

C 数定理と弱い相互作用の対称性

大 高 成 介・高 木 秀 男

C-Number Theorem and Symmetry of Weak Interaction

Sigeyuki OTAKA and Hideo TAKAKI

It is the purpose of this paper to point out that the weak Hamiltonian in the pure leptonic decay is a $U(2) \times U(2)$ symmetry and $(V-A)$ ($V \pm A$) current-current interaction. Furthermore, we describe the relation between the C-number theorem and the conservation laws of weak interaction.

§1 Introduction

弱い相互作用について次の様な現象論的な法則が成立していることがよく知られている。

1. strangeness rule ($\Delta S/\Delta Q=1$, $\Delta S \leq 1$)
2. $V-A$ 相互作用
3. $\Delta I=1/2$ rule
4. 相互作用定数の universality
5. lepton 数の保存

このような事実は相互作用の強さと保存量の数の間にある関係が存在していることを暗示している。以上の現象論的法則を統一的に記述することによって、更に将来の理論への手掛りが得られるであろうという期待のもとに、今まで様々の試みがなされて来た。しかし荷電スピンや strangeness の概念を lepton 過程にまで拡張するという方法を取るにしても、また pure leptonic decay をよく説明する current-current 相互作用を non-leptonic decay に拡張する試みにしても、必ずしも simple な形で成功しているとは思えない。そこで Itō, Fugii^{1), 2)} 等は弱い相互作用を統一的に記述する際に遭遇する困難の原因を、lepton 過程を支配する経験法則と non lepton 過程を支配する経験法則が非常にかけ離れた概念によって記述されている点にあるとし、lepton 又は non lepton 過程のいずれかから出発して他を支配する法則を誘導しようという方針をすて、lepton 又は non lepton に共通する弱い相互作用の通性であるパリティ非保存から出発すべきであると考え C 数定理を導いた。

この論文では § 2 で C 数定理の構造から、C 数定理と保存則との関係についてコメントし、§ 3 で弱い相互作用を対称的な形にかくことを試み、

$$L^e = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}, \quad L^\mu = \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

を doublet とする leptonic spin space (I_1 -空間)を導入しても, また

$$L^l = \begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad L^\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

を doublet とする leptonic spin space (I_2 -空間)を導入しても, 相互作用はこれらの空間で対称的にかける, 即ち $U(2) \times U(2)$ 対称にかけることを明らかにする。しかも, この相互作用がローレンツ空間で $V-A$ 型, I_1 又は I_2 -空間で $V \pm A$ 型, つまり $(V-A)(V \pm A)$ 型 **current-current** 相互作用であることを示す。

§2 C 数定理と保存則

まず簡単に C 数定理についてまとめておこう。

C 数 定 理

仮定「一般に $L = f [\bar{a} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b] [\bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d]$ で与えられる様な $V-A$ 相互作用のうち a, b, c, d を C 数と考えたとき, 恒等的に零にならないもののみが現実に存在し, そうでないものは存在しない。」

また, a, b, c, d が C 数のとき, 次の恒等式が成立する。

$$[\bar{a} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b] [\bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d] + [\bar{a} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c] [\bar{b} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d] \equiv 0$$

上の定理から次の結論が得られる。

3種類の lepton を仮定すると上の仮定を満足して荷電保存に矛盾しない弱い相互作用として問題となる可能な $V-A$ 相互作用は次の型に限られる。

$$f[\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu], \quad f[\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e] [\bar{\mu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu]$$

$$f[\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu], \quad f[\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{\mu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu]$$

これらは lepton 数の保存が満足される様に決定された lepton 間の相互作用を表わしている。例えば $\mu^+ \rightarrow e^+ + e^+ + e^+$ などは禁止される。

以上の定理は $L_u = \bar{\psi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi'$ が零 vector であれば説明できる (しかも一般には $L_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu (1 \pm \gamma_5) \psi'$ であればよい)。このことは選択規則が純幾何学的起源のものであることを示すものであり, そうならば相互作用の型も幾何学的要求によって決まるのではないかという考えから, この逆も証明されており, 結局弱い相互作用の型も選択則も同一の幾何学的基礎にたつ事が

明らかにされた。また、 $\Delta I = -\frac{1}{2}$ rule も Sakata Model を使って説明される。

以上の様にひとつの簡単な仮定から弱い相互作用のいくつかの現象論的な法則が説明出来るのであるが、この定理の問題点は lepton を 3 種類、いいかえれば neutrino を 1 種類と仮定している点にあり、この事がこの定理の中で本質的な役割を演じている事である。また、それにもかかわらず pure leptonic decay の選択則がすべて得られるという事は注目に値する。これは lepton 数の保存則にやきなおせば、 L の保存だけでなく L_e, L_μ の保存則も満足しているという事である。(例えば $\mu^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$ は否定される。) 従って、その後明らかにされた 2 種類の neutrino と必ずしも consistent でない様に思えるわけである。

