

連結された車輛が道路を走行する場合段階衝撃 をうける時における振動的変位について

奥 田 薫

On the Vibrating Displacements of Two Wheels Connected by Springs When the Trailer is Running and Pushing Against Angular Stones.

Kaoru OKUDA

We had necessity to research the limits of amplitudes of vibrations when the trailer is running at the constant speed and pushes against angular stones for the body conveyed in it to keep unbroken states of amplitudes of vibrations.

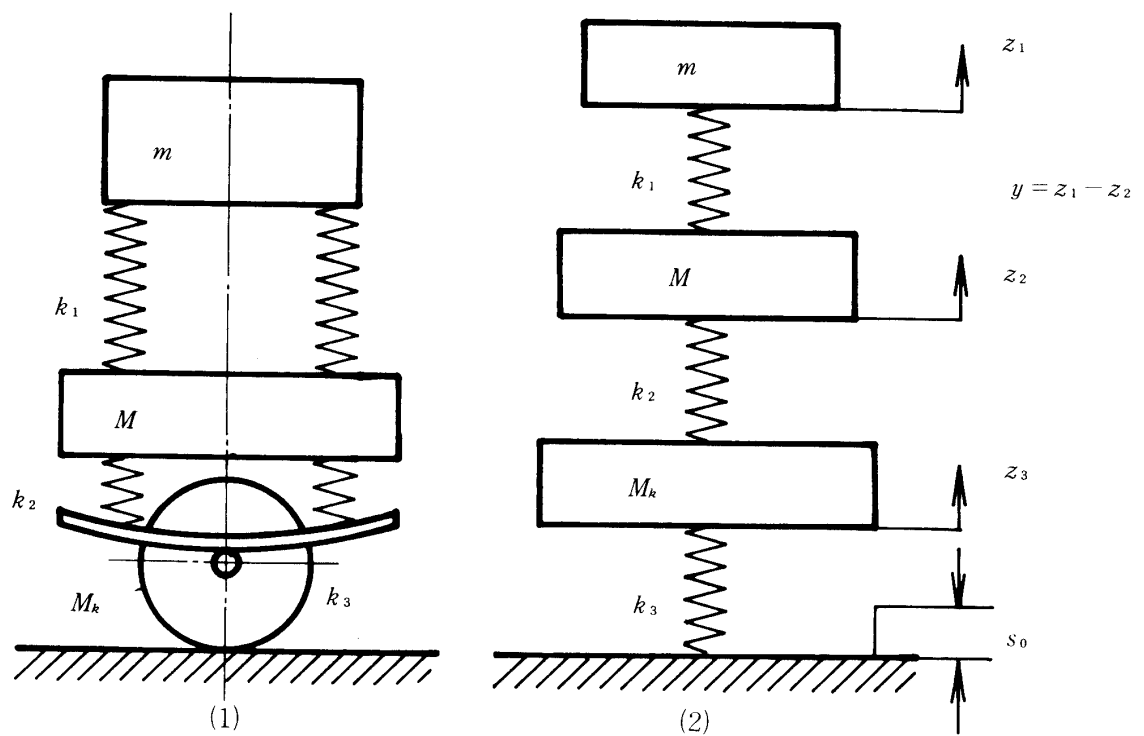
Then we discussed various shapes of amplitudes in the body running against various shapes of angular stones.

1 緒 論

トレーラが一定速度で走行中、突然ある高さの縁石に突き当たり輸送中の品物が破壊しないためには如何なる高さの振幅をなすべきかを調査し、これがある限度内にあるべきかを検討する必要がある。よって著者は(a)矩形型 (b)三角形型 (c)梯形型 (d)正弦形の縁石につき当り、その振動の形状と高さを研究した。

2 トレーラの衝撃に対する理論

一般に品物を輸送する場合輸送中の品物の保護、例えば大型の電子管のフィラメントが輸送中に破壊しないような装置を開発することは極めて重要なことである。輸送中の衝撃の主因の一つは単純な衝撃上げ、または単純落下である。トレーラが一定速度で走り来り平然地上の物体に衝撃当りタイヤが上昇した時、如何なる振動するかを検討するものである。これは自動車が平滑な道路を走り、次の段階において砂利、石等を有する悪道路につき当り衝撃現象をなす場合と思考される。



第1図 トレーラ振動図

いま

- $m\text{kg}$: 装置の重量
- $k_1\text{kg/cm}^2$: 装置マウント用のばね常数
- $M\text{kg}$: トレーラの車体の重量
- $k_2\text{kg/cm}^2$: トレーラの懸架はねのばね常数
- $M_k\text{kg}$: トレーラばね下の重量
- $k_3\text{kg/cm}^2$: タイヤのばね常数

