工業系のための微積分教授内容の最適化

宮　本　一　郎

The Optimization of Syllabus for the Calculus in Technological Course

Ichiro MIYAMOTO

Recently new students to university or college have become diverse about the aquirement of mathmatics, and various difficulties are arising especially in the teaching of calculus. And so, the optimization of syllabus for calculus must be done as early as possible. This paper presents how to optimize the mathematical syllabus, and shows the concrete analysis for calculus, with a tentative plan.

まえがき

近年大学入学生の質的多様性が著しく目立つようになってきており，一般教養の数学，特に微積分の教授・指導に種々の困難を生じているように思われる。これは高等学校のカリキュラムの多様性と大学における指導時間の不足によるものと考えられる。少ない限定された時間で微積分をまた初めからやらねばならないし，また工学系ではかなり高度までの学習内容が要請されるということである。また一方，専門学科の側から「一般教養の数学はあまり役に立たない」という声を時々耳にしてがっかりさせられる。これは一般教養の数学が論理性を主としていて実用性を無視している傾向への苦情であろう。もちろん数学は専門学科の単なる servant ではないが，しかし service subject の面を忘れてはならない。以上の事情から一般教養の微積分の教授内容を見直して，その精選と有効な配列を検討することが早急に必要である。拙論はこれに対する一つの challenge である。

1. 教授内容の最適化

教授内容の最適化とは，教育効果を最大とすること，すなわち定められた時間内において学習成果が最大となるようなシラバスを作ることを意味する。「シラバス (syllabus)」とは教授内容の配列のことで，数学については次の要素から成り立つものと考えられる。

①公理，無定義用語

②定義（用語，記号）

③定理・公式

④例題

⑤問題

ここでは主として②，③について考察する。

(1) 教授内容の精選

指導時間の不足と学生の消化不良を解消するための第一の方策は教授内容の精選である。一般に教材は教科の目標到達のため選択されるものであるから，目標の設定こそ教材精選の第一の視点でなければならない。また一方教材は目標を具体化した内容と学習者の中間にあってこれを結ぶものと考えられるから，教授者の価値観のみならず学習効果を考慮したものでなければならない。これが第二の視点である。さらに教材の精選は指導の能率化をはかることが目的であるから，教材相互の有機的な結びつき，すなわち教科の構造を見きわめねばならない。これが第三の視点である。以上の視点より，数学教材精選の基準となるべき具体的要件は次のようになると考えられる。

①数学的価値

数学の論理体系においてどんな位置を占めるかということである。その教材がなくても後の学習に支障のないものは一応精選の対象となる。

②応用的価値

理工学に関する実用面においてどの程度用いられているか，またその可能性があるかということである。これが少いものは精選の対象となる。

③教育的価値

数理的考察，論理性，創造性など教育目標にてらし，その教材がどの程度の寄与をするかということである。

④学習効果

価値ある教材でも，あまり高度で学習効果が期待できないものは削除または軽減すべきである。また時間をかけ過ぎてそれほど効果のないものは軽減すべきである。

⑤指導能率

学習者が後に必要に応じて自分で学習発展できるものは削除または補助教材としてよい。いくつかの教材をより大きな観点から統合して指導を能率化できるものもある。また数学のみならず，関係他教科（物理学，情報処理など）へ移した方がよいものもあり得る。

教材の精選にあたっては「教材レベル」に関する考察が必要である。これには，

a．理解して十分使えるまで習熟させるもの

b．概念を理解して簡単な適用ができるもの

c．概念にふれる程度でよいもの（例題，問題にふくめる程度）

教材の精選とは前述の観点から，教材を削除または軽減することであるが「軽減」には教材の内容を減らすことと，教材レベルをばａ→ｂ→ｃと格下げすることとの二つの場合が考えられる。

(2) 定理の取扱い

定理の証明は一般に技巧的で学生にとって難かしく，やってもあまり効果がないものがよくある。「一般教育の数学は……」といわれるのもこの辺に原因があるように思われる。定理には証明しなければ意味がはっきりわからないものと，そうでないものとある。前者の証明は必須であるが，後者の場合の証明で難解なものは次のように取扱うことが考えられる。

