$X_2(s) = \frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]\left[\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\right]$$
$$= \frac{kF_0}{am_1m_2\omega^2}\left[\left\{\frac{1}{s^4}-\frac{a}{s^3}e^{-as}-\frac{a}{s^3}e^{-2as}-\frac{ae^{-3as}}{s^3}-\cdots\cdots\right\}-\left\{\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}-\frac{a}{s(s^2+\omega^2)}e^{-as}-\frac{ae^{-2as}}{s(s^2+\omega^2)}-\frac{ae^{-3as}}{s(s^2+\omega^2)}\right\}\right]$$

しかるに

$$\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} = \mathscr{L}^{-1}\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\frac{a}{s(s^2+\omega^2)}e^{-as} = \mathscr{L}^{-1}\frac{a}{\omega^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)e^{-as}$$

$$= \frac{a}{\omega^2}\{\mathbf{U}(t-a)-\mathbf{U}(t-a)\cos\omega(t-a)\}$$

$$\therefore X_2(t) = \frac{kF_0}{am_1m_2\omega^2}\left[\left\{\frac{t^3}{3!}-a\mathbf{U}(t-a)\frac{(t-a)^2}{2!}-a\mathbf{U}(t-2a)\frac{(t-2a)^2}{2!}\right.\right.$$
$$-a\mathbf{U}(t-3a)\frac{(t-3a)^2}{2!}+\cdots\cdots$$
$$-\frac{1}{\omega^2}\left(t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)+\frac{a}{\omega^2}\{\mathbf{U}(t-a)-\mathbf{U}(t-a)\cos\omega(t-a)$$
$$+\mathbf{U}(t-2a)-\mathbf{U}(t-2a)\cos\omega(t-2a)$$
$$\left.+\mathbf{U}(t-3a)-\mathbf{U}(t-3a)\cos\omega(t-3a)+\cdots\cdots\}\right] \qquad \cdots\cdots(16)$$

5　半波正弦曲線的力を加えた場合

この場合はやゝ弱い正弦的な曲線力を加えた場合でその力を高さ1，で $t=0$ から $\frac{\pi}{k_1}$, $\frac{2\pi}{k_1}$, $\frac{3\pi}{k_1}$ 度に力を加えると仮定する。その変換変位は次のようになる。

$$X_1(s) = \frac{F_0}{(m_1+m_2)}\cdot\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\right\}\frac{k_1}{(s^2+k_1{}^2)}(1+e^{-\frac{\pi s}{k_1}})$$

$$= \frac{F_0}{(m_1+m_2)}\cdot\left[\frac{k_1}{s^2(s^2+k_1{}^2)}+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{k_1}{(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{1}{(s^2+k_1{}^2)}+\frac{1}{s^2}\frac{k_1}{(s^2+k_1{}^2)}e^{-\frac{\pi s}{k_1}}\right.$$
$$\left.+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{k_1}{(s^2+k_1{}^2)}\cdot e^{-\frac{\pi s}{k_1}}\right]$$

$$= \frac{F_0}{(m_1+m_2)}\left[\frac{1}{k_1{}^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+k_1{}^2}\right)+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{k_1}{(k_1{}^2-\omega^2)}\cdot\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{1}{s^2+k_1{}^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_1{}^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+k_1{}^2}\right)e^{-\frac{\pi s}{k_1}}+\frac{m_2}{m_1}\frac{k_1}{(k_1{}^2-\omega^2)}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{1}{s^2+k_1{}^2}\right)e^{-\frac{\pi s}{k_1}}\right] \cdots\cdots(17)$$

したがって m_1 の変位は逆ラプラス変換して

$$X_1(t) = \frac{F_0}{(m_1+m_2)}\left[\frac{1}{k_1{}^2}\left(t-\frac{1}{k_1}\sin k_1 t\right)+\frac{m_2}{m_1}\frac{k_1}{(k_1{}^2-\omega^2)}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{k_1}\sin k_1 t\right)+\frac{1}{k_1{}^2}\left\{\mathbf{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\right\}-\frac{1}{k_1}\mathbf{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\sin k\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$
$$+\frac{m_2}{m_1}\frac{k_1}{(k^2-\omega^2)}\left\{\frac{1}{\omega}\mathbf{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)-\frac{1}{k_1}\mathbf{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left.\sin k_1\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\right\}\right] \qquad \cdots\cdots(18)$$

