複素質量粒子のスピノル場

高 木 秀 男・大 高 成 介

Spinor Field of Complex Massed Particle

Hideo TAKAKI　Sigeyuki OTAKA

粒子の質量を実数から複素数に拡張した時の real mass の場合の自然な拡張になる様な定式化を complex Dirac $\tilde{\delta}$-function を導入することによって行なった。その際質量を複素数にした時必然的に現われる場の発散項を modified step function ϵ の導入によって防げることを示し，それによって場の量子化および真空の propagator は real massed field とほぼ同型式に書け，real massed field, pure imaginary massed field, complex massed field の理論を統一的に議論することが出来るということが示されている。

第一章　序　　論

輻射場の量子論が非常な成功を収めたにもかかわらず理論が場を局所的なものと仮定していたために，発散に関する困難を有し，その後の発展に大きな障害となった。この困難はよく知られている様に素粒子の内部構造を無視したためであり，そのために理論の構成および計算は非常に簡単なものになったが，一方では素粒子の内部構造に密接な関係がある強い相互作用に関しては予言の出来ない理論となったのである。我々は発散の困難を消す方法を知っているがそれは単に内部構造に関する考察なしに物理量を計算する方法を知っているにすぎない。

その後素粒子の研究はその統一理論を求めて大きく3つの方法で行なわれている。一つは場の演算子を使うことなしに observable だけを使って理論を作る dispersion theory であり，S-matrix や scattering amplitude を使って，ある observable と他の observable を結びつけるのに成功し，current algebra, Regge's theory, Veneziano's model 等に発展し現在素粒子理論の主流となっている。第2の方法は自然が階層的な構造をしているという立場から，全ての素粒子を同一の階層にあるものとしてとらえる点模型を否定し，現在等しく素粒子と呼ばれている粒子の多くのものが他の数少い粒子から作られると考える複合模型の考えである。この様な考えから Sakata 模型，Nagoya 模型，quark 模型等が生まれている。第3の方法は場の演算子を使って基礎的方程式からあらゆる素粒子の kinematical properties を説明しようという非局所場の理論や非線型場の理論である。この2つの理論は全く相反する性格を足場にもっているがこれは素粒子の2重性によるものであり，2つの理論は素粒子に内在する両側面をとりだして，それぞれの立場から既存の理論の修正を試みたといえる。しかしこの2つの理論の目的はまことに雄大であるが，非線型場の理論はそ

の方程式を解く事のむづかしさから，また非局所場の理論は理論の拡張に伴なって現われる新しい困難から多くの問題をかかえている。例えば新しい理論は最低限，極限の場合として局所場の理論を含んだものでなければならず，非局所場の理論は非局所性を表わすパラメーターを含んでいなければならない。しかしこの広がりは必然的にミクロ因果律を破壊する。この様に新しい概念の導入は今までに当然に使われて来た基本的要求，例えばローレンツ不変性，ミクロ因果律，真空状態の存在等に修正を要求するというジレンマに直面した。その上我々は素粒子の kinematical properties が新しく導入した内部自由度から説明され，発散もしない理論を要求するのであるから，その様な期待がすぐに満足されえないのは当然といわなければならない。しかしその様な困難にもかかわらず今まで多くの興味ある model が提案されている。そして最近ではこれら3つのアプローチを統一して発展させ様とする動きが活発になっている。一方現在の理論の困難を除くために常に新しい物理的概念の導入が必要とされ，それをさがし求める努力も少なからず行なわれている。Sakata グループの B- 物質が良い例であり，B- 物質が今までの量子論に従わないにもかかわらず，将来の新しい理論へのイメージを与える点で重要な意義がある。また Tanaka[1] は同様な観点から pure imaginary mass を持った粒子が超光速の速度を持つことに注目し，新しい物理的概念として超光速度の物質（tachyon）を考え，それが作る S-field の基本的な性質について研究し imaginary mass の導入によって必然的に現われる abnormal part の役割について研究した。そしてこの研究は最近 Feinberg,[2] Arons and Sudarshan[3] 等によって継承されている。さらに Yamamoto[4) 5) 6)] は素粒子の内部構造のパラメーターとして complex mass を導入し convergent field theory を作る研究を続けている。

この論文の目的は Dirac 方程式の中に現われる質量を複素数に拡張した時の場の量子化と真空の propagator を real mass の場合の一般化となる様に定式化することである。そのために Dirac δ-function を複素数領域で定義し場の発散を防ぐために modified step function ϵ を導入する。

