量子電磁力学の光子伝播関数

大 高 成 介

Photon Propagators of the Quantum Electrodynamics

Sigeyuki OTAKA

We show that the Feynman propagator is related with the Landau propagator by a q-number gauge transformation and Lorentz condition is satisfied as an operator identity in the Heisenberg picture.

§1. Introduction

Hilbert space に不定計量を導入し，Gupta の補助条件を設定し，Lorentz 共変な電磁場の量子化にはじめて成功したのがS．N．Gupta [1]であり，それをさらに完全なものとしたのがK．Bleuler [2]である。この Gupta-Bleuler 形式[10]は Feynman gauge での理論であり，長い間，量子電磁力学はこの形式で統一されたといえる。従って，photon propagator は Lorentz 条件を満足しない。しかしながら，propagator の漸近的振る舞いの研究過程に，L. D. Landau[3]は Lorentz 条件を満足する photon propagator を広く用いた。また，Landau gauge は紫外発散の研究のために便利であることが多くの著者達によって示めされた。ところが，N. Nakanishi [4]が dipole ghost を導入することによって Landau gauge（一般的には種々の gauge）を導びく共変 gauge な電磁場の量子論を定式化するまでは，ad hoc に Landau gauge が導入されていた。また，それと独立に B.Lautrup [5]は正準形式の共変 gauge 理論としての定式化を提出した。

N.Nakanishi の場合は正準形式としての形をとらず，B.Lautrup の場合は dipole ghost を導入しないために Lorentz 共変性に難点があるが，両者の場の方程式や交換関係は本質的に同等である。この２つを総合して Nakanishi-Lautrup 形式 [6][9][10]が出来る。Gupta-Bleuler 形式は Feynman gauge の場合としてNakanishi-Lautrup 形式に含まれる。

さて，Feynman gauge の photon prpagator は single pole をもつが，Landau gauge のそれは douple pole をもつので，Nakanishi-Lautrup 形式では q 数ゲージ変換によって前者より後者を得ることは不可能である。そこで，K.Yokoyama [7]は massless Froissart model [8]と Gupta-Bleuler 形式を組み合せて，Interaction picture のユニタリー変換によって Landau gauge 表示と Feynman gauge 表示を関係づけた。ところが，Landau gauge において Lorentz 条件が演算式として成立しえない。従って，純粋な Landau gauge 理論は Yokoyama 形式によって記述することはできない。この点は Heisenberg picture で考える場合重大な意味をもっている[6]。

本論文の目的は，Heisenberg pictureにおいてq数ゲージ変換によってFeynman propagatorからLandau propagatorを導びき，演算式としてのLorentz条件が成立することを示めすことである。

§2.　Heisenberg pictureにおけるYokoyama形式

Lagrangian densityは

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}^{G}+\mathcal{L}^{F} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}^{G}=-\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}^{F}=-\partial_\mu A\,\partial_\mu B-\frac{1}{2}\lambda A^2 \tag{2.3}$$

によって与える。ただし，表記は

$$a_\mu a_\mu=\vec{a}^{\,2}-a_0^2 \tag{2.4}$$

とする。$\mathcal{L}^{G}$はGupta-Bleuler形式，$\mathcal{L}^{F}$はmassless Froissart modelである。(2. 1)，(2. 2)および(2. 3)からEuler方程式を求めれば

$$\Box A_\mu=0 \tag{2.5}$$

$$\Box B=\lambda A \tag{2.6}$$

$$\Box A=0\quad(\Box\equiv\partial_\mu\partial_\mu=\triangle-\partial_0^2) \tag{2.7}$$

となり，Bはdipole ghost field，Aはそのpair fieldである。また4次元交換関係は

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]=i\,\partial_{\mu\nu}D(x-y) \tag{2.8}$$

$$[B(x),\ B(y)]=i\lambda\tilde{D}(x-y) \tag{2.9}$$

$$[A(x),\ B(y)]=[B(x),\ A(y)]=iD(x-y) \tag{2.10}$$

$$[A(x),\ A(y)]=0 \tag{2.11}$$

となる。ただし

$$D(x)=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\varepsilon(k)\delta(k^2)e^{ikx} \tag{2.13}$$

$$\tilde{D}(x)=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\varepsilon(k)\delta'(k^2)e^{ikx} \tag{2.13}$$