相当な速度でトレーラが走行して、突然、高さ S_0 の縁石に衝き当り登る場合を仮定する。

すなわち高さ S_0 の突然変位がタイヤに加えられたと仮定する。

この場合の微分方程式は次のようになる。

$$m \frac{dz_1^2}{dt^2} + k_1 y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$M \frac{d^2 z_2}{dt^2} - k_1 y + k_2 (z_2 - z_3) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$M_k \frac{d^2 z_3}{dt^2} + k_2 (z_3 - z_2) + k_3 z_3 = k_3 S_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

この装置の絶対運動変位 z_1 と転体の変位 z_2 の差 $y = z_1 - z_2$ が相対運動の変位となる。

$$y = z_1 - z_2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\therefore z_1 = y + z_2$$

したがって $m \frac{d^2 (y + z_2)}{dt^2} + k_1 y = 0$

連結された車軸が道路を走行する場合段階衝撃をうける時における振動の変位について

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k_1}{m} y + \frac{dz_2^2}{dt^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

また(2)式は

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} - \frac{k_1}{M} y + \frac{k_2}{M} (z_2 - z_3) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

(3)式は次のようになる

$$\frac{d^2 z_3}{dt^2} + \frac{k_2}{M_k} (z_3 - z_2) + \frac{k_3}{M_k} z_3 = \frac{k_3}{M_k} S_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここにおいて

$$\frac{k_1}{m} = \theta_1, \quad \frac{k_1}{M} = \theta_2, \quad \frac{k_2}{M} = \theta_3, \quad \frac{k_2}{M_k} = \theta_4, \quad \frac{k_3}{M_k} = \theta_5$$

とおけば

振動微分方程式は

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \theta_1 y = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} - \theta_2 y + \theta_3 (z_2 - z_3) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{d^2 z_3}{dt^2} + \theta_4 (z_3 - z_2) + \theta_5 z_3 = \theta_5 S_0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \theta_1 y &+ \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= 0 \\ -\theta_2 y &+ \frac{d^2 z_2}{dt^2} + \theta_3 z_2 &- \theta_3 z_3 &= 0 \\ &- \theta_4 z_2 &+ \frac{d^2 z_3}{dt^2} + (\theta_4 + \theta_5) z_3 &= \theta_5 S_0 \end{aligned}$$

となる。よってこの補助方程式を作るためにラプラス変換を行うと次のようになる。

$$(s^2 + \theta_1)y(s) + s^2 z_2(s) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$-\theta_2 y(s) + (s^2 + \theta_3)z_2(s) - \theta_3 z_3(s) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$-\theta_4 z_2(s) + (s^2 + \theta_4 + \theta_5)z_3(s) = \frac{\theta_5 S_0}{s} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\therefore y(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & s^2 & 0 \\ 0 & s^2 + \theta_3 & -\theta_3 \\ \frac{\theta_5 S_0}{s} & -\theta_4 & s^2 + (\theta_4 + \theta_5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + \theta_1 & s^2 & 0 \\ -\theta_2 & s^2 + \theta_3 & -\theta_3 \\ 0 & -\theta_4 & s^2 + (\theta_4 + \theta_5) \end{vmatrix}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

これを展開すると

$$y(s) = - \frac{\theta_3 \theta_5 S_0 s}{\{(s^2 + \theta_1)(s^2 + \theta_3)(s^2 + \theta_4 + \theta_5) - \theta_3 \theta_4\} - \theta_2 s^2 (s^2 + \theta_4 + \theta_5)}$$

$$= - \frac{\theta_3 \theta_5 S_0 s}{[s^6 + (\theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2) s^4 + \{\theta_1 \theta_3 + (\theta_1 + \theta_3) \theta_6 - \theta_2 \theta_6\} s^2 + (\theta_1 \theta_3 \theta_6 - \theta_3 \theta_4)]}$$

$$\text{ここに } (\theta_4 + \theta_5) = \theta_6 \text{ である} \quad \dots\dots (15)$$

$$\text{いま } y(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} \quad \dots\dots (16)$$

とする。ここにおいて

$$Z(s) = (s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2) \text{ とおけば}$$

$$Z(s) = s^6 + (a^2 + b^2 + c^2) s^4 + (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) s^2 + a^2 b^2 c^2$$

