Maxwell-Dirac 方程式の一般的性質

高 木 秀 男・大 高 成 介

General Properties of Maxwell-Dirac Equation

Hideo TAKAKI and Sigeyuki OTAKA

It is proven that the usual conservation law of energy and momentum can be drived without hypothesis by the Maxwell-Dirac equation and the Lorentz-Dirac equation, and an action integral exists from which they can be derived when appling the principle of least action.

§ 1 Introduction

電気と磁気の対称性を主張して Dirac[1] によって初めて導入された magnetic monopole の理論は，今までの Maxwell equation をより一般化した方程式（以下この方程式を Maxwell-Dirac equation と呼ぶ）から出発して電荷と磁荷の量子化を説明するなどの成果をあげ，多くの理論的 speculation と研究の源となっている。一方 Dirac の理論的予言にもかかわらず実験的には未だに magnetic monopole は発見されておらず[2]，理論的にもユニタリーな S-matrix [3),4)] および Lagrangian formalism などが出来ない理由により，[5),6)] Dirac 理論に否定的な論文が続いた。しかし magnetic monopole の存在は classical physics においても quantum physics においても決定的な役割を演じており，その重要性は少しも変わらない。すなわち quantum theoretical level では電荷の量子化を説明する唯一のものであり，classical level においても電気と磁気の対称性のために必要である。実験レベルの未発見については理論的にもエネルギーの点で説明されており，[5] 理論的な面については今後の発展によって解決される問題であると考えられる。この様な考えのもとで特に注目されるのが Schwinger の一連の仕事[7] で magnetic monopole の概念を strongly interacting の substructure に結びつけて考察している。また最近では dyon（電荷と磁荷の両方を持つ粒子）の理論を発表し，その quark との類似性および独創性によって今後の応用発展が期待されている。一方 Dirac のアイデアを発展させるためには Maxwell-Dirac equation の正当性を主張することが必要であり，そのためには基本的な場の法則が当然満足すべき条件を満たすことを示す必要がある。Han and Biedenharn[8] は Maxwell-Dirac equation の dyality invariance を Hertz vector を使って詳細に研究している。また高木・大高[9] はすでに磁荷が擬スカラー（すなわち，$PgP^{-1}=-g$，$TgT^{-1}=-g$）であると仮定することによって空間反転，時

間反転に対して Maxwell-Dirac equation が不変であることを示し，更にその正当性を明らかにするために Maxwell-Dirac equation と Lorentz-Dirac equation からエネルギー保存則と運動量保存則を導びいている。

§2では従来の Maxwell equation, それを dyality transformation して得られる purely magnetic world の Maxwell equation, および Maxwell-Dirac equation に対して2つの4元ポテンシャル A_μ と M_μ を定義し，またテンソル型式化を行ない，それらを用いてエネルギー保存則と運動量保存則を示す。

ところで Rohlrich[5], Rosenbaum[6] 等は適当な補足条件をつけなければ満足すべき local action principle は存在しないと結論している。しかしながらこれは彼等の論文で charged particle と magnetic monopole に対して別々の運動方程式を使っているためである。§3では無理な補足条件を加えないで素直に拡張された Local Lagrangian formalism によって Maxwell-Dirac equation と Lorentz-Dirac equation 両方を導びき，満足すべき local action principle の存在が可能であることを明らかにする。

§2　エネルギー保存則と運動量保存則

最初に電荷のみ，磁荷のみ，およびそれら両方が存在する各々の場合の電磁場方程式を示し，次に Maxwell-Dirac equation と Lorentz-Dirac equation を使ってエネルギー保存則と運動量保存則を導びけることを示し，Maxwell-Dirac equation の正当性を主張する。

purely electric world の場合の電磁場方程式は

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho, & \nabla\times\boldsymbol{B}-\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, & \nabla\times\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \end{cases} \tag{2-1}$$

で与えられ，

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{2-2}$$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} \tag{2-3}$$

とすれば（ここで $\varepsilon_{1233}=1$ を基準とし，添字が偶置換であれば1，奇置換であれば－1とする。），式（2－1）は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\square A_\mu=j_\mu, \quad \left(\square=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right) \\ \dfrac{\partial \widetilde{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0 \end{cases} \tag{2-4}$$

