拡張されたマックスウェル方程式とランダウゲージの場の方程式

高　木　秀　男

Extended Maxwell Equations and Field Equations in the Landau Gauge

Hideo TAKAKI

It is shown that Maxwell equations is naturally extended by means of the spinor formalism and the quaternion formalism. It is pointed out that while the field equations of the electromagnetic field in the Landau gauge are a natural generalization of Maxwell equations, they are a special case of the extended Maxwell equations. Symmetries of the extended Maxwell equations are studied.

1　序　　論

電磁場の量子化の問題は光子の質量が0であるために，色々むつかしい問題が存在するという事がよく知られている。即ち，ゲージ不変なラグランジアン密度から出発したのでは量子化がうまくいかないので,始めから共変なゲージを指定する様な理論構成をとる事が必要である。Nakanishi[1]は $A_\mu(x)$ の他に補助のスカラー場 $B(x)$ を導入することによって，明白に共変な量子電気力学の理論を提案した。

Lagrangian密度は

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f_{\mu\nu}+B\partial_\mu A_\mu+\frac{1}{2}\alpha B^2+A_\mu j_\mu \tag{1}$$

によって与えられる。

ここで

$\alpha=1$ ならば Feynman ゲージ

$\alpha=0$ ならば Landau ゲージである。

この Lagrangian 密度から得られる場の方程式

$$\begin{aligned}&\Box A_\mu-\partial_\mu\partial_\nu A_\nu-\partial_\mu \dot{B}=-j_\mu \qquad (\Box=\Delta-\partial^2/\partial t^2)\\ &\partial_\mu A_\mu+\alpha B=0\end{aligned} \tag{2}$$

は Maxwell 方程式とは異なるが，もし，

$B^+(x)\mid \mathrm{phys}>=0$

という補助条件を課し，physical states で(2)の期待値をとれば，

$$<\mathrm{phys}\mid \Box A_\mu + j_\mu \mid \mathrm{phys}> = 0$$
$$<\mathrm{phys}\mid \partial_\mu A_\mu \mid \mathrm{phys}> = 0 \qquad (4)$$

となる。即ち観測にかかるのは(2)の期待値であるとすれば，スカラー光子に等価なB場はノルムが0であるためにphysicalであるが観測にはかからず，ローレンツ共変で首尾一貫した理論が作れることが知られている。[1]

一方物理学の基本的な法則が四元数を使って表わすことが出来るという事がかなり以前から知られていた。そして最近又，四元数を使う利点が見直され，色々な人々によってこの問題が取り上げられている。

前の論文[2]ではLandauゲージを使った場合の電磁場に対する場の方程式がMaxwell方程式の自然な一般化になっているという事を四元数形式を使って示し，Landauゲージの場の理論の重要性を指摘した。この論文では，前の指摘をさらに発展させ，拡張されたMaxwell方程式の四元数形式以外の共変形式にも言及し，その相互関係，対称性，ならびにLandauゲージの場の理論との関係を調べた。

2　拡張されたMaxwell方程式のスピノル形式

Maxwell方程式は場の古典論においても場の量子論においてもその発展に重要な地位を占めている。Maxwell方程式は普通ベクトル形式で

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \qquad (5)$$

と表わされるか，又はテンソル形式で

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu$$
$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \qquad (6)$$

と表わされる。しかしMaxwell方程式はこれらの形式以外の共変形式でも表わすことができるという事が知られている。[3]

Maxwell方程式の4成分スピノル形式は次の様にして得られる。

複素数の電磁場ベクトルを

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} - i\boldsymbol{E} \qquad (7)$$

で定義し，2成分スピノルと4成分スピノルをそれぞれ次の様に定義する。

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} G_3 \\ G_1 + iG_2 \end{pmatrix} \qquad r_1 = i\begin{pmatrix} -\rho + j_3 \\ j_1 + ij_2 \end{pmatrix}$$
$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -G_1 + iG_2 \\ G_3 \end{pmatrix} \qquad r_2 = i\begin{pmatrix} -j_1 + ij_2 \\ \rho + j_3 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \qquad r=\begin{pmatrix}-ir_2\\ ir_1\end{pmatrix} \tag{9}$$

するとMaxwell方程式は次の様に表わされる。

$$\tilde{\gamma}_\nu\partial_\nu\phi(x)=r(x) \tag{10}$$

ただし,

$$\begin{aligned} &x=(x_k,\ it) && \partial=\{\partial_k,\ -i\partial_t\}\\ &\tilde{\gamma}=(\gamma_k,\ \gamma_4\gamma_5) && \gamma_5=\gamma_4\gamma_1\gamma_2\gamma_3\\ &\gamma_4=\begin{pmatrix}\mathrm{I}&0\\0&-\mathrm{I}\end{pmatrix} && \gamma_k=\begin{pmatrix}0&-i\sigma_k\\ i\sigma_k&0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

