

工業系における「数学モデル」の指導について

宮 本 一 郎

On the Instruction of “Mathematical Model” in the Technological Course

Ichiro MIYAMOTO

In the technological education, the application of mathematics to the technical subjects is quite important, but it's a matter of regret that this is not done well. For this purpose, it seems that in general mathematics curriculum, the focalization of “mathematical model” is very effective. The author defines the mathematical model and shows some concrete examples of it, with the method how to instruct it to the students.

ま え が き

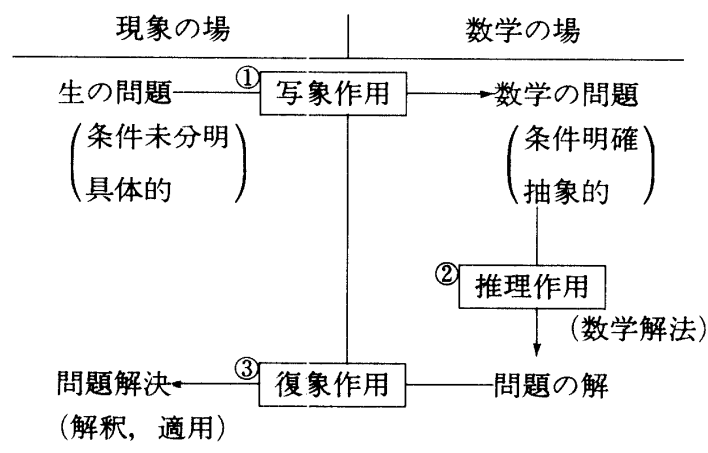
「数学の時間に学習したことが専門教科でよく活用される」ということは、工業系における数学教育の一つの大きな目標であり、願望である。しかし残念ながら、現状はこれが必ずしも十分に達成されていないように思われる。このために有効な一つの方法として、筆者は重要な「数学モデル」について重点的に指導することを提案する。

1. 応用数学と数学モデル

(1) 応用数学の基本形態

応用数学とは、種々の現象の場における諸問題の解明のために用いられる数学であり、本質的には右のような形態をとると考えられる。

このうち、工業応用数学は特に図一1のような形態をとる。



ここで工業の場から理工学を経て数学の場へ写象されることに注意したい。(このことについては具体例で後述する。)

(2) 数学モデルの意義

上記の応用数学にはいろいろなものが含まれるが、このうち多くの場合において頻繁に共通に用いられる問題 (problem) とその解法 (algorithm) の一かたまり (package) を「数学モデル」(mathematical model)

と名づける。これには、最大最小問題、固有値問題、微分方程式、等角写像、実験公式、有意差検定など大小いろいろのものが考えられる。応用数学全体は工業系のための用具であるが、「数学モデル」は一種の機器 (instrument) であるといえよう。これを十分使いこなすことが大切である。

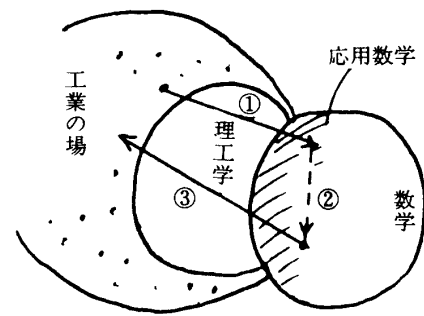


図-1

2. 数学モデルの具体例

(1) 数学モデルの分類

数学モデルにはいろいろなものがあるが、大きく次のようにいくつかの観点により分類することができる。

①取扱われる現象の性格により

a. 確定モデル (deterministic model)

必然的因果関係によって起る現象に関するもの

〔例〕 微分方程式, 差分方程式

b. 確率モデル (probabilistic model)

偶然的変動をもつ現象に関するもの

〔例〕 実験公式, 推定・検定

②変数の種類により

a. 連続モデル (continuous model)

連続変数に関するもの

〔例〕 微分方程式

b. 離散モデル (discrete model)

離散変数に関するもの

〔例〕 差分方程式, ネットワーク手法

③視点のとり方により

a. 微視的モデル (micro model)

局所的, 瞬間的な微小現象に関するもの

〔例〕 微分方程式

b. 巨視的モデル (macro model)

大域的、履歴的な集積現象に関するもの

〔例〕 積分方程式

④式の形により

a. 線形モデル (linear model)

一次形式で表わされるもの

〔例〕 線形微分方程式, 線形回帰

b. 非線形モデル (nonlinear model)