ア）証明を省略する。（あるいは完末に補足）

イ）直観的な説明（図解，数値験証，実験など）でこれにかえる。

ウ）特殊な場合（条件をきつくした場合とか$n=2$，３とした場合など）につき証明して，これより一般的な場合を類推させる。

エ）その証明の基礎となる定理を無証明で認めて，これを用いて証明する。

オ）従来の証明より簡単な別証を試みる。なお（ウ）に関連して，定理そのものの条件をきつくした場合（たとえば連続性を仮定するなど）を本定理として，その条件をゆるくした一般的な場合を「注」として補足するのもよい。定理の文章もできるだけわかり易く使い易いものにした方がよい。またそれと同値でもっと見易い命題におきかえられればその方がよい。特に理工学でよく応用される定理についてこの配慮が望ましい。

(3) 教材の効果的配列

①論理的順序，教育的順序

数学教材の配列は数学そのものの論理的順序によるのを原則とするが，学習者の思考発達に留意する数学教育の立場からその順序を変更することもあり得る。この場合論理的厳密性が若干失われてもやむを得ない。

②直線的配列，らせん的配列（spiral 方式）

通常は論理的順序に従って直線的に教材が配列されるが，特に重要な教材や学習困難な教材は学習者の理解消化を考慮していくつかのステップに分けて反復指導するようにする。これがスパイラル（spiral）方式とよばれるもので，高等学校以下の数学教育ではよく用いられている。大学においては現在あまり用いられていないが，例題問題などの配列にこれを活かすと有効であろう。またこれに類似したものとして，分散方式（教材の重複はないが，ある単元の内容を他の単元の中に随所に織りこむ方式）も活用するとよい。

③一般化，特殊化

前者は具体的な命題から，これを拡張あるいは一般化して，より抽象的な命題へと進む方式で学習上はこれを原則とする。しかし，いきなり一般的な定理を証明して，その特別の場合として具体的な場合が示されることもよく見られる。どちらの方式が有効であるかは教材内容と

学習者の能力によるので，この点も検討を要する。

2．　微積分教授内容の分析

まず一般教養の微積分教科書のシラバスを分析するための基礎資料として，定義・公理・定理のリストをかかげる。ただし紙数の都合により命題の内容を簡単な語句または式で略記したので不明な項は筆者へ照会されたい。なお定義はｄで，命題（公理，定理・公式）は単に一連番号で並べる。

d 1　区間
d 2　上（下）界，有界，上（下）限
d 3　切断
d 4　有界関数
d 5　単調関数，増加（減少）関数
d 6　数列の収束・発散（ε, N）
d 6′　同上（直観的定義）
d 7　関数の極限（ε, δ）
d 7′　同上（直観的定義）
d 8　無限小とその位数
d 9　Landauの記号
d 10　無限大とその位数
d 11　連続，右（左）連続
d 11′　同上（直観的定義）
d 12　逆関数
d 13　指数関数，対数関数，自然対数
d 14　逆三角関数
d 15　双曲線関数
d 16　一様連続
d 17　微分可能，微分係数，導関数
d 18　接線，法線
d 19　高階導関数
d 20　微分
d 21　近傍
d 22　増加（減少）の状態
d 23　極大極小
d 24　凹凸，変曲点
d 25　凸関数
d 26　区分求積法
d 27　分割，細分
d 28　Riemann和，定積分，積分可能
d 29　$a \geqq b$ のときの $\int_a^b$ の定義
d 30　原始関数，不定積分
d 31　広義積分（不連続点）
d 32　広義積分（無限積分）
d 33　Cauchyの主値積分
d 34　ベータ関数
d 35　ガンマ関数
d 36　面積
d 37　曲線の長さ
d 38　回転体の体積，側面積
d 39　曲率，曲率半径
d 40　曲率中心，曲率円
d 41　n 位の接触
d 42　重心（平面図形）
d 43　漸近線
d 44　級数，部分和，収束・発散
d 45　級数の有界性
d 46　正項級数，交項級数
d 47　絶対収束，条件収束
d 48　関数列の収束
d 49　一様収束
d 49′　広義の一様収束
d 50　関数項級数の収束，一様収束
d 51　整級数（べき級数）
d 52　収束半径
d 53　微分方程式，解（一般解，特殊解）
d 54　1階線形微分方程式
d 55　定数変化法
d 56　2階線形微分方程式（同次，非同次）
d 57　Wronskian
d 58　1次独立，1次従属
d 59　特性方程式
d 60　補助方程式，基本解
d 61　2変数関数
d 62　近傍
d 63　開集合，閉集合
d 64　内点，外点，境界
d 65　有界
d 66　連結
d 67　領域
d 68　点列の収束
d 69　2変数関数の極限
d 70　2変数関数の連続
d 71　偏微分係数，偏微分可能，偏導関数
d 72　方向微分係数
d 73　全微分可能