である。

(10)とDirac方程式

$$\gamma_\nu\partial_\nu\psi(x)=-m\psi(x) \tag{12}$$

の類似は注目に値する。

今(7), (8), (9)式の$\boldsymbol{G}$, ϕ_1, ϕ_2, ϕを

$$\begin{aligned}&G_\mu=H_\mu-iE_\mu\\ &\boldsymbol{\Phi}_1=\begin{pmatrix}-G_0+G_3\\ G_1+iG_2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi}_2=\begin{pmatrix}-G_1+iG_2\\ G_0+G_3\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_1\\ \boldsymbol{\Phi}_2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

の様に拡張してみると, (10)は

$$\tilde{\gamma}_\nu\partial_\nu\boldsymbol{\Phi}(x)=r(x) \tag{14}$$

となる。

この式はベクトル形式で書けば,

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\partial E_0}{\partial t}=\rho\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{H}-\frac{\partial H_0}{\partial t}=0\\ &\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\nabla E_0=\boldsymbol{j}\\ &\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\nabla H_0=0\end{aligned} \tag{15}$$

である。

ここで我々は(15)を拡張されたMaxwell方程式と考えれば, $H_0=0$, $E_0=B$という特別な場合がLandauゲージにおける電磁場の方程式となるという事を指摘したい。逆に言えば, これはLandauゲージにおける電磁場の方程式がMaxwell方程式の自然な一般化になっているという事を示している。(1)のLagrangian密度から出発した理論では, A_μは$\alpha=1$のとき$\Box A_\mu=-j_\mu$を満たし, $\alpha=0$のときLorentz条件を満足する。これがFeynmanゲージとLandauゲージが

特別な地位を占めている理由である。従って上の我々の指摘はLandauゲージの重要性を示唆していると考えることが出来る。

さらに(8), (9)の r_1, r_2, r を

$$R_1=i\begin{pmatrix}-(\rho+i\sigma)+(j_3+ig_3)\\(j_1+ig_1)+i(j_2+ig_2)\end{pmatrix}$$
$$R_2=i\begin{pmatrix}-(j_1+ig_1)+i(j_2+ig_2)\\(\rho+i\sigma)+(j_3+ig_3)\end{pmatrix} \tag{16}$$
$$R=\begin{pmatrix}-iR_2\\iR_1\end{pmatrix}$$

と拡張すれば(14)は

$$\tilde{\gamma}_\nu\partial_\nu\Phi(x)=R(x) \tag{17}$$

となり，これはベクトル形式で書けば

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\partial E_0}{\partial t}=\rho\\&\nabla\cdot\boldsymbol{H}-\frac{\partial H_0}{\partial t}=\sigma\\&\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\nabla E_0=\boldsymbol{j}\\-&\nabla\times\boldsymbol{E}-\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\nabla H_0=\boldsymbol{g}\end{aligned} \tag{18}$$

である。即ち(18)はちょうど(15)を磁気単極子を含む場合に拡張した式に成っている。(18)は2つの電磁ポテンシャル A_μ, M_μ を使えば[4]

$$\begin{aligned}&\Box A_\mu-\partial_\mu E_0=-j_\mu\\&\Box M_\mu-\partial_\mu H_0=-g_\mu\\&\partial_\mu A_\mu=0\\&\partial_\mu M_\mu=0\end{aligned} \tag{19}$$

と書ける。ただし，電磁場テンソルは

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\lambda M_\sigma \tag{20}$$

の様に修正される。(19)は(2)の一般化と考えることが出来，次の Lagrangian 密度から導かれるという事は容易にチェック出来る。

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+E_0\partial_\mu A_\mu+H_0\partial_\mu M_\mu+A_\mu j_\mu+M_\mu g_\mu \tag{21}$$

3 拡張された Maxwell 方程式の四元数形式と対称性

(17)の左から γ_5 をかけると(17)は2成分スピノルの2つの式に分離する。即ち,

$$\sigma_\mu \partial_\mu \Phi_\alpha(x) = R_\alpha(x) \qquad (\alpha=1,2) \tag{22}$$

ただし，$\sigma_4 = iI$ である。

souce term $R(x)$を 0 とすれば，(22)はニュートリノ場に対する Weyl 方程式と同じ形になる。

又，(22)は次の様にして行列形式に変形することが出来る。2 行 2 列の行列を

$$\Psi = (\Phi_1 \quad -\Phi_2) = \begin{pmatrix} -G_0+G_3 & G_1-iG_2 \\ G_1+iG_2 & -G_0-G_3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = (R_1 \quad -R_2) = i\begin{pmatrix} -\rho-i\sigma+j_3+ig_3 & j_1+ig_1-ij_2+g_2 \\ j_1+ig_1+ij_2-g_2 & -\rho-i\sigma-j_3-ig_3 \end{pmatrix} \tag{23}$$

の様に定義すれば(22)は

$$\sigma_\mu \partial_\mu \Psi(x) = \Sigma(x) \tag{24}$$

となる。そしてさらに(24)は四元数の単位として I と $i\sigma_\kappa$ を選べば四元数形式で次の様に書ける。

$$\sigma_\mu \partial_\mu \{\sigma_\nu(H_\nu - iE_\nu)\} = i\sigma_\mu(j_\mu + ig_\mu) \tag{25}$$