ここに

$$a^2 + b^2 + c^2 = \theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2$$

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 = \theta_1 \theta_3 + (\theta_1 + \theta_3) \theta_6 - \theta_2 \theta_6$$

$$a^2 b^2 c^2 = \theta_1 \theta_3 \theta_6 - \theta_3 \theta_4$$

しかるに

$$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)} = \frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} \left\{ \frac{1}{s^2 + c^2} - \frac{1}{s^2 + a^2} \right\} - \frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \left\{ \frac{1}{s^2 + b^2} - \frac{1}{s^2 + a^2} \right\}$$

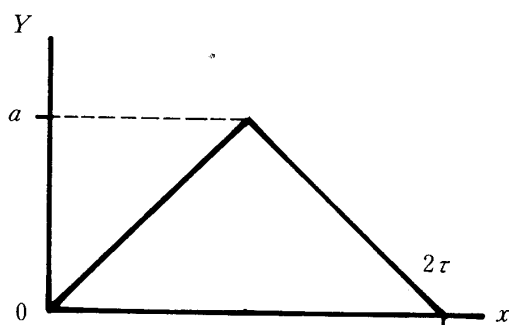
前式に戻り $\theta_3 \theta_5 S_0 = \phi$ とおくと変位の像関係は

$$y(s) = -\phi \left[\frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} \left\{ \frac{s}{s^2 + c^2} - \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} - \frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \left\{ \frac{s}{s^2 + b^2} - \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} \right]$$

したがって変位は

$$y(t) = -\phi \left[\frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} \{ \cos ct - \cos at \} - \frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \{ \cos bt - \cos at \} \right] \quad \dots\dots (17)$$

3 三角形衝撃を受ける場合



第2図 三角衝撃

道路が零なる高さより出発して a なる高さに到り a より 0 に降下する三角形の衝撃をうけ、この間の時 $0 \sim 2\tau$ なる場合の像関数は

$\frac{a}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2$ であるからトレーラーの移動の時の高さ変位の像関数は $y(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)}$ で

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= -\theta_3 \theta_5 s^2 \frac{a}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \\ &= -\frac{a \theta_3 \theta_5}{\tau} (1 - e^{-\tau s})^2 \\ Z(s) &= (s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (18)$$

この場合は道路が粗雑な面で時間 2τ が極めて小なる時は、極めて強い衝撃を受けるものと考え

られる。

したがって

$$y(s) = \phi_1 \frac{(1 - e^{-\tau s})^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)} = \phi_1 \frac{(1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s})}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)} \quad \dots\dots (19)$$

$$\text{ここに } \phi_1 = -\frac{a\theta_3\theta_5}{\tau}$$

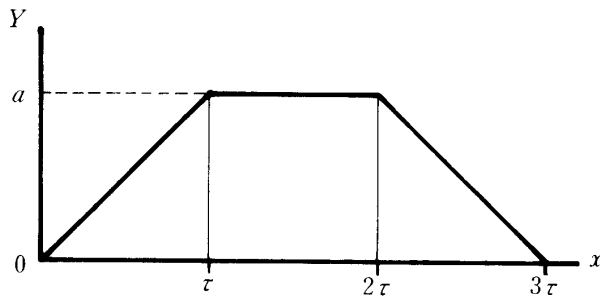
しかるに

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(s)} &= \frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)} \\ &= \frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + b^2)} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + c^2)} \right\} \\ \therefore y(s) &= \phi_1 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + b^2)} \right\} - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + c^2)} \right\} \right] \\ &\quad - 2\phi_1 e^{-\tau s} \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + b^2)} \right\} - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + c^2)} \right\} \right] \\ &\quad + \phi_1 e^{-2\tau s} \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + b^2)} \right\} - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)} - \frac{1}{(s^2 + c^2)} \right\} \right] \quad \dots\dots (20) \end{aligned}$$

いまこの像関数を実関数に変換するとタイヤの変位を求めることが出来る。

$$\begin{aligned} y(t) &= \phi_1 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{b} \sin bt \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{c} \sin ct \right\} \right] \\ &\quad - 2\phi_1 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \mathbf{U}(t - \tau) \sin a(t - \tau) - \frac{1}{b} \mathbf{U}(t - \tau) \sin b(t - \tau) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \mathbf{U}(t - \tau) \sin a(t - \tau) - \frac{1}{c} \mathbf{U}(t - \tau) \sin b(t - \tau) \right\} \right] \\ &\quad + \phi_1 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \mathbf{U}(t - 2\tau) \sin a(t - 2\tau) - \frac{1}{b} \mathbf{U}(t - 2\tau) \sin b(t - 2\tau) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \mathbf{U}(t - 2\tau) \sin a(t - 2\tau) - \frac{1}{c} \mathbf{U}(t - 2\tau) \sin b(t - 2\tau) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