d 74　連続微分可能（C^2，C^n）
d 75　全微分
d 76　接平面，法線
d 77　偏微分方程式
d 78　高階偏導関数
d 79　高階連続微分可能
d 80　調和関数
d 81　同次関数
d 82　2変数関数の極大極小
d 83　特異点
d 84　結節点，先点（尖点），自接点
d 85　包絡線
d 86　縮閉線，伸開線
d 87　2重積分
d 88　広義の2重積分
d 89　Jacobian
d 90　曲面積
d 91　3重積分，重積分
d 92　重心（空間図形）
d 93　慣性モーメント，回転半径

○命題（公理，定理，公式）

1　Archimedes の公理
2　Dedekind の定理
3　切断の性質
4　連続の公理（Weierstrass）
5　上（下）限の性質
6　単調有界数列の収束
7　区間縮小法（Cantor）
8　∞と0の関係
9　無限小の演算
10　無限大の演算
11　極限値の四則（数列）
12　極限値の大小（数列）
13　部分列の極限値
14　収束数列の有界性
15　収束級数の有界性
16　Weierstrass の補助定理（部分列存在）
17　Cauchy の定理（数列の収束条件）
18　関数の極限と数列の極限
19　Cauchy の定理（関数の極限）
20　極限値の四則（関数）
21　極限値の大小（関数）
22　合成関数の極限
23　連続関数の四則
24　有理関数の連続性
25　合成関数の連続
26　近傍での同符号性
27　Bolzano の定理（$f(a)\cdot f(b)<0$）
28　中間値の定理
29　Weierstrass の最大（小）値存在定理
30　連続関数の一様連続性
31　逆関数の一価連続
32　無理関数の連続性
33　指数関数の単調性
34　実数指数の指数法則
35　指数関数の連続性
36　三角関数の連続性
37　逆三角関数の連続性
38　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
39　e の存在，定義式
40　対数関数の性質
41　対数関数の連続性
42　微分可能性と連続性
43　接線の方程式
44　法線の方程式
45　x^n の導関数
46　微分法の演算法則
47　合成関数の微分法
48　逆関数の微分法
49　指数関数の導関数
50　対数関数の導関数
51　双曲線関数の基本性質と導関数
52　三角関数の導関数
53　逆三角関数の導関数
54　媒介変数表示の微分法
55　媒介変数による接線，法線の方程式
56　動径と接線のなす角（極座標）
57　Leibniz の定理（高階微分）
58　Rolle の定理
59　平均値の定理（Lagrange）
60　$f'(x)=0 \Longrightarrow f(x)=$ 定数
61　平均値の定理（Cauchy）
62　Taylor の定理
63　Maclaurin の定理
64　整級数展開
65　整級数展開の条件
66　O の演算
67　R_n の位数
68　いろいろな関数の級数展開
69　導関数の符号と単調性
70　単調性の条件（$f'(x)$：定符号）
71　関数の増減の判定（$f'(x)$ による）
71′　同上（$f^{(n)}(x)$ による）
72　極値の必要条件