となる。ただし

$$j_\mu = (\boldsymbol{j},\ i\rho) \tag{2—5}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{2—6}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad (A_4 = i\Phi) \tag{2—7}$$

である。

purely magnetic world の場合の電磁場方程式は

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E}' = 0, & \nabla \times \boldsymbol{B}' - \dfrac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}' = -\sigma, & -\nabla \times \boldsymbol{E}' - \dfrac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} = \boldsymbol{g} \end{cases} \tag{2—8}$$

で与えられ，

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial M_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial M_\mu}{\partial x_\nu} \tag{2—9}$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} G_{\lambda\sigma} \tag{2—10}$$

とすれば，式（2—8）は

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \Box M_\mu = g_\mu \tag{2—11}$$

$$\frac{\partial \tilde{G}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{2—12}$$

となる。ただし

$$g_\mu = (\boldsymbol{g},\ i\sigma) \tag{2—13}$$

$$\boldsymbol{B}' = \nabla \psi + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}, \quad (M_4 = i\psi) \tag{2—14}$$

$$\boldsymbol{E}' = \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{2—15}$$

である。

electric and magnetic world の場合の電磁場方程式は

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathfrak{E} = \rho, & \nabla \times \mathfrak{B} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \\ \nabla \cdot \mathfrak{B} = \sigma, & -\nabla \times \mathfrak{E} - \dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \boldsymbol{g} \end{cases} \tag{2—16}$$

で与えられ，

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}-\tilde{G}_{\mu\nu} \tag{2—17}$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}=\tilde{F}_{\mu\nu}+G_{\mu\nu} \tag{2—18}$$

とすれば，式（2—16）は

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=j_\mu \tag{2—19}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=g_\mu \tag{2—20}$$

となる。式（2—2），（2—3），（2—9），（2—10），（2—19）および（2—20）より次の関係が成立する。

$$F_{ij}=B_k \tag{2—21}$$

$$\tilde{F}_{ij}=-E_k \tag{2—22}$$

$$G_{ij}=E_k' \tag{2—23}$$

$$\tilde{G}_{ij}=B_k' \tag{2—24}$$

$$\mathfrak{F}_{ij}=B_k-B'_k=\mathfrak{B}_k \tag{2—25}$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{ij}=-E_k+E_k'=-\mathfrak{E}_k \tag{2—26}$$

ただし i，j，$k=x$，y，z を意味する。

ここで

$$T_{\mu\nu}=\mathfrak{F}_{\mu\lambda}(x)\,\mathfrak{F}_{\lambda\nu}(x)+\frac{1}{4}\,\delta_{\mu\nu}\mathfrak{F}_{\lambda\sigma}(x)\mathfrak{F}_{\lambda\sigma}(x) \tag{2—27}$$

なる量を考えると

$$T_{44}=\frac{1}{2}\,\{\boldsymbol{E}(x)\boldsymbol{E}(x)+\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{B}(x)\} \tag{2—28}$$

$$T_{i4}=-i\,\{\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\} \tag{2—29}$$

$$T_{ij}=\left\{E_i(x)\,E_j(x)-\frac{1}{2}\,\delta_{ij}\boldsymbol{E}(x)\,\boldsymbol{E}(x)\right\}+\left\{B_i(x)\,B_j(x)-\frac{1}{2}\,\delta_{ij}\boldsymbol{B}(x)\,\boldsymbol{B}(x)\right\} \tag{2—30}$$

であるから

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} T_{ij} & T_{i4} \\ T_{4j} & T_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{ij} & -iS_i \\ -iS_j & w \end{pmatrix} \tag{2—31}$$

と書くことができる。次に式（2—27）の4次元的発散をとれば

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}=\frac{\partial \mathfrak{F}_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}\mathfrak{F}_{\mu\nu}(x)+\frac{\partial \mathfrak{F}_{\lambda\nu}(x)}{\partial x_\nu}\mathfrak{F}_{\mu\nu}(x)+\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{F}_{\lambda\sigma}(x)}{\partial x_\nu}\mathfrak{F}_{\lambda\sigma}(x)$$