一次形式で表わされないもの

〔例〕 非線形微分方程式, 曲線回帰

⑤経時的変化の有無により

a. 動的モデル (dynamic model)

時間変数を含むもの

〔例〕 偏微分方程式, 確率過程

b. 静的モデル (static model)

時間変数を含まず, 静止的釣合いを表わすもの

〔例〕 連立方程式, 確率分布

ただし, これらはそれぞれの観点による分類であって, これらにまたがる大きなモデルもあり得る。たとえば最大最小問題, もっと一般的には最適化法はこれらすべてに関係している大きなモデルである。

(2) いくつかの具体例

次によく現われる基礎的なモデルの応用例をいくつか示す。

Model ①: 線形微分方程式

$$y'' + a^2 y = 0 \quad (a > 0)$$

〔例 1〕 ばねの自由振動

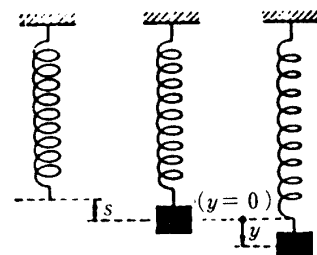
質量 m の物体によるばねの伸びを s , さらにこれを下方に引いて離れたときの時刻 t における伸びを $y(t)$ とすれば,

ニュートンの運動の第二法則とフックの法則により

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k(s + y)$$

$$mg = ks \quad (k: \text{ばね定数})$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{m} y$$



図— 2

$$y'' + a^2 y = 0 \quad (a = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$\downarrow$$

$$\text{解: } y = c_1 \cos at + c_2 \sin at$$

初期条件: $t = 0, y = \ell, v = \frac{dy}{dt} = 0$ を入れると

$$y = \ell \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

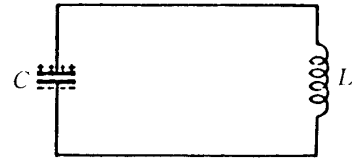
〔例2〕 LC 回路の過渡現象

図のような回路でコンデンサーを電圧 E に充電した後、インダクタンス L を通して放電したときの電荷 $q(t)$ は、

キルヒホッフの法則により

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$



図—3

$$y'' + a^2 y = 0 \quad (a = \frac{1}{\sqrt{LC}})$$

$$\downarrow$$

$$\text{解: } y = c_1 \cos at + c_2 \sin at$$

初期条件: $t = 0, q = CE, i = \frac{dq}{dt} = 0$ を入れると

$$q = CE \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

〔例3〕 長柱の挫屈 (両端回転)

長さ ℓ の長柱の上端に荷重 P を加えたときの弾性曲線 $y = f(x)$ を求める。

材料力学の基本方程式により

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

E : ヤング率

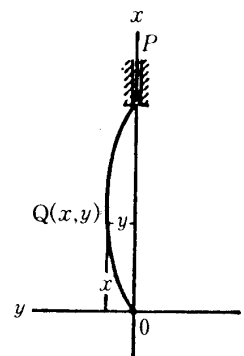
I : 柱の中立軸に関する断面の慣性モーメント

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y$$

$$y'' + a^2 y = 0 \quad (a = \sqrt{\frac{P}{EI}})$$

$$\downarrow$$

$$\text{解: } y = c_1 \cos at + c_2 \sin at$$



図—4

初期条件: $x = 0, y = 0; x = \ell, y = 0$ を入れると

$$y = C \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

これらの例から見られるように、Model ①が種々の現象の場において、それぞれの理工学の法則を通して共通に現われており、またその解はそれぞれの現象の場の初期条件により解釈処理されていることに注意されたい。なお定数係数線形微分方程式としてはさらに、次のモデルがより一般的である。Model ①'：

$$y'' + 2by' + a^2y = 0 \quad (a, b > 0)$$

この例としては、

〔例1'〕ばねの減衰振動

例1において物体の下方に図5のようにダッシュポット（緩衝筒）を設けると、速度に比例する減衰力が働くとすれば

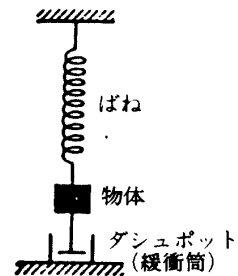
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - c \frac{dy}{dt} \quad (c: \text{比例定数})$$

$$y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0$$

$$y'' + 2by' + a^2y = 0$$

$$(b = \frac{c}{2m}, a = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

(解は省略)