4 梯形型衝撃の場合



第3図 梯形衝撃

この場合は時間 $t = 0$ において高さ零より出発して高さ a に上昇し、それよりは $t = 2\tau$ まで常数 a にて高さが続き $t = 2\tau$ より下降し $t = 3\tau$ にて地面に接するような場合を考えてみると、このときの像関数は $\frac{a}{\tau} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-\tau s})(1 - e^{-2\tau s})$ である。

したがって

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\theta_3 \theta_5 s^2 \cdot \frac{a}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2} (1 - e^{-\tau s})(1 - e^{-2\tau s}) \\ &= -\frac{a\theta_3 \theta_5}{\tau} (1 - e^{-\tau s})(1 - e^{-2\tau s}) \\ &= \phi_2 (1 - e^{-\tau s} - e^{-2\tau s} + e^{-3\tau s}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

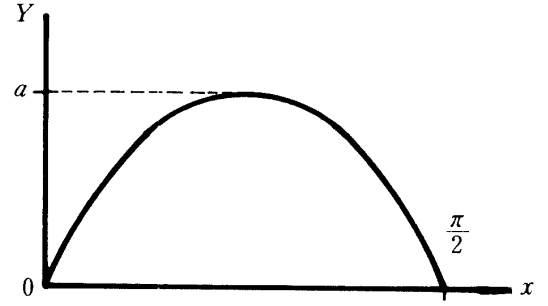
ここに $\phi_2 = -\frac{a\theta_3 \theta_5}{\tau}$

$$\begin{aligned} \therefore y(s) &= \phi_2 \frac{(1 - e^{-\tau s} - e^{-2\tau s} + e^{-3\tau s})}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)} \quad \dots\dots\dots (23) \\ &= \phi_2 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{b} \sin bt \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{c} \sin ct \right\} \right] \\ &\quad - 2\phi_2 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t - \tau) \sin a(t - \tau) - \frac{1}{b} U(t - \tau) \sin b(t - \tau) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t - \tau) \sin(t - \tau) - \frac{1}{b} U(t - \tau) \sin b(t - \tau) \right\} \right] \\ &\quad - \phi_2 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t - 2\tau) \sin a(t - 2\tau) - \frac{1}{b} U(t - 2\tau) \sin b(t - 2\tau) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t - 2\tau) \sin a(t - 2\tau) - \frac{1}{b} U(t - 2\tau) \sin b(t - 2\tau) \right\} \right] \\ &\quad + \phi_2 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t - 3\tau) \sin a(t - 3\tau) - \frac{1}{b} U(t - 3\tau) \sin b(t - 3\tau) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t - 3\tau) \sin a(t - 3\tau) - \frac{1}{b} U(t - 3\tau) \sin b(t - 3\tau) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

5 正弦形衝撃の場合

道路が滑かに上昇している曲線で時間 $t = 0$ から出発し、 $t = \frac{\pi}{2\tau}$ にて高さ a に達し、ここより降下し $t = \frac{\pi}{\tau}$ にて高さ $h = 0$ になるような衝撃の場合

この像関数は $\frac{a\pi}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}(1 + e^{-\tau s})$ である。



第4図 正弦衝撃

したがって

$$Y(s) = -\theta_3 \theta_5 s^2 \frac{a\pi}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} (1 + e^{-\tau s}) \quad \dots\dots (25)$$

$$= -\frac{a\pi}{\tau} \theta_3 \theta_5 \frac{s^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} (1 + e^{-\tau s})$$

$$= \phi_3 \frac{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} (1 + e^{-\tau s})$$

$$= \phi_3 \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \right\} (1 + e^{-\tau s})$$

$$= \phi_3 \left[1 - \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} + e^{-\tau s} - \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} e^{-\tau s} \right]$$

$$\therefore y(s) = \phi_3 \frac{\left[1 - \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} + e^{-\tau s} - \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} e^{-\tau s} \right]}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)} \quad \dots\dots (26)$$

$$= \phi_3 \frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)}$$

$$- \phi_3 \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{\left\{ s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \right\} (s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)}$$

$$+ \phi_3 e^{-\tau s} \frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)}$$

$$+ \phi_3 e^{-\pi s} \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{\left\{ s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \right\} (s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)}$$