73　極値の判定（$f'(x)$による）
74　凹凸の判定
75　変曲点の判定
76　凸関数の条件
77　l'Hospitalの定理
78　原始関数と積分定数
79　不定積分の基本公式
80　不定積分の演算法則
81　置換積分法
82　部分積分法
83　連続関数の積分可能性
84　定積分の基本性質
85　定積分の大小
86　$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$
87　積分に関する平均値定理
88　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$
89　微分積分法の基本定理
90　置換積分法（定積分）
91　部分積分法（　〃　）
92　偶関数，奇関数の定積分
93　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \cdots\cdots$
94　Simsonの公式
95　広義積分（不連続点）の存在
96　同上存在の判定　$f(x)(b-x)^\lambda$，$\lambda < 1$
97　$\int_0^k \dfrac{dx}{x^\alpha}$　($k>0$)の存在
98　広義積分（無限積分）の存在
99　同上存在の判定　$x^\lambda f(x)$，$\lambda > 1$
100　$\int_k^\infty \dfrac{dx}{x^\alpha}$　($k>0$)の存在
101　面積と定積分，領域の面積
102　媒介変数の面積公式
103　極座標の面積公式
104　曲線の長さ（2次元）
105　同上（2次元，媒介変数）
106　同上（2次元，極座標）
107　同上（3次元，媒介変数）
108　同上（3次元，極座標）
109　空間曲線の接線の方程式（媒介変数）
110　漸近線の方程式
111　微小弧と線分　$\lim\limits_{Q \to P} \widehat{PQ} / \overline{PQ} = 1$
112　Cavalieliの公式
113　回転体の体積
114　回転面の表面積
115　同上（媒介変数）
116　曲率と曲率半径
117　曲率円の中心と半径
118　重心の定義式
119　収束の不変性（有限項の付加）
120　収束級数の和・差
121　収束級数の結合法則
122　Cauchyの定理（級数の収束）
123　級数収束の必要条件 ($a_n \to 0$)
124　正項級数の収束条件 (S_nの有界)
125　収束正項級数の交換法則
126　比較判定法 ($a_n \leqq K b_n$)
127　同上 ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = \lambda$)
128　一般調和級数の収束
129　積分判定法
130　d'Alembertの判定法　$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = r$
131　Cauchyの判定法　$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$
132　Leibnizの定理（交項級数）
133　絶対収束級数の収束性
134　絶対収束級数の交換法則
135　条件収束級数の不安定性
136　Cauchyの乗積定理
137　Cauchyの一様収束判定条件
138　極限関数の連続性
139　極限と積分（lim と $\int$ との交換）
140　極限と微分（lim と $\dfrac{d}{dx}$ との交換）
141　関数項級数の一様収束条件
142　Weierstrassの判定法（一様絶対収束）
143　和の連続性　$\sum f_n(x)$
144　項別積分の定理
145　項別微分の定理
146　整級数の収束域
147　収束半径の値　$r = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}|$
148　同上　$r = \lim\limits_{n\to\infty} (1 / \sqrt[n]{a_n})$
149　整級数の一様収束性（広義の一様収束）
150　整級数の和の連続性
151　整級数の項別積分
151′　同　上（収束半径内）
152　収束半径の相等 ($\sum a_n x^n$ と $\sum n a_n x^{n-1}$)
153　整級数の項別微分
153′　同　上（収束半径内）
154　変数分離形の解
155　同次形の解
156　1階線形微分方程式の解
157　Bernoulliの微分方程式
158　2階線形同次方程式の一般解の形
159　定数係数2階線形同次方程式の解

160　2階線形非同次方程式の一般解
161　有界点列と部分列（Weierstrass）
162　点列収束の条件（Cauchyの定理）
163　連続関数の四則（2変数）
164　合成関数の連続（　〃　以下同じ）
165　近傍での同符号性
166　最大最小値の存在（Weierstrass）
167　一様連続性
168　中間値の定理
169　方向微分係数の公式
170　連続微分可能と全微分可能
171　全微分の四則
172　微小変化の公式　$\Delta z \fallingdotseq f_x\Delta x + f_y\Delta y$
173　接平面の方程式
174　合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ の微分公式
175　合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ の微分公式
176　f_{xy}, f_{xy} が連続 $\Longrightarrow f_{xy} = f_{xy}$
177　平均値の定理
178　Taylorの定理
179　Maclaurinの定理
180　陰関数の存在定理
181　陰関数の導関数　(dy/dx)
182　　〃　第2次導関数　(d^2y/dx^2)
183　陰関数の偏導関数　$(\partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y)$
184　接線の方程式（陰関数）
185　接平面と法線の方程式（陽関数）
186　同　上（陰関数）
187　空間曲線の接線方程式
188　極値の必要条件
189　陰関数の極値
190　$f(x, y)$ の極値判定
191　Lagrangeの乗数法
192　包絡線の方程式
193　曲率中心の式
194　連続関数の積分可能性（2重積分）
195　2重積分の基本性質
196　平均値の定理（2重積分）
197　累次積分（長方形区間）
198　同　上（一般区間）
199　積分順序の変更
200　2重積分の変数変換（1次変換）
201　同　上（一般の場合）
202　極座標変換
203　$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値
204　体積と2重積分
205　曲面積の公式（直交座標）
206　同　上（極座標）
207　3重積分の累次積分
208　3重積分の変数変換
209　円柱座標変換
210　極座標変換
211　曲面の重心
212　曲線の重心
213　Pappus-Guldinの定理