また m_2 の $X_2(s)$ は次のようになる。

$$X_2(s) = \frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]f_p(s)$$

$$= \frac{kF_0}{m_1m_2\omega^2}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]\frac{k_1}{s^2+k_1{}^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{k_1}})$$

$$\therefore X_2(s) = \frac{kF_0}{m_1 m_2 \omega^2}\left[\frac{1}{s^2}\frac{k_1}{(s^2+k_1{}^2)} - \frac{k_1}{(s^2+\omega^2)(s^2+k_1{}^2)} + \frac{1}{s^2}\frac{k_1}{(s^2+k_1{}^2)}e^{-\frac{\pi s}{k_1}}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{(s^2+\omega^2)}\frac{k_1}{(s^2+k_1{}^2)}e^{-\frac{\pi s}{k_1}}\right]$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}X_2(s) = X_2(t) = \frac{kF_0}{m_1 m_2 \omega^2}\left[\left(\frac{1}{k_1}t - \frac{1}{k_1}\sin k_1 t\right) - \frac{k_1}{\omega^2 - k_1{}^2}\left(\frac{1}{k_1}\sin k_1 t\right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right) + \frac{1}{k_1}\left\{\mathbf{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right) - \frac{1}{k_1}\mathbf{U}(t-k_1)\sin k_1\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\right\}$$
$$\left. - \frac{k_1}{\omega^2 - k_1{}^2}\left\{\frac{1}{k_1}\mathbf{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right) - \frac{1}{\omega}\mathbf{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\right\}\right] \qquad \cdots\cdots(19)$$

6　序際係数Cを有する場合の単一衝突

この場合，質量 m_1 が極めて大で m_2 が小である場合を仮定する。なお衝撃力を鋸歯関数とすると振動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = F_0\left[\frac{1-e^{-as}}{as^2} - \frac{1}{s}e^{-as}\right]$$

いま $\omega^2 = \frac{k}{m_1}$, $\frac{c}{m} = 2\epsilon\omega$ とする。

$$\therefore X(s) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2}\right]\left[\frac{1-e^{-as}}{as^2} - \frac{1}{s}e^{-as}\right]$$
$$= \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{as^2(s^2+2\epsilon\omega s+s^2)} - \frac{e^{-as}}{as^2(s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2)}\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-as}}{s(s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2)}\right] \qquad \cdots\cdots(20)$$

しかるに

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2(s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^4}\left[\frac{\omega^2}{s^2} - \frac{2\epsilon\omega}{s} + \frac{2\epsilon\omega + (4\epsilon^2-1)\omega^2}{s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2}\right]$$
$$= \frac{1}{\omega^4}\left[\frac{\omega^2}{s^2} - \frac{2\epsilon\omega}{s} + \frac{2\epsilon\omega(s+\epsilon\omega)+(2\epsilon^2-1)\omega^2}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega^2}\right]$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s(s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2\epsilon\omega}{s^2+2\epsilon\omega_s+\omega^2}\right]$$
$$= \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+\epsilon\omega)+\epsilon\omega}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega^2}\right]$$

したがって

$$原式 = X(s) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{a\omega^4}\left\{\frac{\omega^2}{s^2} - \frac{2\epsilon\omega}{s} + \frac{2\epsilon\omega(s+\epsilon\omega)+(2\epsilon^2-1)\omega^2}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega^2}\right\}\right.$$
$$- \frac{1}{a\omega^4}\left\{\frac{\omega^2}{s^2} - \frac{2\epsilon\omega}{s} + \frac{2\epsilon\omega(s+\epsilon\omega)+(2\epsilon^2-1)\omega^2}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega^2}\right\}e^{-as}$$
$$\left. + \frac{1}{\omega^2}\left\{\frac{1}{s} - \frac{(s+\epsilon\omega)+\epsilon\omega}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega^2}\right\}e^{-as}\right] \qquad \cdots\cdots(22)$$