第2章 Spinor 場の量子化

complex mass に関する Klein-Gordon 場の量子化は，すでに Yamamoto[6] によって研究されている。それ故，この論文においては complex mass に関する spinor 場の量子化を研究する。

Lagrangian density

$$L=-\bar{\psi}\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+\eta\right)\psi,\quad \eta=m+in\ (m,\ n\ \text{は実数}) \tag{1}$$

は，Dirac 方程式

$$\gamma_\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_\lambda}+\eta\psi=0 \tag{2}$$

または

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\lambda}\gamma_\lambda-\eta\bar{\psi}=0 \tag{3}$$

を与える。

方程式（2）の解は，$\psi(x)$ の Fourier 積分

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int dpdE\tilde{\delta}\,(p^2+\eta^2)\tilde{\Lambda}^{+}\chi\,(p)\,\exp i\Big\{\boldsymbol{px}-E\epsilon(I_mE)t\Big\} \tag{4}$$

で表わされる。ここで $\tilde{\Lambda}^{\pm}$ は

$$\tilde{\Lambda}^{\pm}=\frac{\mp i\{\boldsymbol{\gamma p}\mp i\gamma_4E\epsilon(\mp I_mE)\}+\eta}{2\eta} \tag{5}$$

で定義される energy projection operator（付録(B) を参照せよ）とする。また modified step function ϵ と complex Dirac $\tilde{\delta}$−function（付録(A)を参照せよ）は各々次のように定義される。

$$\begin{aligned}\epsilon(I_mE)&=1 \qquad (I_mE\leq 0 \text{ の場合})\\ &=-1 \quad (I_mE>0 \text{ の場合})\end{aligned} \tag{6}$$

$$\tilde{\delta}(z-a)=0 \qquad\qquad (z\neq a) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\int_c\tilde{\delta}(z-a)dz&=1 \qquad (\text{積分路 } c \text{ が } z=a \text{ を通る場合})\\ &=0 \qquad (\text{積分路 } c \text{ が } z=a \text{ を通らない場合})\end{aligned}$$

ただし，z と a は複素数，c は複素平面上の a を通る任意の積分路とする。従って $\tilde{\delta}$ $(p^2+\eta^2)$ は次のように与えられる（付録(A)を参照せよ)。

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(p^2+\eta^2)&=\tilde{\delta}(\boldsymbol{p}^2+\eta^2-E^2)\\ &=\tilde{\delta}(E_p{}^2-E^2)\\ &=\frac{1}{2E_p}\Big[\tilde{\delta}(E+E_p)+\tilde{\delta}(E-E_p)\Big]\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，

$$E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+\eta^2} \tag{9}$$

とする。次に（6）と（8）を用いて，方程式（4）の計算を行なう。

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int dpdE\,\frac{1}{2E_p}\Big[\tilde{\delta}(E+E_p)+\tilde{\delta}(E-E_p)\Big]\tilde{\Lambda}^{+}\chi(\boldsymbol{p},E)\\ &\qquad\times\exp i\Big\{\boldsymbol{px}-E\epsilon(I_mE)t\Big\}\\ &=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{2E_p}\Big[\tilde{\Lambda}^{-}\chi(\boldsymbol{p},-E_p)\exp\,i\Big\{\boldsymbol{px}+E_p\epsilon(-I_mE_p)t\Big\}\\ &\qquad+\tilde{\Lambda}^{+}\chi\,(\boldsymbol{p},\,E_p)\,\exp i\Big\{\boldsymbol{px}-E_p\epsilon(I_mE_p)\,t\Big\}\Big]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{2E_p}\Big[\widetilde{\Lambda}^{-}\chi(-\boldsymbol{p})\exp-i\Big\{\boldsymbol{px}-E_{p}\epsilon(-I_mE_p)t\Big\}$$

$$+\widetilde{\Lambda}^{+}\chi(\boldsymbol{p})\exp i\Big\{\boldsymbol{px}-E_{p}\epsilon(I_mE_p)t\Big\}\Big]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{r=1,2}\int d\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{\eta}{E_p}}\Big[a_r(\boldsymbol{p})u_r(\boldsymbol{p})\exp i\Big\{\boldsymbol{px}-E_{p}\epsilon(I_mE_p)t\Big\}$$

$$+b_r^{\dagger}(\boldsymbol{p})v_r(\boldsymbol{p})\exp-i\Big\{\boldsymbol{px}-E_{p}\epsilon(-I_mE_p)t\Big\}\Big] \tag{10}$$