79　不定積分の補助公式

① $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\mathrm{A}}} = \log|x+\sqrt{x^2+\mathrm{A}}|$

② $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$

③ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$

④ $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right\}$

⑤ $\displaystyle\int \sqrt{x^2+\mathrm{A}}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+\mathrm{A}} + \mathrm{A}\log|x+\sqrt{x^2+\mathrm{A}}|\right\}$

⑥ $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$

〔cosについても同様〕

⑦ $\displaystyle \mathrm{I}_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)} + (2n-3)\,\mathrm{I}_{n-1}\right\}$

$(a \neq 0,\ n \geqq 2)$

⑧ $\displaystyle \mathrm{S}_n = \int \sin^n x\,dx = \frac{1}{n}\left\{-\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\,\mathrm{S}_{n-2}\right\}$　$(n \geqq 2)$

〔cosについても同様〕

⑧′ $\displaystyle \mathrm{T}_n = \int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \mathrm{I}_{n-2}$　$(n \geqq 2)$

⑨ $\displaystyle \mathrm{L}_n = \int (\log x)^n dx = x(\log x)^n - n\,\mathrm{I}_{n-1}$　$(n \geqq 1)$

⑨′ $\displaystyle \mathrm{E}_n = \int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}(x^n e^{ax} - n\,\mathrm{E}_{n-1})$　$(n \geqq 1)$

⑩ $\displaystyle \mathrm{I}_{m,n} = \int \sin^m x\cos^n x\,dx = $

$\displaystyle = \frac{1}{m+n}\left\{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x + (n-1)\,\mathrm{I}_{m,n-2}\right\}$

⑩′ $\displaystyle \mathrm{I}_n^m = \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx = \frac{1}{n-1}\frac{\sin^{m-1}x}{\cos^{n-1}x} - \frac{m-1}{n-1}\mathrm{I}_{n-2}^{m-2}$

〔$\displaystyle \mathrm{J}_n^m = \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx$ についても同様〕

⑪ $\displaystyle \int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(t)\,dt$　$[\sin x = t]$

〔$\displaystyle \int f(\cos x)\sin x\,dx$ のときは $\cos x = t$〕

⑫ $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\left[\tan\frac{x}{2} = t\right]$$

⑬ $\displaystyle\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \frac{n}{a}\int f\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)t^{n-1}dt$

$$\left[\sqrt[n]{ax+b} = t\right]$$

⑬' $\displaystyle\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int f\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)$

$$\times\frac{n(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}dt\left[\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t\right]$$

⑭ $\displaystyle\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

$$\begin{cases} a>0: \sqrt{ax^2+bx+c} = t-\sqrt{a}\,x \\ a<0: \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} \end{cases}$$

$$= \sqrt{-a}\,(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

$$\left[\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} = t\right] \quad (\alpha<\beta)$$

⑮ $\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})dx = \int f(a\sin\theta, a\cos\theta)a\cos\theta d\theta$

$$[x = a\sin\theta]\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

⑯ $\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})dx = \int f(a\tan\theta, a\sec\theta)a\sec^2\theta d\theta$

$$[x = a\tan\theta]\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

⑰ $\displaystyle\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx =$

$$= \int f(a\sec\theta, a\tan\theta)\, a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$[x = a\sec\theta]$（θの範囲略）

微積分のシラバスの主要部は以上の定義，命題群から適宜取捨選択して（必要があればさらに補充してもよいが，工業系としては上のリストでまず十分)，それらを効果的に配列して作られる。この場合命題間の演繹的関係を分析して示すことを筆者は提案する。これはシラバスの評価，改善に有効であると考えられる。