したがって m_1 の変位は次のようになる。

$$\therefore X(t)=\frac{F_0}{m}\Bigg[\Bigg[\frac{1}{a\omega^4}\Big\{\omega^2 t-2\epsilon\omega+2\epsilon\omega e^{-\epsilon\omega}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\omega t$$

$$+(2\epsilon^2-1)\frac{\omega^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}\omega}\cdot e^{-\epsilon\omega}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\omega t\Big\}$$

$$-\frac{1}{a\omega^4}\Big[\omega^2\mathbf{U}(t-a)(t-a)-2\epsilon\omega\mathbf{U}(t)t+2\epsilon\omega\mathbf{U}(t-a)\cdot$$

$$e^{-\epsilon\omega(t-a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega(t-a)+\frac{(2\epsilon^2-1)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\mathbf{U}(t-a)e^{-\epsilon\omega(t-a)}\cdot$$

$$\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\omega(t-a)+\frac{1}{\omega^2}\Big\{1-\mathbf{U}(t-a)\cdot e^{-\epsilon\omega(t-a)}$$

$$\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\omega(t-a)-\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\mathbf{U}(t-a)e^{-\epsilon\omega(t-a)}\cdot$$

$$\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\omega(t-a)\Big\}\Big]\Bigg]\Bigg] \qquad \cdots\cdots(23)$$

7　複合衝突の場合

この場合は $F(s)=F_0\Big[\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\Big]$ であるから

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$ はラプラス変換して

$(ms^2+cs+k)\times(s)=F(s)$ となるから

$$\Big(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\Big)\times(s)=\frac{F(s)}{m}$$

いま $\frac{c}{m}=2\epsilon\omega,\ \frac{k}{m}=\omega$ とおくと

$$(s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2)\times(s)=\frac{F(s)}{m}$$

$$\therefore X(s)=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2)}F_0\Big[\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\Big]$$

しかるに

$$s^2+2\epsilon\omega s+\omega^2=(s+\epsilon)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\omega)^2=(s+\epsilon)^2+(\zeta\omega)^2$$

とおくと

$$X(s)=\frac{F_0}{m\{(s+\epsilon)^2+(\zeta\omega)^2\}}\cdot\Big[\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\Big] \qquad \cdots\cdots(24)$$

しかるに $\frac{e^{-as}}{1-e^{-as}}=e^{-as}+e^{-2as}+e^{-3as}+\cdots\cdots$ であるから

$$\therefore X(s)=\frac{F_0}{m\{(s+\epsilon)^2+(\zeta\omega)^2\}}\Big[\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\Big]$$

$$=\frac{F_0}{m}\Big[\frac{1}{a\omega^4}\Big\{\frac{\omega^2}{s^2}-\frac{2\epsilon\omega}{s}+\frac{2\epsilon\omega(s+\epsilon\omega)+(2\epsilon^2-1)\omega^2}{(s+\epsilon\omega)^2+(\zeta\omega)^2}\Big\}$$

$$-\frac{1}{\omega^2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{(s+\epsilon\omega)+\epsilon\omega}{(s+\epsilon\omega)^2+(\zeta\omega)^2}\right\}(e^{-as}+e^{-2as}+e^{-3as}+\cdots\cdots)\Bigg]$$

$$\cdots\cdots(25)$$

これを逆変換すると次のようになり m_1 の変位は

$$\therefore X(t)=\frac{F_0}{m}\Bigg[\!\Bigg[\frac{1}{a\omega^4}\Big\{\omega^2 t-2\epsilon\omega+2\epsilon\omega e^{-\epsilon\omega}\cdot\cos\zeta\omega t$$

$$+(2\epsilon^2-1)\omega\frac{1}{\zeta}e^{-\epsilon\omega t}\sin\zeta\omega t\Big\}-\frac{1}{\omega^2}\Big[\mathbf{U}(t-a)$$

$$+\mathbf{U}(t-2a)+\mathbf{U}(t-3a)+\cdots\cdots\Big\{\mathbf{U}(t-a)e^{-\epsilon\omega(t-a)}\cdot$$

$$\cos\zeta\omega(t-a)+\mathbf{U}(t-2a)e^{-\epsilon\omega(t-2a)}\cdot\cos\zeta\omega(t-2a)$$