また第1項と第3項の和は

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{\mu\lambda}(x)}{\partial x_\nu}\mathfrak{F}_{\lambda\nu}(x)+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{F}_{\lambda\sigma}(x)}{\partial x_\mu}\mathfrak{F}_{\lambda\sigma}(x)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \mathfrak{F}_{\mu\lambda}(x)}{\partial x_\nu}\mathfrak{F}_{\lambda\nu}(x)+\frac{\partial \mathfrak{F}_{\nu\lambda}(x)}{\partial x_\lambda}\mathfrak{F}_{\lambda\nu}(x)+\frac{\partial \mathfrak{F}_{\lambda\nu}(x)}{\partial x_\mu}\mathfrak{F}_{\lambda\nu}(x)\right\}$$

$$=\tilde{\mathfrak{F}}_{\nu\lambda}(x)\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}_{\nu\lambda}(x)}{\partial x_\nu}$$

$$=\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\lambda}(x)g_\lambda \tag{2—32}$$

$$\therefore \frac{\partial T_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}=\mathfrak{F}_{\mu\lambda}(x)j_\lambda(x)+\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\lambda}(x)g_\lambda(x) \tag{2—33}$$

ここで$\mu=4$ の場合を考えると式（2—33）は

$$-\nabla\cdot S(\boldsymbol{x},\ t)-\frac{\partial W(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},\ t)+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\ t)\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\ t) \tag{2—34}$$

そこで

$$\begin{cases} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},\ t)=e\boldsymbol{z}(t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(t)) \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\ t)=g\boldsymbol{z}(t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(t)) \end{cases} \tag{2—35}$$

とおき

$$\int d^3x\left\{e\boldsymbol{z}(t)\delta^3(x-z(t))+g\boldsymbol{z}(t)\delta^3(x-z(t)\right\}=\frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{z}(t)\right)^2$$

であるゆえ，式（2—34）を空間積分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}(t)+W(t)\right)=-\int d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\ t) \tag{2—36}$$

これはエネルギー保存則である。ただし m は dyon の質量である。

次に $\mu=i$ $(i=x,\ y,\ z)$ とおいてやると式（2—33）は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\ t)-\frac{\partial\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t}$$
$$=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\sigma(\boldsymbol{x},t) \tag{2―37}$$

となる。式（2―35）と

$$\begin{cases}\rho(\boldsymbol{x},\ t)=e\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(t))\\ \sigma(\boldsymbol{x},\ t)=g\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(t))\end{cases} \tag{2―38}$$

とを利用して，空間積分をおこなうと運動量保存則

$$\frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{P}_m(t)+\boldsymbol{P}_f(t)\right\}=\int d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\ t) \tag{2―39}$$

が得られる。ここで

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_m(t)=m\dot{\boldsymbol{z}}(t)\\ \boldsymbol{P}_f(t)=\int d^3x\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\ t)\end{cases} \tag{2―40}$$

である。

§3　dyon 系と電磁場の共存系

Lagrange formalism を相対論的な運動をする dyon 系と電磁場との共存する体系に適用して，Maxwell-Dirac equaion と Lorentz-Dirac equation を導びく。

dyon 系と電磁場の共存する体系の作用積分は次のようになると仮定する。すなわち

$$I=\int L_F d^4x+\int L_M d\tau+\int L_I d^4x d\tau \tag{3―1}$$

ただし

$$L_F=-\frac{1}{4}\mathfrak{F}_{\mu\nu}(x)\mathfrak{F}_{\mu\nu}(x) \tag{3―2}$$

$$L_M=-\sum_{i=1}^{N}m_i \tag{3―3}$$

$$L_I=\sum_{i=1}^{N}\left\{e_i\,\delta^4\left(x-z^i(\tau)\right)A_\mu(x)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}+g_i\,\delta^4\left(x-z^i(\tau)\right)M_\mu(x)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}\right\} \tag{3―4}$$