ただし,

$$\widetilde{\Lambda}^{+}\chi(\boldsymbol{p})=\sqrt{8\pi\eta E_p}\sum_r a_r(\boldsymbol{p})u_r(\boldsymbol{p}) \tag{11}$$

$$\widetilde{\Lambda}^{-}\chi(-\boldsymbol{p})=\sqrt{8\pi\eta E_p}\sum_r b_r^{\dagger}(\boldsymbol{p})v_r(\boldsymbol{p})$$

とおく。同様に方程式(3)の解は

$$\bar{\psi}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{r=1,2}\int d\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{\eta}{E_p}}\Big[a_r^{\dagger}(\boldsymbol{p})\bar{u}_r(\boldsymbol{p})\exp-i\Big\{\boldsymbol{px}-E_{p}\epsilon(-I_mE_p)t\Big\}$$

$$+b_r(\boldsymbol{p})\bar{v}_r(\boldsymbol{p})\exp i\Big\{\boldsymbol{px}-E_{p}\epsilon(I_mE_p)t\Big\}\Big] \tag{12}$$

となる。以上より, $t>0$ のみを考えるならば, $t\longrightarrow\infty$ に対して spinor 場(10)および(12)は収束する。

方程式(10)と(12)に含まれる spinor u_r と v_r は各々

$$\Big[i\Big\{\boldsymbol{\gamma p}+i\gamma_4E_{p}\epsilon(I_mE_p)\Big\}+\eta\Big]u_r=0 \tag{13}$$

$$\Big[-i\Big\{\boldsymbol{\gamma p}-i\gamma_4E_{p}\epsilon(-I_mE_p)\Big\}+\eta\Big]v_r=0 \tag{14}$$

を満足し, r は u 又は v の spin 方向を示す。また

$$\bar{u}_ru_s=\delta_{rs},\quad \bar{v}_rv_s=-\delta_{rs} \tag{15}$$

なる convention を採用するならば,次のような関係が導びかれる。

$$u_r^{\dagger}u_s=\frac{E}{\eta}\delta_{rs},\quad v_r^{\dagger}v_s=\frac{E}{\eta}\delta_{rs} \tag{16}$$

$$\sum_{r=1}^{2}\Big(u_{r\alpha}\bar{u}_{r\beta}-v_{r\alpha}\bar{v}_{r\beta}\Big)=\delta_{\alpha\beta} \tag{17}$$

$$\tilde{\Lambda}^{+}=\sum_{r=1}^{2} u_r\bar{u}_r,\quad \tilde{\Lambda}^{-}=-\sum_{r=1}^{2} v_r\bar{v}_r \tag{18}$$

次の反交換関係を定義する。

$$\left\{a_r(\boldsymbol{p}),\ a_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\right\}=\delta_{rs}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{19}$$

$$\left\{b_r(\boldsymbol{p}),\ b_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\right\}=\delta_{rs}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{20}$$

$$\left\{\text{other combinations}\right\}=0 \tag{21}$$

第 3 章　真空の Propagator

real mass を含んでいる関数 $\Delta(x)$ を complex mass を含む関数 $\tilde{\Delta}(x)$ に拡張してその性質を研究し，次に真空の定義から真空の propagator の計算を行なう。

spinor 場 $\psi(x)$ および $\bar{\psi}(x)$ を次のように二つに分ける。

$$\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_r\int d\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{\eta}{E_p}}\,a_r(\boldsymbol{p})u_r(\boldsymbol{p})\exp i\left\{\boldsymbol{px}-E_p\epsilon(I_mE_p)\,t\right\} \tag{22}$$

$$\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_r\int d\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{\eta}{E_p}}\,b_r^{\dagger}(\boldsymbol{p})v_r(\boldsymbol{p})\exp -i\left\{\boldsymbol{px}-E_p\epsilon(I_mE_p)t\right\} \tag{23}$$

$$\therefore\psi(x)=\psi^{(-)}(x)+\psi^{(+)}(x) \tag{24}$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_r\int d\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{\eta}{E_p}}\,b_r(\boldsymbol{p})\bar{v}_r(\boldsymbol{p})\exp i\left\{\boldsymbol{px}-E_p\epsilon(I_mE_p)t\right\} \tag{25}$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_r\int d\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{\eta}{E_p}}\,a_r^{\dagger}(\boldsymbol{p})\bar{u}_r(\boldsymbol{p})\exp -i\left\{\boldsymbol{px}-E_p\epsilon(-I_mE_p)t\right\} \tag{26}$$

$$\therefore\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}^{(-)}(x)+\bar{\psi}^{(+)}(x) \tag{27}$$