さて前式の中 \sin の像関数を展開すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{\left\{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\right\}(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + c^2)} = \frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{1}{s^2 + b^2} \right\} \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \\
 & \quad - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{1}{s^2 + c^2} \right\} \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \\
 & = \frac{\frac{\pi^2}{\tau^2}}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - a^2\right)} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{1}{s^2 + \frac{\pi^2}{\tau^2}} \right\} \\
 & \quad - \frac{\frac{\pi^2}{\tau^2}}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - b^2\right)} \left\{ \frac{1}{s^2 + b^2} - \frac{1}{s^2 + \frac{\pi^2}{\tau^2}} \right\} \\
 & \quad - \frac{\frac{\pi^2}{\tau^2}}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - a^2\right)} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{1}{s^2 + \frac{\pi^2}{\tau^2}} \right\} \\
 & \quad + \frac{\frac{\pi^2}{\tau^2}}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - c^2\right)} \left\{ \frac{1}{s^2 + c^2} - \frac{1}{s^2 + \frac{\pi^2}{\tau^2}} \right\}
 \end{aligned}$$

したがって変位の像関数を逆変して実変位を求めれば

$$\begin{aligned}
 y(t) = \mathbf{L}^{-1} y(s) = & \phi_3 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{b} \sin bt \right\} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{c} \sin ct \right\} \right] \\
 & - \phi_3 \frac{\pi^2}{\tau^2} \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - a^2\right)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{\tau}{\pi} \sin \frac{\pi}{\tau} t \right\} \right. \\
 & \quad - \frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - b^2\right)} \left\{ \frac{1}{b} \sin bt - \frac{\tau}{\pi} \sin \frac{\pi}{\tau} t \right\} \\
 & \quad - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - a^2\right)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{\tau}{\pi} \sin \frac{\pi}{\tau} t \right\} \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)\left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - c^2\right)} \left\{ \frac{1}{c} \sin ct - \frac{\tau}{\pi} \sin \frac{\pi}{\tau} t \right\} \right] \\
 & + \phi_3 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \mathbf{U}(t - \tau) \sin a(t - \tau) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{b} \mathbf{U}(t - \tau) \sin b(t - \tau) \right\} + \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \right.
 \end{aligned}$$

連結された車輛が道路を走行する場合段階衝撃をうける時における振動的変位について

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ \frac{1}{a} U(t-\tau) \sin a(t-\tau) - \frac{1}{c} U(t-\tau) \sin c(t-\tau) \right\} \Bigg] \\
 & - \phi_3 \frac{\pi^2}{\tau^2} \left[\frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2) \left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - a^2 \right)} \left\{ \frac{1}{a} U(t-\tau) \sin a(t-\tau) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\tau}{\pi} U(t-\tau) \sin \frac{\pi}{\tau}(t-\tau) - \frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2) \left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - b^2 \right)} \right. \right. \\
 & \quad \cdot \left\{ \frac{1}{b} U(t-\tau) \sin b(t-\tau) - \frac{\tau}{\pi} U(t-\tau) \sin \frac{\pi}{\tau}(t-\tau) \right\} \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2) \left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - a^2 \right)} \left\{ \frac{1}{a} U(t-\tau) \sin a(t-\tau) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\tau}{\pi} U(t-\tau) \sin \frac{\pi}{\tau}(t-\tau) \right\} + \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2) \left(\frac{\pi^2}{\tau^2} - c^2 \right)} \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left\{ \frac{1}{c} U(t-\tau) \sin c(t-\tau) - \frac{\tau}{\pi} U(t-\tau) \sin \frac{\pi}{\tau}(t-\tau) \right\} \right] \cdots (27)
 \end{aligned}$$

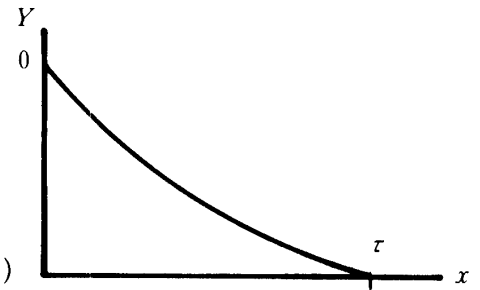
この式をみると衝撃は $t=0$ において零で最高値に達して下降する変位を示す。

6 急減三角形衝撃を受ける場合

この場合は $t=0$ において高さ a まで上昇し $t=\tau$ に高さは零となる衝撃を与えた場合で、この場合の像関数は $\frac{a}{\tau s^2}(\tau s - 1 + e^{-\tau s})$ であるから

$$Y(s) = -\theta_3 \theta_5 s^2 \cdot \frac{a}{\tau s^2}(\tau s - 1 + e^{-\tau s})$$

$$= -\frac{a\theta_3\theta_5}{\tau}(\tau s - 1 + e^{-\tau s}) = \phi_6(\tau s - 1 + e^{-\tau s})$$