であり，m_i は各 dyon の質量，τ はその固有時間を表わす。

変分はこの体系を記述する物理量 $A_\mu(x)$ と $M_\mu(x)$ と $z^i{}_\mu(x)$ についてとるのであるが，これら物理量は互いに独立な量であるから始めに電磁場 $A_\mu(x)$，$M_\mu(x)$ について変分をとると

$$\delta\int L_F d^4x+\delta\int L_I d\tau d^4x=0 \tag{3—5}$$

となる。まず（3—5）の第1項を計算する。

$$\delta\int L_F d^4x$$

$$=-\frac{1}{4}\int d^4x\left(\delta\mathfrak{F}_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{F}_{\mu\nu}+\mathfrak{F}_{\mu\nu}\cdot\delta\mathfrak{F}_{\mu\nu}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int d^4x\left(\mathfrak{F}_{\mu\nu}\cdot\delta\mathfrak{F}_{\mu\nu}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int d^4x\mathfrak{F}_{\mu\nu}\cdot\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_u}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}+\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial M_\sigma}{\partial x_\lambda}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int d^4x\left(\mathfrak{F}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta A_\nu-\mathfrak{F}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu+\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\mathfrak{F}_{\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta M_\mu\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int d^4x\left(\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}\delta A_\nu-\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\delta A_\mu+\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{F}_{\lambda\tau}}{\partial x_\nu}\delta M_\mu\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int d^4x\left(-\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right)\delta A_\mu+\int d^4x\,\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}_{\nu\mu}}{\partial x_\nu}\,\delta M_\mu$$

$$=-\int d^4x\,\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\,\delta A_\mu+\int d^4x\,\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}_{\nu\mu}}{\partial x_\nu}\,\delta M_\mu \tag{3—6}$$

$$\delta\int L_I d\tau d^4x$$

$$=\delta\int d^4x\int d\tau\sum_{i=1}^{N}\left\{e_i\delta^4\left(x-z^i(\tau)\right)A_\mu(x)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}\right.$$

$$\left.+g_i\delta^4(x-z^i(\tau)M_\mu(x)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}\right\}$$

$$=\int d^4x\int d\tau\sum_{i=1}^{N}\left\{e_i\delta^4\left(x-z^i(\tau)\right)\delta A_\mu(x)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}\right.$$

$$\left.+g_i\delta^4\left(x-z^i(\tau)\right)\delta M_\mu(x)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}\right\} \tag{3—7}$$

式（3—6），（3—7）を式（3—5）に代入し $\delta A_\mu(x)$，$\delta M_\mu(x)$ について整理する。すなわち

$$\int d^4x\left\{-\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}+\sum_{i=1}^{N}e_i\int d\tau\delta^4\left(x-z^i(\tau)\right)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}\right\}\delta A_\mu$$

$$+\int d^4x\left\{\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}_{\nu\mu}}{\partial x_\nu}+\sum_{i=1}^{N}g_i\int d\tau\delta^4\Bigl(x-z^i(\tau)\Bigr)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau}\right\}\delta M_\mu=0 \tag{3－8}$$

$\delta A_\mu(x)$，$\delta M_\mu(x)$ は互いに独立な量であるから，これらに無関係に式（3－8）が成立する条件は次のようになる。

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\sum_{i=1}^{N}e_i\int d\tau\delta^4\Bigl(x-z^i(\tau)\Bigr)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau} \tag{3－9}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\sum_{i=1}^{N}g_i\int d\tau\delta^4\Bigl(x-z^i(\tau)\Bigr)\frac{dz^i{}_\mu(\tau)}{d\tau} \tag{3－10}$$

式（3－9）の右辺の空間成分を考えるために

$$t(\tau)=t' \tag{3－11}$$

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{z}^i(t)}{dt} \tag{3－12}$$

$$\tau=t(\tau)\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{u}^2(t(\tau))}{c^2}}=t'\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t')} \tag{3－13}$$

を用いる。

$$\sum_{i=1}^{N}e_i\int dt'\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t')}\,\delta^3\Bigl(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^i(t')\Bigr)\delta(t-t')\frac{d\boldsymbol{z}^i(t')}{dt'\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t')}}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}e_i\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt}\delta^3\Bigl(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^i(t)\Bigr)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{j}^i(\boldsymbol{x},\ t)\equiv\boldsymbol{j}(x) \tag{3－14}$$