次にひとつ指摘しておきたい事は 3 種類の lepton の仮定の範囲内で C 数定理と荷電保存則から L, L_e, L_μ の保存則がでたのであるから、その組合わせを変えて、例えば C 数定理と L 保存から選択則、いいかえれば荷電の保存則や L_e, L_μ の保存則が出るかという、簡単にチェック出来るようにそうはならない。例えば $\mu^- \rightarrow e^- + e^+ + \nu$ の様な反応が出てしまう。この様な事情を図示したのが Fig. 1 と Fig. 2 で、Fig. 1 では最初勝手な反応を考え、それを荷電の保存則と C 数定理というフィルターを通すと残った反応はすべて選択則を満足する。即ち L, L_e, L_μ が保存されているという事を示している。一方、Fig. 2 ではフィルターとして L 保存と C 数定理を採用したときは選択則を満たさない反応 (例えば荷電保存則に反する反応) が出てしまうことを示している。同様の事を 4 種類の lepton を仮定してやって同じ結論が得られ、その様子を Fig. 3 に示した。即ち、フィルターとして L_μ, L_e の保存と C 数定理を採用しても選択則は得られず、例えば荷電の保存則に反する反応 $\mu^- \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ などが残ってしまう。以上の考察から荷電の保存則は lepton 数の保存よりきびしい条件であり、従来 Q, L_e, L_μ, B は最も厳密に独立に保存する量子数として同列にあつかわれていたが、lepton 数の保存則よりも荷電の保存則の方がより基本的であるということを暗示している様に思える。

3 種の lepton

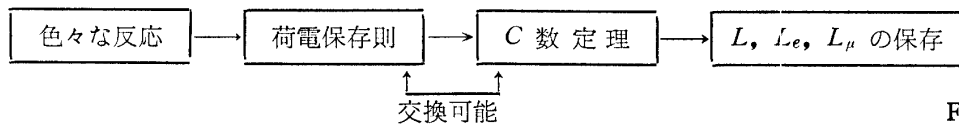


Fig. 1

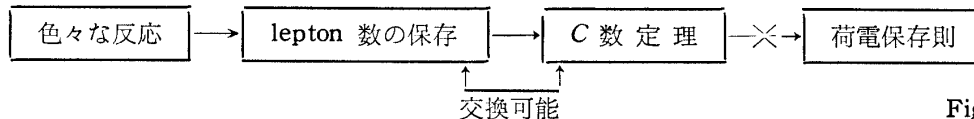


Fig. 2

4 種の lepton

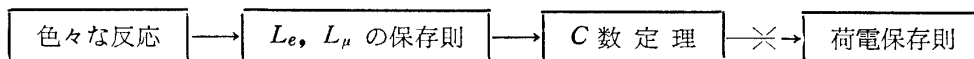


Fig. 3

§ 3 $U(2) \times U(2)$ 対称性と $(V-A)(V \pm A)$ current-current 相互作用

Feynman と Gell-Mann³⁾ によって提案された弱い相互作用を記述する $(V-A)$ current-

current 相互作用は

$$H_{int} = j_\lambda j_\lambda^\dagger \quad (2-1)$$

である。ここで j_λ は

$$j_\lambda = f \left[(\bar{e} 0_\lambda \nu_e) + (\bar{\mu} 0_\lambda \nu_\mu) \right]; 0_\lambda = \gamma_\lambda \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (2-2)$$

である。(2-1) をかきかえるならば (今後, 0_λ を省略する),

$$H_{int} = f^2 \left[(\bar{\mu} \nu_\mu) (\bar{\nu}_\mu \mu) + (\bar{e} \nu_e) (\bar{\nu}_e e) + (\bar{\mu} \nu_\mu) (\bar{\nu}_e e) + (\bar{\nu}_\mu \mu) (\bar{e} \nu_e) \right] \quad (2-3)$$

とかくことも出来る。ただし, γ -matrix は

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

と表示し, metric は

$$a_\lambda b_\lambda = a \cdot b - a_0 b_0 \quad (2-5)$$

とする。

ところで (2-3) の H_{int} の代わりに

$$\mathcal{H}_{int} = f^2 \left[(\bar{\mu} \nu_e) (\bar{\nu}_e \mu) + (\bar{e} \nu_\mu) (\bar{\nu}_\mu e) + (\bar{\mu} \nu_\mu) (\bar{\nu}_e e) + (\bar{\nu}_\mu \mu) (\bar{e} \nu_e) \right] \quad (2-6)$$

を採用しても実験事実と矛盾しない。

いま, lepton を

$$L^\nu \equiv \begin{pmatrix} i\nu_e \\ -i\nu_\mu \end{pmatrix}, L^\mu \equiv \begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