方程式 (22) と (26) および (23) と (25) を比較すれば，

$$\bar{\psi}^{(+)}=\overline{\psi^{(-)}} \tag{28}$$

$$\bar{\psi}^{(-)}=\overline{\psi^{(+)}} \tag{29}$$

ということがわかる。

式 (18) を用いて，次の Dirac operator の積の計算を行なう。

$$
\begin{aligned}
&\left\{\psi_\alpha{}^{(-)}(\boldsymbol{x}),\ \bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(\boldsymbol{x}')\right\}\\
&=-\left[\left\{\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}+\gamma_4 E_p\epsilon\,(-I_mE_p)\right\}-\eta\right]_{\alpha\beta}\\
&\quad\times\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{2E_p}\exp i\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-E_p\epsilon(I_mE_p)(t-t')\right]\\
&=-\left[\left\{\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}+\gamma_4 E_p\epsilon\,(-I_mE_p)\right\}-\eta\right]_{\alpha\beta}\tilde{\Delta}^+\,(x-x')
\end{aligned}
\tag{30}
$$

ここで関数$\tilde{\Delta}^+(x-x')$，$\tilde{\Delta}^-(x-x')$ および$\Delta(x-x')$ は各々

$$
\tilde{\Delta}^+(x-x')=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{2E_p}\exp i\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-E_p\epsilon(I_mE_p)(t-t')\right] \tag{31}
$$

$$
\tilde{\Delta}^-(x-x')=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{2E_p}\exp i\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-E_p\epsilon(I_mE_p)(t-t')\right] \tag{32}
$$

$$
\tilde{\Delta}(x-x')=\tilde{\Delta}^+(x-x')+\tilde{\Delta}^-(x-x') \tag{33}
$$

または

$$
\tilde{\Delta}^+(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c+}d\boldsymbol{p}dE\frac{1}{p^2+\eta^2}\exp i\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-E_p\epsilon(I_mE_p)(t-t')\right] \tag{31$'$}
$$

$$
\tilde{\Delta}^-(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c_-}d\boldsymbol{p}dE\frac{1}{p^2+\eta^2}\exp i\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-E_p\epsilon(I_mE_p)(t-t')\right] \tag{32$'$}
$$

$$
\tilde{\Delta}(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c}d\boldsymbol{p}dE\frac{1}{p^2+\eta^2}\exp i\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-E_p\epsilon(I_mE_p)(t-t')\right] \tag{33$'$}
$$

で定義される。積分路 C_+，C_- および C は各々 **Fig. 1**，**Fig. 2**，および **Fig. 3** の複素平面で与えられる。ただし C_+ および C_- は各々極 $E=E_p$ および $E=-E_p$ を積分路内部に含み，各々右まわりおよび左まわりの積分路とする。また C は極 $E=E_p$，$E=-E_p$ を内部に含む左まわりの積分路とする。

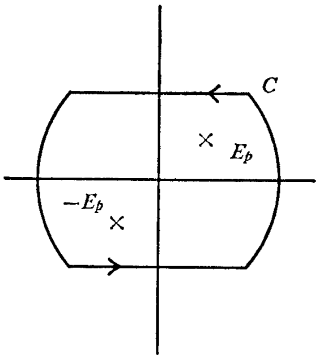

Fig. 1

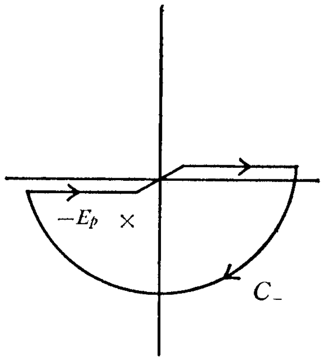

Fig. 2

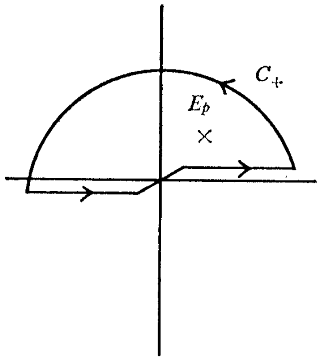

Fig. 3

式 (30) と同様にして，次の関係式が得られる。

$$\left\{\psi_\alpha{}^{(-)}(x),\quad \bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(x')\right\}=0 \tag{34}$$

$$\left\{\psi_\alpha{}^{(+)}(x),\quad \bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(x')\right\}=0 \tag{35}$$

$$\left\{\psi_\alpha{}^{(+)}(x),\quad \bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(x')\right\}=-\left[\left\{\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}+\gamma_4 E_p\epsilon(I_m E_p)\right\}-\eta\right]_{\alpha\beta}\tilde{\Delta}^-(x-x') \tag{36}$$