図—5

〔例2'〕LRC回路の過渡現象

図6のような回路でコンデンサーに最初 Q_0 の電荷が充電されているとき、これを L, R を通して放電したときの電荷 $q(t)$ については

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0, \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$q'' + 2bq' + a^2q = 0$$

$$(b = \frac{R}{2L}, a = \frac{1}{\sqrt{LC}})$$

Model ②：最大最小問題（Lagrange の乗数法）

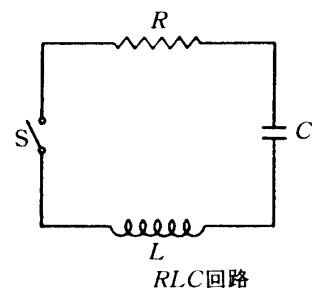
$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ のとき}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max(\text{or } \min)$$

(多条件の場合も含む)

解法としては

$$w = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda \varphi(x_1, \dots, x_n)$$



図—6

連立方程式

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = f_{x_i} - \lambda \varphi_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす x_1, \dots, x_n の値を求める。

この方法は極値の必要条件を与えるものであるが、理工学現象では最大値または最小値の存在が明らかなことが多いので、これだけで十分利用価値があり、よく用いられる便利なモデルである。

〔例1〕円柱形容器の経済寸法

円柱の底面の半径を r 、高さを h とすると

$$\text{容積} \quad V = \pi r^2 h$$

$$\text{表面積} \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

V を一定として S を最小にすると考える。

$$\begin{aligned} \varphi(r, h) &= \pi r^2 h - V = 0 \quad \text{のとき} \\ S &= f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= f(r, h) - \lambda \varphi(r, h) \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda(\pi r^2 h - V) \\ \begin{cases} w_r = 4\pi r + 2\pi h - 2\lambda\pi r h = 0 \\ w_h = 2\pi r - \lambda\pi r^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

これにより $2r = h$

よって直径と高さを等しくすればよい。

⑥ S を一定にして V を最大にすると考えても同様なことが上の計算からわかる。

またこの例題では前式より $h = V/\pi r^2$ 、これを代入して $S = f(r)$ として単純な最大最小問題としても求めることができるが、一般には必ずしも変数の消法ができるとは限らないので、この方法の方が便利である。

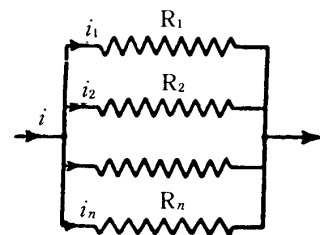
〔例2〕並列抵抗回路の熱量

図のような抵抗 R_1, \dots, R_n を並列に連結した回路に電流 i を通すと、各導線に流れる電流 i_1, \dots, i_n は各導線に発生するジュール熱の和 H が最小となるように分れるとすれば

$$\begin{aligned} i &= i_1 + \dots + i_n \\ H &= k(i_1^2 R_1 + \dots + i_n^2 R_n) \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= f(i_1, \dots, i_n) - \lambda \varphi(i_1, \dots, i_n) \\ &= k(i_1^2 R_1 + \dots + i_n^2 R_n) - \lambda(i_1 + \dots + i_n - i) \\ \begin{cases} w_{i_1} = 2ki_1 R_1 - \lambda = 0 \\ \vdots \\ w_{i_n} = 2ki_n R_n - \lambda = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

これより、 $i_1 R_1 = i_2 R_2 = \dots = i_n R_n$



図—7

よって電流 i は抵抗に反比例するように分れることがわかる。

〔例3〕 標本抽出における各層への標本割当

サンプリングでよく用いられる層別無作為抽出法で、全標本数 n を各層にそれぞれ n_1, n_2, \dots, n_k ずつ割当ててるのに、通常比例割当て($n_i \propto N_i$)が用いられるが、さらに各層のばらつき σ_i^2 、調査費用 c_i も考慮に入れるときは全調査費 c を一定として、推定誤差 $V(T)$ を最小にするようにする。すなわち

$$\sum_i c_i n_i = c \text{ (一定のとき)}$$

$$V(T) = \sum_i N_i^2 \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right) \frac{\sigma_i^2}{n_i} \rightarrow \min$$

$$w = f(n_1, \dots, n_k) - \lambda \varphi(n_1, \dots, n_k)$$

$$= \sum_i N_i^2 \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right) \frac{\sigma_i^2}{n_i} - \lambda (\sum_i c_i n_i - c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n_i} = \frac{-N_i^2 \sigma_i^2}{n_i^2} + \lambda c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$\frac{N_i^2 \sigma_i^2}{c_i n_i} = \lambda \quad \therefore n_i = \sqrt{\lambda} \frac{N_i^2 \sigma_i^2}{\sqrt{c_i}}$$

$$\therefore n_i \propto N_i \sigma_i^2 / \sqrt{c_i}$$

よって各層の大きさとばらつきに比例し、各層の調査費用 c_i の平方根に反比例するように割当てをすればよい。(Deming 法)