第5図 急減衝撃

したがって変位の像関数は

$$\begin{aligned}
 \therefore y(s) &= \phi_6 \frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)(s^2+c^2)}(\tau s - 1 + e^{-\tau s}) \\
 &= \phi_6 \left[\frac{\tau s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)(s^2+c^2)} - \frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)(s^2+c^2)} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{e^{-\tau s}}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)(s^2+c^2)} \right] \\
 &= \phi_6 \tau \left[\frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2)} \left\{ \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2} \right\} - \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left\{ \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+c^2} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\phi_6 \left[\frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{s^2+a^2} - \frac{1}{s^2+b^2} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{s^2+a^2} - \frac{1}{s^2+c^2} \right\} \right] \\
 & + \phi_6 e^{-\tau s} \left[\frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{s^2+a^2} - \frac{1}{s^2+b^2} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{s^2+a^2} - \frac{1}{s^2+c^2} \right\} \right] \dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

よってこの像関数より実関数を求める。すなわちこの場合の衝撃的変位は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \therefore y(t) = & \phi_6 \tau \left[\frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2)} \left\{ \cos at - \cos bt \right\} - \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \left\{ \cos at - \cos ct \right\} \right. \\
 & - \phi_6 \left[\frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{b} \sin bt \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{c} \sin ct \right\} \right] \\
 & + \phi_6 \left[\frac{1}{(c^2-b^2)(b^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t-\tau) \sin a(t-\tau) - \frac{1}{b} U(t-\tau) \sin b(t-\tau) \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{a} U(t-\tau) \sin a(t-\tau) - \frac{1}{c} U(t-\tau) \sin c(t-\tau) \right\} \right] \dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

これを見ると変位は正弦曲線、余弦曲線と段階曲線の和を以て示され、最初が極めて高い余弦曲線を示すものと思考される。

いま例として $m=0.3\text{kg, sec}^2, \text{cm}^{-1}$; $M=0.74\text{kg, sec}^2, \text{cm}^{-1}$; $M_k=0.2\text{kg, sec}^2, \text{cm}^{-1}$; $k_1=450\text{kg, cm}^{-1}$, $k_2=110\text{kg, cm}^{-1}$; $k_3=720\text{kg, cm}^{-1}$; $S_0=10\text{cm}$ とする。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z(s)}{\partial s} = & 6s^5 + 4(\theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2)s^3 + 2\{\theta_1\theta_3 + (\theta_1 + \theta_3)\theta_6 - \theta_2\theta_6\}s \\
 = & 6s \left\{ s^4 + \frac{2}{3}(\theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2)s^2 + \frac{1}{3}(\theta_1\theta_3 + \theta_1\theta_6 + \theta_3\theta_6 - \theta_2\theta_6) \right\}
 \end{aligned}$$

したがって trial and error 方式または電算機により $z(s)$ の根を求める

$$\theta_1 = \frac{k_1}{m} = 1427.3249$$

$$\theta_2 = \frac{k_1}{M} = 550.5082$$

$$\theta_3 = \frac{k_2}{M} = 150.1330$$

$$\theta_4 = \frac{k_2}{M_k} = 583.7779$$

$$\theta_5 = \frac{k_3}{M_k} = 3891.9978$$

$$\therefore z(s) = s^6 + (\theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2)s^4 + (\theta_1\theta_3 + \theta_1\theta_6 + \theta_3\theta_6 - \theta_2\theta_6)s^2 + (\theta_1\theta_3\theta_6 - \theta_3\theta_4) = 0,$$

連結された車輛が道路を走行する場合段階衝撃をうける時における振動的変位について

$$\theta_6 = \theta_4 + \theta_5$$

$$\therefore z(s) = s^6 + 5502.7054 s^4 + 4810685.0816 s^2 + 964513938.5883$$

$s_1 = \pm j66.9$	$s_2 = \pm j27.12$	$s_3 = \pm j17.07$
$s_1^2 = 4.475609 \times 10^3$	$s_2^2 = 7.354944 \times 10^2$	$s_3^2 = 2.913849 \times 10^2$
$s_1^4 = 2.003108 \times 10^7$	$s_2^4 = 5.409520 \times 10^5$	$s_3^4 = 8.490516 \times 10^4$