$$+\mathbf{U}(t-3a)e^{-\epsilon\omega(t-3a)}\cdot\cos\zeta\omega(t-3a)+\cdots\cdots\Big\}$$

$$-\Big\{\frac{\epsilon}{\zeta}\mathbf{U}(t-a)e^{-\epsilon\omega(t-a)}\cdot\sin\zeta\omega(t-a)$$

$$+\frac{\epsilon}{\zeta}\mathbf{U}(t-2a)e^{-\epsilon\omega(t-2a)}\cdot\sin\zeta\omega(t-2a)$$

$$+\frac{\epsilon}{\zeta}\mathbf{U}(t-3a)e^{-\epsilon\omega(t-3a)}\cdot\sin\zeta\omega(t-3a)+\cdots\cdots\Big\}\Big]\Bigg]\!\Bigg]$$

$$\cdots\cdots(26)$$

この変位は定常的な正弦および余弦を含む曲線に段階的正弦および余弦を含む曲線が加っている。

8 結　　言

質量 m_1 と m_2 がスプリングにて連結されている場合 m_1 に衝撃を与える場合その衝撃力にはその種々あるから色々の衝撃力とその方法により m_1 および m_2 の変位したがってこれらに加わる力の変化が色々異なるから種々の異なる衝撃力を与えてその変化を調べたのである。2の場合のような極めて強い打撃力を加えた場合 m_1 および m_2 の変位は鋭い変位をうけるがその量は極めて小さく正弦および余弦を含む段階関数曲線によって示されまた力もこれと同様な関数曲線と思考される。鋸歯関数的力を与えた場合は変位は t, $\sin\omega t$の関数と $\sin\omega(t-a)$, $\cos\omega(t-a)$ の段階関数であらわされやや弱い打撃力を与えた場合はその変位は t, $\sin kt$, $\sin\omega t$, による曲線と $\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$ を含む正弦曲線により表わされる。また反擦係 c を有する打撃力をうける時はその変位はω, t また $\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\omega t$, $\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\omega t$ およびこれらを含む段階関数曲線で示されなおこれには減衰項$e^{-\epsilon\omega}$ を含んでいる。

何れの場合において時間の遅れ $\frac{\pi}{k_1}$, a 等を含んでいる $a<t<2a$, $2a<t<3a$ における振動変位においてはこの時間 t に対する振動変位は $a<t<2a$ においては $0<t<a$ および $2a<t<3a$ 以上の項を省略すれば良く $0<t<a$ における変位は $a<t<a$ 以上の項を省略すれば求めることが出来る。連続的に強制を与えて得るからその変位曲線は正弦曲線および余弦曲線よりなる合変位曲線に段階的曲線$\mathbf{U}(t)$が加わるからところどころ鋭い曲線が附加されるものと思考される。

例をあげてそれぞれの曲線を求めることが最も適当と考えるが次にゆずることとする。

参　考　文　献

1. HOLL, MAPLE, VINOGRADE ; Introduction to the LAPLACE TRANSFORM
2. BASTIEN, C. J., "Vibration Isolation and Shock Mounting," Rrod. Eng., Vol. 19, Nos. 9−10, September−October 1958.
3. DEN HARTOG, J. P., Mechanical Vibrations, Mc Graw-Hill Book Co., New York 1949.
4. FREBERG, C. R., and E. N. KEMIER, Elements of Mechanical Vibrations, Iohn Wiley and Sons, Inc., New York, 1949.
5. HARINGX, J. A., "Vibration-Free Mountings with Auxiliary Mass," Philips Tech. Rev., Vol. 9, No. I, Ianuary 1949.
6. Church, A. H : "Mechanical Vibrations," Pitman Publishing Corporation, New York, 1949.
7. Den Hartog. J. P. : "Mechanical Vibrations," Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
8. MclLachlan, N. W. : "Theory of Vibrations", Dover Publications, New York, 1951.
9. Santen, G. W. Van : "Mechanical Vibration", Philips Technical Library, Elsevier Press, Inc., Houston, Tex., 1953.
10. Hansen, H. M., and Paul F. Chenea : "Mechanics of Vibration" John Wiley and Sons. Inc., New York, 1952.