次に実例として，ある微積分教科書の命題分析を示す。ここで例えば，23（**d** 11', 20）は，前掲のリスト中の定理23が定義11' と定理20より導かれることを意味する。また11( )は定理11が無証明でかかげてあることを示す。その他の詳細な記法は資料の後に補説する。

d 1, **d** 6, **d** 7', **d** 4, **d** 5, 6(　), 11（　), **d** 44, 120（**d** 6）, 20（　),**d**11', 23(**d**11', 20), 24（23), 25（**d** 7', **d** 11'), 28（　), 29（　), 31（28, **d** 5, 6, **d** 11'), 32（31, 23), **d** 12, **d** 13,**d** 14, 35(　), 41（35, 31), 36（**d** 11', 25, 23), 37（36, 31), **d** 17, 42（**d** 17, **d** 11'), 46(**d** 17, 20, 42), 47（**d** 17, **d** 7', 11), 45（**d** 17, 11, 46), 39（6, 11), 49（**d** 17, 39, 47), **d** 15, 51（49, 46), 48（**d** 17, 31, 46), 50（49, 48), 38（21, ＊), 52（**d** 17, 38), 53（52, 48), **d** 19, **d** 20, 57（**d** 19, 46), 58（**d** 17, 21＊), 59（58), 60（59), 69（59), **d** 21,**d** 23, 71(＊), 73（71, **d** 23), 62（58, 45, 46), **d** 24, 74（62, **d** 24), 63（62), **d** 48, **d** 51, 64（63, **d** 48), 65（21, 64), 68（64, 65, ( )), **d** 8, **d** 10, **d** 9, 67（**d** 9), 66（**d** 9), 61（58, 46), 77（61), **d** 30, 78（**d** 30), 79（**d** 30, 45, 49～53), 80（**d** 30, 46), 82（**d** 30, 80), 81(**d** 30, 47)〔79②〕(81, 79), 〔79⑥〕(82, 69, 80, 52, 47), 79④（81, 52, 79), 79③(81, 79), 〔79⑨'〕(82, 79, 81, 46) 79⑦（81, 79, 45), 〘79⑨〙《82, 45, 47》, 79⑫（81, 53), 79⑧（82, 81, 69, 52), 79⑩'（82, 81, 79, 52, 47), 79⑩《82, 79, 45, 46, 53》, 〘79⑧'〙《81, 79, 53》, 79⑬（72, 45), 79⑬'（81, 45, 46), 79⑪（81, 45, 46), 79⑪（81, 45, 46), 79

① (79⑭, 79), 75⑤ (82, 79①), d 53, 154 (81), d 54, 156 (154, 79, d 55,* 46), d 56, d 59, 158 (d 56, d 59, 47, 49, 52, 45,' 46), 160(159, 46), d 28 (d 29), 89 (59, d 28), 〔d 26〕, 84 (d 28, 89), 85 (d 28, 21), 86 (85), 26 ( ) 87 (85, 28), 88 (89, 84), 91 (82, 89), 93 (91, 79, 52, 47, 89), 90 (89, 81), 〘92〙 (90, 45, d 27), d 31, 97 (d 31, 79, 89, 85), d 32, 100 (d 32, 79, 89, 85), d 35, 101 (89), 112(28, d 28), 113(112), 104(59,d 28, d 37*), 114(d 38*, d 28), 87 ( ), d 42, 118(d 42, d 28), d 61, d 62, d 69, 163( ), d 70, 165( ), 164( ), d 71, d 78, 176(59, d 70), d 75, 171(d 75, 46), 174 (59, d 20, d 71), 175(174, d 71), 180(165*, 28, 69), 181(180, 174), 〔182〕 (174, 181), 183 (175), 178(63, 174), 177(178), 172(178, d 75), d 63, d 82, 190 (188*, 178, d 82), 189(181, 174, 73'), d 83, 191(174, 188*), 54 (48, 47), 55 (54, 43, 44), 102(90, 84) 105(104, 54,90), 115(113, 54, 90), 111(104, 88, d 20, d 17), d 39, 116(d 39, 54, 43, 53, d 20) d 40, d 41, 56 (43, 54), 103(28, d 28), 106(d 20, 45, 46), d 18, 55 (43, 54), 184(181, 43) d 83, 109( ), d 43, 110(d 43, 20), 〔d 84〕, d 85, 192(174, 43, d 85), d 65, d 66, d 67, d 36, d 87, 194(d 87*), 195《d 87》, 197(83, d 87), 198(197), 199(198), 200(d 87), 201 (180, 200, d 87), 202(201), 203(d 88,* 202, 12), d 88,* 204(d 87), d 91, 207( )*, 208 ( ),* 209(208), 210(208), 186(187, 174, d 76), 185(182, 186), 205(185), d 6,' 119(d 6'), 14 (d 6'), 11 (d 6'), 123 (d 44, 14), d 45, 15 (d 45, 14), 124(d 45, d 41,* 6), 119(d 44), 121(d 44), 125(124), 126(124), 128(124, 129*, 126), 127(126, 119),130(126), 131(126), d 47, 133 (124, 125), 134(125, 133), d 46, 132 (d 46, 6 , 11), d 47, 135(d 47, 123*), d 7 , 20 (d 7), d 48, d 50, 138(d 50, d 11' *), 150(d 50, 23), 146(15, 126), d 52, 147(130, d 52), 148(131, d 52), 142(d 44, d 50), d 49,' 149 (142), 150(149, 138), 139(d 50, 86), 140(d 50, 139, 20, 89), 151(23, 139, d 44, 84) 153(145, ＊), 152(126, 77, 127, d 52), 153' (153, 149), 151' 《149, 151》。