〔例4〕 最大エントロピー

試行の確率分布が

事象	A_1	A_2	\dots	A_k	計
確率	P_1	P_2	\dots	P_k	1

のとき、 $H = -\sum_i P_i \log_2 P_i$ をこの試行のエントロピー（平均情報量）といわれる。この最大値を求める。

$$\sum_i P_i = 1 \text{ のもとで}$$

$$H = -\sum_i P_i \log_2 P_i \rightarrow \max$$

$$w = f(P_1, \dots, P_k) - \lambda \varphi(P_1, \dots, P_k)$$

$$= -\sum_i P_i \log_2 P_i - \lambda (\sum_i P_i - 1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial P_i} = -\log_2 P_i - 1 - \lambda = 0$$

$$\log_2 P_i = -\lambda - 1$$

$$\therefore P_1 = P_2 = \dots = P_k = \frac{1}{k}$$

このとき

$$H_{\max} = k \times \frac{1}{k} \times \log_2 k = \log_2 k$$

Model ③：固有値問題

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= 0 \quad (\text{固有値}) \\ (A - \lambda E)\vec{x} &= \vec{0} \quad (\text{固有ベクトル}) \end{aligned}$$

このモデルは現象から直接に写出されないが、式を変形誘導してこの形に帰着できる場合がよく起る。

〔例1〕 2次曲線の主軸問題

2次曲線 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ のグラフを知るため、これの標準形を求める。

$$\text{左辺} = (x, y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これは次の固有値問題に帰着する。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \quad \text{①} \\ (A - \lambda E)\vec{x} &= \vec{0} \quad \text{②} \end{aligned}$$

固有方程式①を解くと $\lambda = 2, 8$

②より固有ベクトルを求めると

$$\begin{aligned} \lambda = 2 \text{ のとき} \quad \vec{x} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 8 \text{ のとき} \quad \vec{x} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

次の直交変換（軸を45度回転）を行う。

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

与えられた方程式は $2x'^2 + 8y'^2 = 16$

すなわち $\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{2} = 1$

〔例2〕 主成分分析

図において各点からの距離の平方の和が最小となる直線の方法余弦 ℓ_1, ℓ_2 を求める。

そのためには

$$\begin{aligned} \ell_1^2 + \ell_2^2 &= 1 \text{ のもとで} \\ S &= \sum_i (\ell_1 x_{1i} + \ell_2 x_{2i})^2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

これは Model ②であるから

$$\begin{aligned} w &= f(\ell_1, \ell_2) - \lambda \varphi(\ell_1, \ell_2) \\ &= \sum_i (\ell_1 x_{1i} + \ell_2 x_{2i})^2 - \lambda (\ell_1^2 + \ell_2^2 - 1) \\ \begin{cases} \partial w / \partial \ell_1 = 2 \sum_i (\ell_1 x_{1i} + \ell_2 x_{2i}) x_{1i} - 2\lambda \ell_1 = 0 \\ \partial w / \partial \ell_2 = 2 \sum_i (\ell_1 x_{1i} + \ell_2 x_{2i}) x_{2i} - 2\lambda \ell_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{cases} S_{11}\ell_1 + S_{12}\ell_2 - \lambda\ell_1 = 0 \\ S_{12}\ell_1 + S_{22}\ell_2 - \lambda\ell_2 = 0 \end{cases} \quad (S_{11} = \sum_i x_{1i}^2, S_{22} = \sum_i x_{2i}^2, S_{12} = \sum_i x_{1i}x_{2i})$$