次に式（3－9）の右辺の時間成分の計算をする。

$$\sum_{i=1}^{N}e_i\int d\tau\delta^3\Bigl(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^i(\tau)\Bigr)\delta\Bigl(t-t(\tau)\Bigr)\frac{dz^i{}_0(\tau)}{d\tau}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}e_i\int dt'\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t')}\,\delta^3\Bigl(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^i(t')\Bigr)\delta(t-t')\frac{dt'}{dt'\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t')}}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}e_i\int dt'\delta^3\Bigl(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^i(t')\Bigr)\delta(t-t')$$

$$=\sum_{i=1}^{N} e_i\delta^3\Big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^i(t)\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\rho^i(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{t})$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{j}_0^i(\boldsymbol{x},\ t)\equiv\boldsymbol{j}_0(x) \qquad (3-15)$$

式（3—14)，（3－15）より式（3－9）は

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=j_\mu \qquad (3-16)$$

となり，式（3—10）も全く同様に

$$\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=g_\mu \qquad (3-17)$$

となる。

次に dyon の運動径路に関する変分をとることによって Lorentz-Dirac equation が導びかれることを示す。

$$\delta\int L_M d\tau+\delta\int L_I d^4x d\tau=0 \qquad (3-18)$$

$$-\delta\int m d\tau+\delta\int\Big\{eA_\mu\Big(z(\tau)\Big)\frac{dz_\mu(\tau)}{d\tau}+gM_\mu\Big(z(\tau)\Big)\frac{dz_\mu(\tau)}{d\tau}\Big\}d\tau=0 \qquad (3-19)$$

式（3—11)，（3—12)，（3—13）を使って（3—19）を書きかえると，

$$\delta\int m\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t)}\ dt+\delta\int\Big[e\Big\{\boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{z}(t),\ t\Big)\boldsymbol{u}(t)-A_0\Big(\boldsymbol{z}(t),\ t\Big)\Big\}$$

$$+g\Big\{\boldsymbol{M}\Big(\boldsymbol{z}(t),\ t\Big)\boldsymbol{u}(t)-M_0\Big(\boldsymbol{z}(t),\ t\Big)\Big\}\Big]dt=0 \qquad (3-20)$$

となるが，ここでは t' を t に書き換えている。式（3—20）の第1項の変分は

$$-m\int\delta\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t)}\ dt$$

$$=m\int\frac{\boldsymbol{u}(t)\cdot\delta\Big(\dfrac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt}\Big)}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t)}}dt$$

$$=-m\int\Big(\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{u}(t)}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t)}}\Big)\delta\boldsymbol{z}(t)dt \qquad (3-21)$$

となり，また式（3—20）の第2項の変分は次のようになる。

$$\int\Big[e\Big\{\delta\boldsymbol{A}\Big(z(t),\ t\Big)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}\Big(z(t),\ t\Big)\delta\boldsymbol{u}(t)-\delta A_0\Big(z(t),\ t\Big)\Big\}$$

$$+g\Big\{\delta\boldsymbol{M}\Big(z(t),\ t\Big)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{M}\Big(z(t),\ t\Big)\delta\boldsymbol{u}(t)-\delta M_0\Big(z(t),\ t\Big)\Big\}\Big]dt$$

$$=\int\Big[e\Big\{\sum_k\delta A_k\Big(z(t),\ t\Big)u_k(t)+\sum_k A_k\Big(z(t),\ t\Big)\cdot\delta u_k(t)-\delta A_0\Big(z(t),\ t\Big)\Big\}$$

$$+g\Big\{\sum_k\delta M_k\Big(z(t),\ t\Big)u_k(t)+\sum_k M_k\Big(z(t),\ t\Big)\delta u_k(t)-\delta M_0\Big(z(t),\ t\Big)\Big\}\Big]dt$$

$$=\int\Big[e\Big\{\sum_{k,i}\frac{\partial A_k}{\partial z_i}\delta z_i\cdot u_k+\sum_k A_k\cdot\delta\Big(\frac{dz_k}{dt}\Big)-\sum_i\frac{\partial A_0}{\partial z_i}\delta z_i\Big\}$$