ここに $z(s)$ の根は

$$s = \pm j66.9, s = \pm j27.12, s = \pm j17.07, j = \sqrt{-1}$$

また $y(s)$ は

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{Y(s)}{z(s)} = \frac{Y(s)s}{\int \frac{\partial z(s)}{\partial s}} \\ &= -\frac{\theta_3 \theta_5 s_0}{6} \frac{e^{-st}}{\left\{ s^4 + \frac{2}{3}(\theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2)s^2 + \frac{1}{3}(\theta_1 \theta_3 + \theta_1 \theta_6 + \theta_3 \theta_6 - \theta_2 \theta_6) \right\}} \\ \therefore y(s) &= \sum -\frac{\theta_3 \theta_5 s_0}{6} \frac{e^{-st}}{\left\{ s^4 + \frac{2}{3}(\theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2)s^2 + \frac{1}{3}(\theta_1 \theta_3 + \theta_1 \theta_6 + \theta_3 \theta_6 - \theta_2 \theta_6) \right\}} \end{aligned} \quad \dots\dots (30)$$

$$\text{いま } \xi_1 = \theta_1 + \theta_3 + \theta_6 - \theta_2 = 5502.7054$$

$$\xi_2 = \theta_1 \theta_3 + \theta_1 \theta_6 + \theta_3 \theta_6 - \theta_2 \theta_6 = 4810685.0816$$

であるから、分母の中括弧中の値を求めてみると、それぞれ

$$\phi_1 = 21618223, \phi_2 = -553627.2, \phi_3 = 15051586$$

$$A = -\frac{\theta_3 \theta_5 S_0}{6} = 973862.1762$$

$$\therefore -\frac{A}{\phi_1} = -0.0450482, -\frac{A}{\phi_2} = +1.7590573, -\frac{A}{\phi_3} = -0.0647016$$

したがって

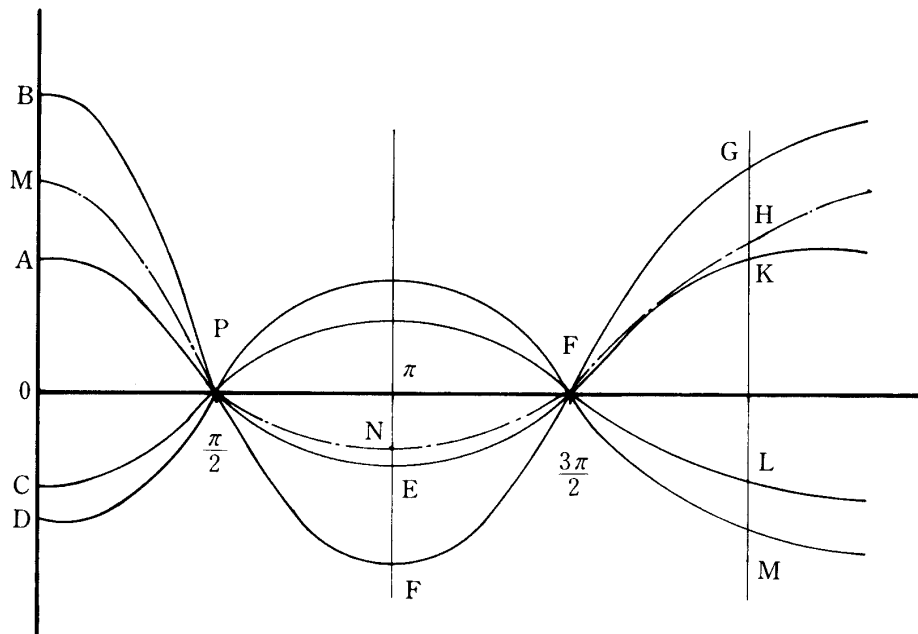
$$\begin{aligned} y(t) &= -0.0450482(e^{j66.9t} + e^{-j66.9t}) + 1.7590573(e^{j27.12t} + e^{-j27.12t}) \\ &\quad - 0.0647016(e^{j17.07t} + e^{-j17.12t}) \end{aligned} \quad \dots\dots (31)$$

したがって装置マウントの相対運動に対する実変位は

$$y = -0.0900964 \cos 66.9t + 3.5181146 \cos 27.12t - 0.1294032 \cos 17.07t \quad \dots\dots (32)$$

となる。

この結果を図に示すと変位曲線の高さ、すなわち衝撃の高さ y は、三個の cosine 曲線の和 $y = y_1 + y_2 + y_3$ で示され、 $t = 0$ においてはその最大値の一をとり、出発点において最も激しい衝撃をうける。