これが自明でない解をもつための条件は

$$\begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

これは

$$A = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \text{ とするとき}$$

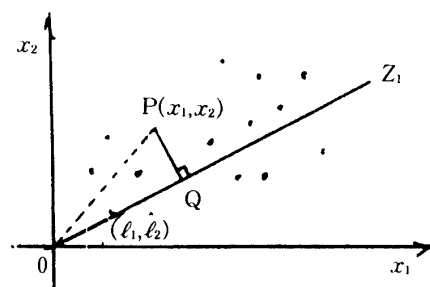
$$|A - \lambda E| = 0$$

となり固有値モデルとなる。

$$\begin{aligned} \text{また } S &= \ell_1^2 \sum_i x_{1i}^2 + 2\ell_1 \ell_2 \sum_i x_{1i} x_{2i} + \ell_2^2 \sum_i x_{2i}^2 \\ &= \ell_1^2 S_{11} + 2\ell_1 \ell_2 S_{12} + \ell_2^2 S_{22} \\ &= \ell_1 (\ell_1 S_{11} + \ell_2 S_{12}) + \ell_2 (\ell_1 S_{12} + \ell_2 S_{22}) \\ &= \ell_1 \lambda \ell_1 + \ell_2 \lambda \ell_2 \\ &= \lambda (\ell_1^2 + \ell_2^2) = \lambda \end{aligned}$$

となるから最大の λ に対する固有ベクトル

$$(A - \lambda E) \vec{\ell} = \vec{0}$$



図— 8

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$$

を求めることに帰着する。

〔例 3〕 連立線形微分方程式の代数的解法

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

行列記法で表わすと

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 e^{\lambda t} \\ \lambda y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

これらを上の式へ代入し $e^{\lambda t}$ で約すると

$$\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{x}_0, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \quad \text{とおくと}$$

$$\lambda \vec{x}_0 = A \vec{x}_0$$

となり固有値問題となる。

すなわち

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= 0 \\ (A - \lambda E) \vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

これを解き $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$

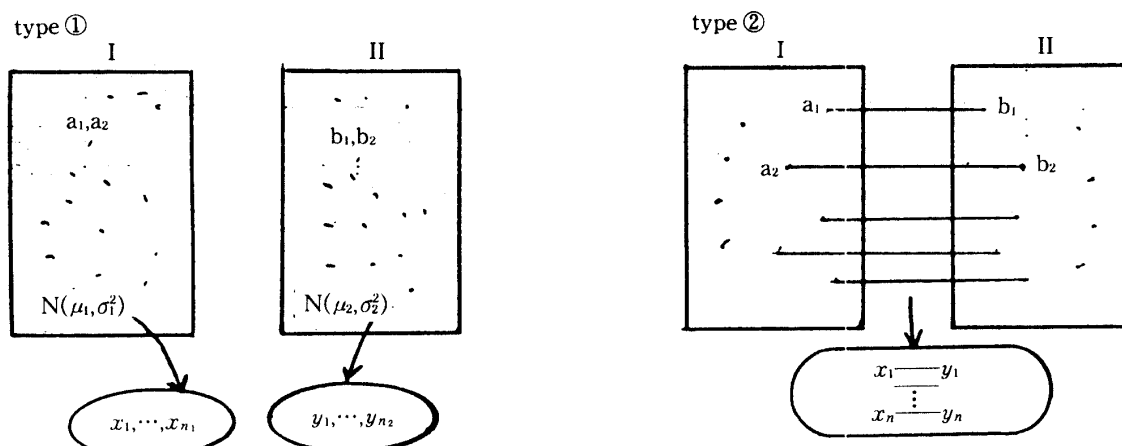
固有ベクトルを求めて

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_1 \text{ のとき } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \lambda = \lambda_2 \text{ のとき } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 x_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_1 y_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 y_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Model ⑩ 平均値の有意差検定



図— 9

type ①に二つの場合がある。

a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ とみられる場合

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$t = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \quad \text{は}$$

自由度 $(n_1 + n_2 - 2)$ の t 分布に従う。

b) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ とみられる場合

$$t = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{\frac{V_1}{n_1} + \frac{V_2}{n_2}} \quad \text{は近似的に}$$

自由度 ϕ の t 分布に従う。

ただし

$$\frac{1}{\phi} = \frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1 - c)^2}{n_2 - 1}$$

$$c = \frac{V_1}{n_1} / \left(\frac{V_1}{n_1} + \frac{V_2}{n_2} \right)$$

type ②の場合

$x - y = d$ とすると

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \quad \left(\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n - 1} \right)$$

は自由度 $(n - 1)$ の t 分布に従う。

〔例 1〕 機械製品の有意差

二つの機械 A, B で作られた製品から、それぞれ試料をとってしらべ次のデータを得た。

(A) x_i	13.2, 13.1, 14.1, 13.5, 13.8, 14.3, 13.1, 13.3
(B) y_i	14.6, 13.9, 13.6, 14.1, 14.1, 13.7