$$+g\Big\{\sum_{k,i}\frac{\partial M_k}{\partial z_i}\delta z_i\cdot u_k+\sum_k M_k\delta\Big(\frac{dz_k}{dt}\Big)-\sum_i\frac{\partial A_0}{\partial z_i}\delta z_i\Big\}\Big]dt$$

$$=\int\Big[e\Big\{\sum_{k,i}\frac{\partial A_k}{\partial z_i}u_k\delta z_i-\sum_k\frac{dA_k}{dt}\delta z_k-\sum_i\frac{\partial A_0}{\partial z_i}\delta z_i\Big\}$$

$$+g\Big\{\sum_{k,i}\frac{\partial M}{\partial z_i}u_k\delta z_i-\sum_k\frac{dM_k}{dt}\delta z_k-\sum_i\frac{\partial M_0}{\partial z_i}\delta z_i\Big\}\Big]dt$$

$$=\int\Big[e\sum_i\Big\{\Big(-\frac{\partial A_i}{\partial t}-\frac{\partial A_0}{\partial z_i}\Big)+\sum_k\Big(\frac{\partial A_k}{\partial z_i}-\frac{\partial A_i}{\partial z_k}\Big)u_k\Big\}$$

$$+g\sum_i\Big\{\Big(-\frac{\partial M_i}{\partial t}-\frac{\partial M_0}{\partial z_i}\Big)+\sum_k\Big(\frac{\partial M_k}{\partial z_i}-\frac{\partial M_i}{\partial z_k}\Big)u_k\Big\}\Big]\delta z_i(t)dt$$

$$=\int\Big[e\Big\{\boldsymbol{E}\Big(z(t),\ t\Big)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{B}\Big(z(t),\ t\Big)\Big\}$$

$$+g\Big\{-\boldsymbol{B}'\Big(z(t),\ t\Big)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{E}'\Big(z(t),\ t\Big)\Big\}\Big]\delta\boldsymbol{z}(t)\cdot dt \qquad (3-22)$$

式（3—21)，（3—22）を式（3—20）に代入し $\delta\boldsymbol{z}(t)$ の任意性から

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m\boldsymbol{u}^2(t)}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t)}}\Big)=\Big\{e\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{B}\Big(z(t),\ t\Big)+g\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{E}'\Big(z(t),\ t\Big)\Big\}$$

$$+\Big\{e\boldsymbol{E}\Big(z(t),\ t\Big)-g\boldsymbol{B}'\Big(z(t),\ t\Big)\Big\} \qquad (3-23)$$

が得られる。式（2—4)，（2—11）から

$$gA_\mu = eM_\mu \tag{3-24}$$

が成立するものと考えられるから

$$gF_{\mu\nu} = eG_{\mu\nu} \tag{3-25}$$

$$g\tilde{F}_{\mu\nu} = e\tilde{G}_{\mu\nu} \tag{3-26}$$

なる関係が成立し，それを使って以下の計算を行う。

式（2—21)，(2—22)，(2—23)，(2—24)，(2—25)，(2—26）を使って（3—23）の右辺第1項を計算すると

$$\begin{aligned}
&e\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}+g\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{E}' \\
&=eF_{\mu\nu}u_\alpha+gG_{\mu\nu}u_\alpha \qquad (\alpha=1,2,3\,;\ \mu,\ \nu=1,2,3,4) \\
&=\left(eF_{\mu\nu}+gG_{\mu\nu}\right)u_\alpha+\left(g\tilde{F}_{\mu\nu}-e\tilde{G}_{\mu\nu}\right)u_\alpha \\
&=\left(e\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}+g\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{E}'\right)+\left(-g\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{E}-e\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}'\right) \\
&=e\boldsymbol{u}\times\mathfrak{B}-g\boldsymbol{u}\times\mathfrak{F}
\end{aligned} \tag{3-27}$$