一方 Majernik and Nagy は独立に磁気単極子を含む次の様な拡張された Maxwell 方程式の四元数形式を提案した。[5]

$$D\Pi = I \tag{26}$$

ここで D，Π，I はそれぞれ quaternion differential operator, field quaternion, current quaternion で次の様に定義される。

$$\begin{aligned} D &= i\frac{\partial}{\partial t} + e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \Pi &= (E_0 - iH_0) + (E_k - iH_k)e_k \\ I &= (-\rho + i\sigma) - (g_k + ij_k)e_k \end{aligned} \tag{27}$$

又，e_k は $e_k^2 = -1$，$e_i e_j = -e_j e_i = \epsilon_{ijk} e_k$ を満足する四元数の単位である。

(26)は普通のベクトル形式で書けば，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} - \frac{\partial H_0}{\partial t} &= \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} + \frac{\partial E_0}{\partial t} &= \sigma \\ \nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \nabla H_0 &= \boldsymbol{j} \\ -\nabla \times \boldsymbol{E} - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \nabla E_0 &= \boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{28}$$

となる。(28)は(18)とは異なる方程式であり，Landau ゲージの場の方程式とはつながりを持たない。しかし電磁場にベクトル条件 $E_0 = H_0 = 0$ を仮定すれば，(28)は(18)と一致する。

(28)と(18)を方程式の対称性という点から比較してみよう。(18)，(28)は共に dual 変換

$$E_\mu \longrightarrow H_\mu \qquad H_\mu \longrightarrow -E_\mu$$
$$j_\mu \longrightarrow g_\mu \qquad g_\mu \longrightarrow -j_\mu \tag{29}$$

に対して対称であり，より一般的には

$$E_\mu \longrightarrow E'_\mu = E_\mu \cos\theta + H_\mu \sin\theta$$
$$H_\mu \longrightarrow H'_\mu = -E_\mu \sin\theta + H_\mu \cos\theta$$
$$j_\mu \longrightarrow j'_\mu = j_\mu \cos\theta + g_\mu \sin\theta \tag{30}$$
$$g_\mu \longrightarrow g'_\mu = -j_\mu \sin\theta + g_\mu \cos\theta$$

に対して対称である。

一方，空間反転や時間反転に対しては，(18)は E_0，H_0が

$$PE_0P^{-1} = E_0 \qquad TE_0T^{-1} = -E_0$$
$$PH_0P^{-1} = -H_0 \qquad TH_0T^{-1} = H_0 \tag{31}$$

と変換すれば対称である。それに対して(28)は E_0，M_0が

$$PE_0P^{-1} = -E_0 \qquad TE_0T^{-1} = E_0$$
$$PH_0P^{-1} = H_0 \qquad TH_0T^{-1} = -H_0 \tag{32}$$

と変換しないと対称にならない。従って空間反転や時間反転に対する対称性を要求する限り，(28)は拡張されたMaxwell方程式としては不適当といえる。

4　議論と結論

Maxwell方程式を普通のベクトル形式やテンソル形式で書いていたのでは，磁気単極子を含む場合の拡張は別にして，それをさらに拡張出来るものかどうかという点については明らかではない。しかしスピノル形式や四元数形式で書くとMaxwell方程式は自然にさらに拡張出来る事がわかった。しかもその拡張されたMaxwell方程式がLandauゲージの場の方程式と関係づけられた。即ちLandauゲージの場の方程式はMaxwell方程式のすなおな一般化であると同時に，さらにそれも拡張出来るという事がわかった。最近四元数利用の利点を見直す人々が出ているが，上記の主張も四元数利用の利点と考えてよいであろう。

Maxwell方程式を四元数形式で書くことによって拡張した例はMajernik and Nagy, Sachs and Schwebelなどの他にもImaeda(6)の例がある。Imaedaは物理学の統一という観点からbiquaternionを使ったMaxwell方程式の新しい形式を提案している。しかしながらこれらの例はいずれも四元数使用の目的が，Maxwell方程式の拡張とか，Landauゲージの場の方程式との関係を論ずる事ではなかったので，四元数形式で書いた場の方程式をMaxwell方程式に一致させるために，field quaternionにベクトル条件 $E_0 = H_0 = 0$ を課し，E_0，H_0 の積極的利用を全く考えていない。この点が本論文との重要な違いである。

参 考 文 献

1) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **51** (1972), 1.
2) H. Takaki, Quaternion Form of Maxwell Equations and Scalar Photon, preprint.
3) M. Sachs and S. L. Schwebel, J. Math. Phys. **3** (1962), 843.
4) M. Y. Han and L. C. Biedenharn, Nuovo Cim. **2A** (1971), 544.
5) V. Majernik and M. Nagy, Lett. Nuovo Cim. **16** (1976), 265.
6) K. Imaeda, Nuovo Cim. **32B** (1976), 138.

（1977年 3 月18日受理）