(cm)

両機械の製品に有意差があるか？

(解) type ①のモデルが適するが a, b の判定をするため、まず等分散検定を行う。

データより $\bar{x} = 13.55$, $\bar{y} = 14.00$

$$S_1 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 1.52, S_2 = \sum_j (y_j - \bar{y})^2 = 0.64$$

$$F = \frac{S_1}{n_1 - 1} / \frac{S_2}{n_2 - 1} = 1.69$$

$$F_8^7(0.025) = 6.85$$

等分散仮説は棄却できないので case a のモデルを用いる。

$$\hat{\sigma}^2 = (1.52 + 0.64) / (8 + 6 - 2) = 0.18$$

$$t = \frac{13.55 - 14.00}{\sqrt{0.18 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right)}} = 1.96$$

$$t(12, 0.05) = 2.179$$

よって両機械の製品の平均値に有意差が認められない。

〔例2〕 鉄板の厚さ

鉄板の試料6枚について、それぞれの中央と端の厚さを測定して次のデータを得た。

端の方が中央より薄いといえるか？

(中央) x	3.22	3.16	3.20	3.32	3.28	3.25
(端) y	3.20	3.09	3.22	3.25	3.25	3.18

(mm)

(解) 同一の鉄板について中央と端の厚さを測定しているから type ②のモデルが適する。

$$d = x - y \quad | \quad 0.02 \quad | \quad 0.07 \quad | \quad -0.02 \quad | \quad 0.07 \quad | \quad 0.03 \quad | \quad 0.07 \quad |$$

$$\bar{d} = 0.04, \hat{\sigma}^2 = 13.6 \times 10^{-4}$$

$$t = 0.04 / \sqrt{13.6 \times 10^{-4} / 6} = 2.66^*$$

$$t(5, 0.10) = 2.02, t = (5, 0.02) = 3.36$$

よって端の方が薄いとみられる。〔 $\alpha = 5\%$ 〕

⑨この例に type ①を適用してみると、case a になり、 $t = 0.781$, $t(10, 0.10) = 1.812$ で有意差が認められないことになる。このように同じ問題でも適用するモデルが異なれば結論も異なってくるのでモデルの適確な選択が大切である。もちろんこの例では題意から type ②をとるべきである。

3. 数学モデルの指導について

以上のいくつかの具体例により「数学モデル」の様相が明確になったが、これを学生に実際に指導していくには次の諸点に留意しなければならない。

(1) 数学モデルの基礎的理解とその印象化

前述のように、数学モデルは問題とその解法アルゴリズムのパッケージであるから、まず基礎的によく理解させること、その簡単ないろいろの場面の適用例をなるべく豊富に与えてこれらの例から抽象させることが望ましい。さらにこれを印象づけるため、何らかのシェーマ(schema)で視覚化するのが効果的であると考えられる。(前節の具体例参照)このような指導は重要なモデルについて重点的に行うことが大切である。また実例を集めた問題集を作成すると有効である。

(2) 工学現象と理工学法則の理解

現象の場から数学の場へ写象するには、まず現象そのものを十分理解することが必要である。また現象の場における理工学の法則、特に物理学の法則をよく理解していなければ立式ができないのである。これを数学に責任転嫁していることがよくあることに注意しなければならない。

お わ り に

工業系の数学教育において「数学モデル」のもつ意義と効用およびその指導の方法について具体例により基礎的考察をまとめたが、さらに实际的にこのようなモデルのリストとその実例集を作成することが要請される。しかし、それには長期の継続的研究が必要であるので、今後逐次まとめていきたいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 近藤次郎：数学モデル（現象の数式化）〔丸善〕1976
- 2) 近藤次郎：数学モデル入門〔日科技連〕
- 3) C. R. Wylie, JR. : Advanced Engineering Mathematics (3rd ed.)〔好学社〕1966
- 4) 高橋進一：工業技術数学〔三省堂〕1942
- 5) 守田勝彦：工業応用数学（基礎工業数学講座4）〔朝倉書店〕1964
- 6) 守田勝彦：工業数学演習〔朝倉書店〕1968
- 7) 弥永学ほか4名：理工学のための応用数学Ⅰ〔朝倉書店〕1985
- 8) 小沢文夫：理工学のための微分方程式〔オーム社〕1984
- 9) 藤沢偉作：楽しく学べる多変量解析法〔現代数学社〕1985
- 10) 宮本一郎：推定・検定（品質管理基礎コーステキスト）〔富山県経営者協会〕1968