となり，式（2—25)，(2—26)，(3—26）を使って（3—23）の右辺第2項を計算すると

$$\begin{aligned}
&e\boldsymbol{E}-g\boldsymbol{B}' \\
&=e\left(\mathfrak{E}+\boldsymbol{E}'\right)+g\left(\mathfrak{B}-\boldsymbol{B}\right) \\
&=\left(e\mathfrak{E}+g\mathfrak{B}\right)+\left(e\boldsymbol{E}'-g\boldsymbol{B}\right) \\
&=e\mathfrak{E}+g\mathfrak{B}
\end{aligned} \tag{3-28}$$

となる。式（3—27)，(3—28）から式（3—23）は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}}\right)=e\left(\mathfrak{E}+\boldsymbol{u}\times\mathfrak{B}\right)+g\left(\mathfrak{B}-\boldsymbol{u}\times\mathfrak{E}\right) \tag{3-29}$$

となる。

§ 4 Discussion

Maxwell-Dirac equation が **Maxwell equation** の自然な一般化となっているためには，少くなくとも場の法則が満足すべき基本的な変換に対して不変でなくてはならない。特に空間反転について考えるならば，弱い相互作用においてパリティ非保存が明らかにされて以来とかく軽視されがち

であるが，筆者達は基本的な場の法則ではパリティは保存されねばならないと考えており，そのために磁荷が擬スカラーであるとすればうまくいく（この点に関して Cabbibo and Ferrai[10] および Rohrlich[5] は Maxwell-Dirac equation においてはパリティが保存しないと結論しているが，間違いであることを指摘しておく)。この様な擬スカラーを使って，再び弱い相互作用においてもパリティが保存するという論文[11]が現われたことは特に興味深い。

今までの magnetic monopole に関する論文についてみると大きく分けて2つのタイプに分かれる。一つは Dirac の論文[1] の様に通常の4次元ポテンシャル A_μ だけを使って議論したものであり，これには有名な Dirac strings という unphysical variable が伴っており，そのため charged particle は決して string を横切らないという補足条件を仮定しなければならない難点がある。他方 Cabibbo and Ferrari[9] に始まる他のグループは A_μ, B_μ を使って議論をしているが Rohlrich[5]，Rosenbaum[6] 等は適当な補足条件をつけなければ満足すべき local action principle は存在しないと結論している。

この論文では2つの4元ポテンシャル A_μ，M_μ に対して $gA_\mu=eM_\mu$ なる関係を仮定することによって local Lagrangian formalism に成功している。gA_μ と eM_μ は式（2－4），（2－11）より明らかに同じ形の方程式

$$\Box gA_\mu=gj_\mu$$

$$\Box eM_\mu=eg_\mu$$

に従うが，これから即 $gA_\mu=eM_\mu$ にはならない。そこでこの論文では $gA_\mu=eM_\mu$ を仮定することによって議論を進めているが，この辺の事情と従来の local Lagangian formalism が出来る，あるいは出来ないという理論との関係をはっきりさせ，さらに Hamiltonian 形式をへて量子論に移行する問題が今後に残されている。

References

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A133**, 60 (1931); Phys. Rev. **74**, 817 (1948)
2) For a fairly complete list, see the bibliography in the paper by E. Goto, H. H. Kolm, and K. W. Ford, Phys. Rev. **132**, 387 (1963)
3) D. Zwanziger, Phys. Rev. **137**, B647 (1965)
4) C. R. Hagen, Phys. Rev. **140**, B804 (1965)
5) F. Rohrlich, Phys. Rev. **150**, 1104 (1966)
6) D. Rosenbaum, Phys. Rev. **147**, 891 (1966)
7) J. Schwinger, Phys. Rev. **144**, 1087 (1966); **173**, 1536 (1968); Science, **165**, 757 (1969)
8) M. Y. Han and L. C. Biedeharn, Nuovo Cimento, **2A**, 544 (1971)
9) H. Takaki and S. Otaka, Soryusiron Kenkyu, **44**, 519 (1972)
10) N. Cabibbo and E. Ferrari, Nuovo Cimento, **23**, 1147 (1962)
11) L. Gomberoff and V. Tolmachev, Nuovo Cimento, **3A**, 657 (1971)

（著者　一般教養　昭和47年3月18日受理）