なる doublet として導入すれば次のようになる。すなわち,

$$\begin{aligned} & (\bar{L}^\nu \tau_\lambda L^\nu) (\bar{L}^\mu \tau_\lambda L^\mu) \\ &= -2 [(\bar{\nu}_\mu \nu_e) (\bar{e} \mu) + (\bar{\nu}_e \nu_\mu) (\bar{\mu} e) + (\bar{\nu}_e \nu_e) (\bar{\mu} \mu) + (\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) (\bar{e} e)] \end{aligned} \quad (2-8)$$

ただし,

$$\tau_\lambda \equiv (\boldsymbol{\tau}, \tau_0) \equiv (\boldsymbol{\tau}, -1), \bar{L}^\mu \equiv (\bar{e}, \bar{\mu}) \quad (2-9)$$

とする。C数定理を使うと (2-8) は

$$\begin{aligned}
 & (\bar{L}^\nu \tau_\lambda L^\nu) (\bar{L}^l \tau_\lambda L^l) \\
 &= 2 [(\bar{\nu}_\mu \mu) (\bar{e} \nu_e) + (\bar{\nu}_e e) (\bar{\mu} \nu_\mu) + (\bar{\nu}_e \mu) (\bar{\mu} \nu_e) + (\bar{\nu}_\mu e) (\bar{e} \nu_\mu)] \quad (2-10)
 \end{aligned}$$

となる。従って、(2-6), (2-10) より

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{f^2}{2} (\bar{L}^\nu \tau_\lambda L^\nu) (\bar{L}^l \tau_\lambda L^l) \quad (2-11)$$

となり、全く同様に

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{f^2}{2} (\bar{L}^\nu \tau_\lambda L^l) (\bar{L}^l \tau_\lambda L^\nu) \quad (2-12)$$

ともかける。

次に, lepton を

$$L^e \equiv \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}, \quad L^\mu \equiv \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

なる doublet と考えれば, (2-11), (2-12) と同型の

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{f^2}{2} (\bar{L}^\mu \tau_\lambda L^\mu) (\bar{L}^e \tau_\lambda L^e) \quad (2-14)$$

$$= \frac{f^2}{2} (\bar{L}^\mu \tau_\lambda L^e) (\bar{L}^e \tau_\lambda L^\mu) \quad (2-15)$$

が導びかれる。

以上 (2-11), (2-12) あるいはまた (2-14), (2-15) は各々ユニタリー変換 $U(2)$ に対して \mathcal{H}_{int} は不変である。従って, \mathcal{H}_{int} は $U(2) \times U(2)$ 対称性を持つ。しかしながら, この対称性からどのような物理的意味を引き出せるか, あるいは **Hadron** の世界で近似的に成立する $SU(3)$ と如何なる関係にあるかは今のところ全く判らない。このことに関連して, **Karino** と **Koide** の論文⁴⁾ が特に興味深い。彼等は, lepton の世界を $U(4)$ と仮定して, **Hiroshima Model** に基づいて lepton の世界での quantum number がどのように **Hadron** の世界 $SU(3)$ へ反映しているかを考察している。

次に, **Fujii** の計算方法²⁾に従って, L^ν, L^l に関して \mathcal{H}_{int} を計算すると, \mathcal{H}_{int} が $(V-A)$ ($V \pm A$) 型相互作用になることを示す。

$$\mathcal{L} \equiv \begin{pmatrix} L^\nu \\ L^l \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{L}} \equiv (\bar{L}^\nu, \bar{L}^l), \quad \tilde{\mathcal{L}} \equiv \bar{\mathcal{L}} \Gamma_0 \quad (2-16)$$

を導入すれば,

$$\left(\tilde{\mathcal{L}} \Gamma_\rho \frac{1 - \Gamma_5}{2} \mathcal{L} \right) = - (\bar{L}^\nu T_\rho L^l) \quad (2-17)$$

$$\left(\bar{\mathcal{L}} \Gamma_0 \Gamma_\rho \frac{1 - \Gamma_5}{2} \Gamma_0 \mathcal{L} \right) = - \left(L^\nu T_\rho \bar{L}^\nu \right) \quad (2-18)$$

が成立する。ただし

$$T_\rho \equiv (\mathbf{T}, T_0) \equiv (\mathbf{T}, -1) \quad (2-19)$$

で \mathbf{T} は \mathcal{L} に operate する Pauli matrix で, Γ_ρ は 8 行 8 列の γ -matrix である。従って, (2-12) より

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{f^2}{2} \left(\bar{\mathcal{L}} \Gamma_\rho \frac{1 - \Gamma_5}{2} \mathcal{L} \right) \left(\bar{\mathcal{L}} \Gamma_0 \Gamma_\rho \frac{1 - \Gamma_5}{2} \Gamma_0 \mathcal{L} \right) \quad (2-20)$$