である。(2. 2)のGupta-Bleuler形式から判るように，我々の取扱うHilbert spaceはindefinite-metricであることに注意する。

次に，散乱過程の初期状態および終状態においてghostを消し，期待値の形でMaxwell方程式が成立するために

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{2.14}$$

なる補助条件を設ける。またdipole ghostを消すために

$$B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{2.15}$$

とすれば，自動的に

$$A^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{2.16}$$

となる[7]。

§3. Feynman propagator の q 数ゲージ変換

(2. 5)と(2. 8)に

$$A_\mu \to \hat{A}_\mu = A_\mu + \alpha\, \partial_\mu B \tag{3. 1}$$

なる q 数ゲージ変換すれば，(2. 6)および(2. 8)は各々

$$\square \hat{A}_\mu = \square A_\mu + \alpha \lambda \partial_\mu A \tag{3. 2}$$

$$[\hat{A}_\mu(x),\ \hat{A}_\mu(y)] = i\delta_{\mu\nu} D(x-y) - i\partial_\mu \partial_\nu \tilde{D}(x-y) \tag{3. 3}$$

となる。ただし，$\alpha^2 = \lambda^{-1}$ とする。ここで

$$\partial_\mu \hat{A}_\mu = \partial_\mu A_\mu + \alpha \square B = \partial_\mu A_\mu + \alpha\lambda A = 0 \tag{3. 4}$$

になるようにゲージ B または A に制限を加えれば，(3. 2) は

$$\square \hat{A}_\mu = 0 \tag{3. 5}$$

となる。もし，$\partial_\mu \hat{A}_\mu \neq 0$ ならば(3. 3)は

$$[\partial_\mu^x \hat{A}_\mu(x),\ \hat{A}_\mu(y)] = i\delta_{\mu\nu}\partial_\mu D(x-y) - i\partial_\nu D(x-y) = 0 \tag{3. 6}$$

となり，(3. 3)の右辺と左辺とは矛盾することに我々は注意しなければならない。

従って，(3. 1)と(3. 3)によって Landau gauge の photon propagator

$$\langle 0|T[\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(y)]|0\rangle = \delta_{\mu\nu} D_F(x-y) - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{D}_F(x-y) \tag{3. 7}$$

が得られる。ここで

$$D_F(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} e^{i(x-y)} \tag{3. 8}$$

$$\tilde{D}_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{(k^2 - i\varepsilon)^2} e^{i(x-y)} \tag{3. 9}$$

である。また(2. 5)，(2. 8)により Feynman propagator は

$$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = \delta_{\mu\nu} D_F(x-y) \tag{3.10}$$

であるが，これに q 数ゲージ変換(3. 1)をすれば，(3. 7)と同じ

$$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = \delta_{\mu\nu} D_F(x-y) - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{D}_F(x-y) \tag{3.11}$$

が得られる。以上より Feynman propagator から Landau propagator が首尾一貫して q 数ゲージ変換によって求められることが示めされた。

References

1) S.N.Gupta, Proc. Phys. Soc. **A63** (1950), 681

2) K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23** (1950), 567

3) L. D. Landau and I. M. Khalatnikov, J. Exper. Theor. Phys. USSR **29** (1955), 89

4) N. Nakanishi, Progr. Theor. Phys. **35** (1966), 111
N. Nakanishi, Progr. Theor. Phys. **38** (1967), 881

5) B. Lautrup, K. Danske Vidensk. Selk. Mat. -fit. Medd. **35** (1967), no. 11

6）N. Nakanishi, Progr. Theor. Phys. Suppl. **51** (1972), 1
7）K. Yokoyama, Progr. Theor. Phys. **40** (1968), 160
8）M. Froissart, Nuovo Cim. Suppl. **14** (1959), 197
9）中西襄，場の量子論（培風館，東京，1975）
10）横山寛一，量子電磁力学（岩波書店，東京，1978）