この分析資料には，1(2)で述べた定理の取扱い方も詳細に盛りこまれている。直観的に取扱ったものには＊印をつける。たとえば，

・71 (＊) は直観的に説明したもの

・38 (21, ＊) は一部証明してそのあとを類推させるもの。

・114(d 38,* d 28) は d 38を正式に定義せずに証明中に直観的に用いているもの

また命題を本文に入れず例題として示すものは〔 〕で，問題中に入れてあるものは〘 〙で示してある。《 》は証明は述べてないが，演習として各自やらせることを意味する。

上記は一つのテキストの分析例であるが，これはまた，シラバスを分析記述するための方法論の一つであると考えられる。

3．工業系に最適と考えられる教授内容例

以上の考察に基づき，さらに講義時間数，入学生の学力を配慮して，本学における微積分（数

学II，数学演習）の最適と考えられる教授内容の一つの試案を作成する。数学II，数学演習とも毎週1コマ（90分）で通年30週であるが，行事や試験を除くと講義は26～7週である。また入学生は工業系としては高等学校で「微分積分」まで履修してくるのが建前であるが，実際には「基礎解析」または「数学II」までしか履修していない者が約2割位おり，ごく稀ではあるが「数学I」だけの者もいるという状態である。これに対して本学の微積分に関する教授内容の概要は次のようになっている。