第6図 変位曲線

7 結 言

衝撃をあたえる縁石の形状が三角形のような場合においては $t=0$ においては、振幅は零で $t=\tau$ にむかって

$$y(t) = \phi_1 \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{b} \sin bt \right\} - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \sin at - \frac{1}{c} \sin ct \right\} \right]$$

の形状をもって次第に高くなり、 τ より 2τ に向って減少するものと考えられる。また、梯形型衝撃の場合は ϕ_1 より ϕ_2 と係数は異なるが、最初は前者と同様な形をとり、正弦形衝撃の場合も係数は異なるが、すなわち振幅の値は異なるか前と同様な形状をとるものと思考される。

急減三角形の場合は変位は

$$y_1(t) = \phi_2 \tau \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \{ \cos at - \cos bt \} - \frac{1}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \{ \cos at - \cos ct \} \right]$$

の項を含むから最初より高い変位を示し、急激な衝撃をうけるものと思考される。

参 考 文 献

1. Berg, E. J. : The Heavisides Operational Calculus Applied to Engineering and Physics. (Mc Graw-Hill, New York, 1929 2nd ed. 1936)
2. Doetsch, G. Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. (Springer, Berlin, 1937)
3. Churchill, R.W. j Complex Variable and Operational Calculus with Jechnical Applications. (Cambridge Vniversity Press, London, 1942)
4. Churchill, R.V. : Modern Operational Mathematics in Engineering. (Mc Graw-Hill, New York, 1944)

5. Mc Lachlan, N.W. : Modern Operational Calculus with Applications in Technical Mathematics. (Mac Millan, London, 1949)
6. Mc Lachlan, N.W. : Advanced Engineering Mathematics. (Mc Graw-Hill, 6th ed. 1951)
7. Sneddon, I.N. : Functional Analysis. (Handbuch der Physik, Band. 2, Mathematische Methoden II , Springer, 1955)
8. Ditkin, V.A. and Kuznecov, P.I. : Handbook of Operational Calculus. Fundamentals of the Theory and Tables of Formulas. (Moscow and Leningrad, 1951)
9. Clemmow, P.C. : Some Ententions to the Method of Integration by Steepest Descents. Quat. Jour. Mech. Applied Math. Vol, 3. 1950. pp. 241 – 256.
10. Bernkard, R.K., Mechanical Vibrations, Pitman, New York, 1943.
11. Bishop, R.E. D., and Johnson, D. C., Mechanics of Vibration, Cambridge University Press, New York, 1960.
12. Burton, R., Vibration and Impact, Addison-Wesley, Reading, Mass , 1958.
13. Cole, E.B., Theory of Vibrations for Engineers. Crosby Lockwood and Son, London 1950.
14. Den Hartog, J.P., Mechanical Vibrations, 4th ed., Mc Graw-Hill, New York, 1956.
15. Freberg, C.R., and Kemler, E. N., Elements of Mechanical Vibration, 2nd ed., Wiley, New York, 1949.
16. Hansen, H.M., and Chenea, P. F., Mechanics of Vibration, Wiley, New York, 1952.
17. Jacobsen, L.S., and Ayre, R.S., Engineering Vibrations, Mc Graw-Hill New York, 1958.
18. Macduff, J.N., and Curreri, J.R., Vibration Control, Mc Graw-Hill, New York, 1958.
19. Morrill, B., Mechanical Vibrations, Ronald, New York, 1957.
20. Myklestad, N.O., Fundamentals of Vibration Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1956.
21. Scanlan, R.H., and Rosenbaum, Aircraft Vibration and Flutter, Macmillan, New York, 1951.
22. Thomson, W.T., Mechanical Vibrations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1953.
23. Timoshenko, S. and Young, D.H., Vidration Problems in Engineering, Van Nostrand, 3rd Ed., New York, 1955.
24. Tong, K.N. Theory of Vibration, Wiley, New York, 1960.
25. Van Santen, G.W., Mechanical Vibration, Macmillan, 2nd Ed., New York, 1958.
26. Harris, C.M., and Crede, C.E., Shock and Vibration Handbook, Mc Graw-Hill, New York, 1962.
27. Crafton, P.A., Shock and Vibration in Linear Systems, Harper, New York, 1961.
28. Wylie, C.R., Advanced Engineering Mathematics, Mc Graw-Hill, New York, 1951.
29. Wilson, W. Ker, Practical Solution of Torsional Vibration Problems, Wiley, 2nd Ed., New York, 1948.
30. Wilson, W. Ker, Practical Solution of Torsional Vibration Problems. New York, 1956.