となる。ここで

$$\mathcal{L}^{(1)} \equiv \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{(2)} \equiv \Gamma_0 \mathcal{L}, \quad \tilde{\mathcal{L}}^{(2)} \equiv \bar{\mathcal{L}}^{(2)} \Gamma_0 \equiv \bar{\mathcal{L}}^{(1)} \quad (2-21)$$

を定義すれば, (2-20) は

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{f^2}{2} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{(1)} \Gamma_\rho \frac{1 + \Gamma_5}{2} \mathcal{L}^{(2)} \right) \left(\tilde{\mathcal{L}}^{(2)} \Gamma_\rho \frac{1 + \Gamma_5}{2} \mathcal{L}^{(1)} \right) \quad (2-22)$$

$$= \frac{f^2}{2} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{(1)} \Gamma_\rho \frac{1 - \Gamma_5}{2} \mathcal{L}^{(2)} \right) \left(\tilde{\mathcal{L}}^{(2)} \Gamma_\rho \frac{1 - \Gamma_5}{2} \mathcal{L}^{(1)} \right) \quad (2-23)$$

となる。current

$$\mathcal{J}_{\lambda, \rho} = \frac{f}{2} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{(1)} \gamma_\lambda \frac{1 - \gamma_5}{2} \Gamma_\rho \frac{1 \pm \Gamma_5}{2} \mathcal{L}^{(2)} \right) \quad (2-24)$$

を定義すれば, (2-20) は

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{J}_{\lambda, \rho}^\dagger \mathcal{J}_{\lambda, \rho} \quad (2-24)$$

となる。全く同様に L^e, L^μ に関して \mathcal{H}_{int} を計算すると \mathcal{H}_{int} はまた $(V-A)$ $(V \pm A)$ 相互作用となる。

$(V-A)$ 相互作用の特長のひとつは, 崩壊現象をひきおこさない同種 current の積

$$(\bar{e}\nu_e)(\bar{\nu}_e e) \text{ および } (\bar{\mu}\nu_\mu)(\bar{\nu}_\mu \mu)$$

による相互作用が予言されることである。他方, $(V-A)(V \pm A)$ 相互作用によれば, 同種 current の積は生じるが, 上述のようなものは生じない。つまり,

$$(\bar{e}\nu_\mu)(\bar{\nu}_\mu e) \text{ および } (\bar{\mu}\nu_e)(\bar{\nu}_e \mu)$$

が生じると予言される。

§ 4 Discussion

§ 2 では C 数定理と保存則の関係についてコメントしておいたが、今後の問題についてさらに 2, 3 提起しておこう。一つは現在素粒子模型について色々な提案がなされているが, C 数理論^{1), 2)} を使ってその優劣がつかないかということである。Ito-Fujii の論文ではもっぱら Sakata Model が使われているが, Quark Model や Hiroshima Model を使った場合に違いが出るか等を検討してみる必要がある。また Cabbibo angle の起源, そして C 数理論ではローレンツ空間中に $(V+A)$ 相互作用と $(V-A)$ 相互作用が対等に存在しているが, 実験事実と一致させる為にどのような条件 (物理的又は数学的条件) をつけたら $V+A$ が除けるか等の問題も今後に残されている。

次に neutral current の話題についてふれておこう。過去の弱い相互作用の現象は, 実験データに関する限りすべて charged current のみで説明され, neutral current を必要としないために, 一般的にはないとするほうが自然と考えられていた。ところが1973年 8 月に開かれた国際高エネルギー物理学会で, 弱い相互作用に neutral current が存在することを発見したという報告がなされたのである。neutral current は最近はやりの Weinberg 理論⁵⁾ によって理論的に予言されていたもので, その実験的裏付けが出来たという事で大変な話題となった。しかし, neutral current の存在の予言は Weinberg が最初ではなく, 今までにも neutral current の存在を仮定した色々な議論がなされており, C 数理論を使った仕事もその一つであることを注意しておきたい。即ち § 3 で行った議論でも従来の $(V-A)$ 相互作用の代わりに $(V-A)(V\pm A)$ 相互作用をとれば, $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ が弱い相互作用として存在することになり, これは neutral current の存在を示しているのである。

References

- 1) D. Ito and K. Fujii, Soryushiron Kenkyu, **24**, 145 ; 150 ; 154 ; 245 ; 331 (1961)
- 2) K. Fujii and H. Nagai, Prog. Theor. Phys. **31**, 157 ; 159 (1963)
- 3) R. P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958)
- 4) T. Karino and Y. Koide, Soryushiron Kenkyu, **42**, 391 (1971)
- 5) S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967)

(著者 一般教養 昭和49年 2 月25日受理)