（数学II）　〔1年生〕

極限と連続，微分法とその応用，不定積分と簡単な微分方程式，定積分とその応用，無限級数

（数学演習）　〔2年生〕

偏微分とその応用，重積分とその応用（積分定理を含む)。

なお選択科目として

（応用数学）　〔2年生〕

常微分方程式，ラプラス変換とその応用，フーリェ級数，偏微分方程式，偏微分方程式の初期値・境界値問題，積分変換の応用，ベッセル，ルジャンドルの微分方程式

これらの事情を総合してまとめた試案の概要をかかげる。ただし定義，命題の選択と配列を示し，相互の演繹分析は紙数の都合により省略することとした。

〔数学II〕

1．関数の極限　　d 7; 20（　），22。

2．関数の連続性，連続関数の性質

　d 1，d 11; 23，24，25，28（＊），27，29（　）。

3．単調関数，逆関数，逆三角関数

　d 5，d 12*，31，〔32〕，〔41〕，d 14，37。

4．微分係数，導関数　　d 17，43*，42，45。

5．整関数，有理関数の導関数（合成関数の微分法）　　46，45'，47。

6．導関数の応用（変化率，接線，法線）　　43，44。

7．三角関数の導関数（媒介変数の微分法）　　38，52，54。

8．指数関数，対数関数の導関数（逆関数の導関数）　　39*，〔39'〕，49，48，50，d 13。

9．いろいろな関数の導関数（x^{α}，逆三角関数，双曲線関数）　　45"，53，d 15，51。

10．微分，高階導関数　　d 20，d 19，57。

11．平均値の定理　　58，59，60，61。

12．関数の増減と極値，最大最小問題

　69，d 23，72，73。

13．曲線の凹凸，曲線の概形（漸近線）

　d 24，74（＊），75，d 43，110*，71'*。

14．テーラーの定理，マクローリンの定理，級数展開　　62，63，64，〔65〕。

15．いろいろの関数の展開　68，39*。

16．不定形の極限値　77。

17．不定積分（直接積分，部分積分法）

d 30，78，79，80。

18．置換積分法　81，79③，79④，79①

19．部分積分法　82，〔79⑥〕，79⑤

20．有理関数の積分　〔79②〕，79⑦*。

21．いろいろの関数の積分　79⑩*，78⑧*，〔79⑫～⑯〕

22．簡単な微分方程式（変数分離形）　d 53，154。

23．定積分，定積分の基本性質　d 28，d 29，89，84，85，86。

24．部分積分法，置換積分法　91，90，92，93。

25．定積分の応用（面積，体積，長さ）

101，112，113，104，105。

26．広義積分　d 31，d 32，〔97〕，〔100〕，d 34* d 35*。

〔数学演習〕

1．極座標による曲線の方程式，面積，長さ　56，103，106。

2．積分の平均値，定積分の近似値　87，94。

3．2変数関数，極限，連続性　d 61，d 62，d 69，d 70，163(　)，164(　)。

4．偏微分係数，偏導関数　d 71。

5．全微分と微小変化　d 75，171，172。

6．高階導関数　d 78，176，〔d 77〕。

7．合成関数の偏微分法　174，175。

8．陰関数の微分法　180(　)，181，182，183。

9．接平面，法線，空間曲線の接線　d 76，185，186，187。

10．テーラー展開　178，177，179。

11．多変数関数の極値　d 82，190，188*，189。

12．最大最小問題　29*。

13．ラグランジュの乗数法　191。

14．包絡線，特異点　d 83，〔d 84〕，d 85，192。

15．2重積分，累次積分　d 87，194(＊)，197，198。

16．2重積分の計算，積分順序の変更　195(　)，199。

17．変数変換　201(　)，d 89。

18．極座標変換，$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$　202，〔d 88*〕。

19．体積，表面積　204，d 90，205，114。

20．３重積分　　d 91，207（　)*，208(　)*，209，210。

21．重心　　d 92，211，118，213。

22．数列の収束・発散　d 6'，11（＊)。

23．級数の収束・発散　d 44，123。

24．正項級数の収束判定法　　d 46，124，〔129〕，128，126，130。

25．絶対収束と条件収束，交項級数の収束

d 47，133，134，132。

26．整級数の収束半径，テーラー級数の収束

d 51，146，d 52，147，148，147*。

27．整級数の項別微分，項別積分　　152，153'，151'。

お わ り に

以上は一般教養における最適な微積分シラバス作成の方法論と具体例を工業系大学を対象として述べたものであるが，専門分野を他の対象とした場合も同様に適用することができよう。この場合は教材の選択において応用面からの要請が少し異なるだけである。また定義，命題リストでもし不足する場合ができれば，最後尾に逐次追加するか，あるいは本リストで最も関連のある番号の後に例えば，d 78.1のように小数で挿入すればよい。（N．D．Cの方法)。しかし本リストは試案であるから，使用してみて不都合がいろいろ見出されれば，全面的に改訂することもやぶさかではない。関心ある諸賢の御検討を乞う次第である。

参 考 文 献

1）宮本一郎：工業高専における微積分の教授体系，富山工業高等専門学校紀要 Vol．1，No.1，1967。

2）同上：数学教材の精選——視点とその方法，同上紀要 Vol．12，No.1．1978。

3）同上：命題系の演繹構造とその縮約，北陸四県数学教育研究大会要項，1977。

4）竹内端三：高等微分学，裳華房，1937。

5）同上：高等積分学，裳華房，1941。

6）古部実・佐々木右左：微分積分教科書，共立出版，1965。

7）青木利夫・森川正：微分積分学要論，培風館，1970。

8）田島一郎・天野滋：微分・積分〔工科の数学１〕，培風館，1967。

9）寺田文行・平吹慎吾・笠原勇：微分・積分〔セミナリーテキスト２〕，サイエンス社，1982。

10）水本久夫：微分積分学の基礎，培風館，1983。