真空の定義を

$$a_r(\boldsymbol{p})\mid 0>=b_r(\boldsymbol{p})\mid 0>=0 \tag{37}$$

$$<0\mid a_r{}^\dagger(\boldsymbol{p})=<0\mid b_r{}^\dagger(\boldsymbol{p})=0 \tag{38}$$

または

$$\psi^{(-)}(x)\mid 0>=\bar{\psi}^{(-)}(x)\mid 0>=0 \tag{39}$$

$$<0\mid\bar{\psi}^{(+)}(x)=<0\mid\psi^{(+)}(x)=0 \tag{40}$$

とする。

そこで式 (30) を用いて Dirac operator の積に対する真空期待値を計算する。

$$\begin{aligned}&<0\mid T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\mid 0>\\&=<0\mid[\psi_\alpha{}^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(x')+\psi_\alpha{}^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(x')+\psi_\alpha{}^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(x')\\&+\psi_\alpha{}^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(x')]\mid 0>=<0\mid\psi_\alpha{}^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(x')\mid 0>\\&=-\left[\left\{\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}+\gamma_4E_p\epsilon(-I_mE_p)\right\}-\eta\right]\tilde{\Delta}^+(x-x')\end{aligned} \tag{41}$$

故に，I_mE_p の正・負に関係なく，$t-t'\longrightarrow\infty$ に対して真空の propagator (41) が収束する。ここで，modified step function $\epsilon(I_mE_p)$ が重要な役割を果している。

第 4 章　結　　び

よく知られている様に特殊相対論において $\eta=i\mu$（μ は実数）とおくと，

$$E=\frac{\mu c^2}{(v^2/c^2-1)^{1/2}},\quad |P|=\frac{\mu v}{(v^2/c^2-1)^{1/2}}$$

となり，これから $v/c=|P|/E>1$ が結論され，光の速度より大きな速度を持った粒子（tachyon）を考えることが出来る。この様な考えを基礎にして Tanaka[1]，Feinberg[2]，Arons and Sudarshan[3] は tachyon の存在の可能性およびその性質を調べた。さらに Yamamoto[6] は質量を複素数に拡張して理論を展開し nonlocal field theory に関係づけている。

この様に質量を実数から虚数または複素数に拡張した時常に現われる問題点は場の発散の問題である。Tanaka は場の発散項を abnormal term としてその性質を調べ，Feinberg は場の発散を防ぐために $\boldsymbol{k}$ ついて積分を $\boldsymbol{k}^2>\mu^2$ の範囲に制限して議論を進めている。しかしこの様な制限は場 $\varphi_\pm$ が通常の完全な組を作らないために，新たに別の問題を生みだす結果となり Lorentz 不変な理論を作る事がむつかしくなっている。Yamamoto[6] は Klein-Gordon 方程式に従う spinless particle について研したが，場の発散問題を解決しないままで議論が進められている。

この論文では scalar 場より，より基本的と考えられている spinor 場を complex mass の場合にも発散しないように定式化した。発散を防ぐために modified step function ϵ を導入したが，そのために従来の energy projection operator $\Lambda^\pm$ が変形を受けたが spinor u, v の満足する方程式を修正することによって矛盾のない一般化が出来た。

今後の主なる問題点は

(i) spinor 場における Lorentz 不変性

(ii) spinor 場における相互作用

である。

References

1) Tanaka, S., Theory of matter with super light velocity, Prog. Theor. Phys., 24, 171, 1960

2) Feinberg, G., Possibility of faster-than-light particles, Phys. Rev., 159, 1089, 1967

3) Arons, M. E., and E. C. G. Sudarshan, Lorentz invariance, local field theory, and faster-than-light particles, Phys. Rev., 173, 1622, 1968

4) Yamamoto, H., Convergent field theory with complex masses, Prog. Theor. Phys., 42, 707, 1969

5) Yamamoto, H., Convergent field theory with complex masses. II, Prog. Theor. Phys., 43, 520, 1970

6) Yamamoto, H., Quantum field theory of complex mass, Prog. Theor. Phys., 44, 272, 1970

（昭和45年12月21日 受理）

付 録（A）complex Dirac $\tilde{\delta}$-function

次の性質を有する complex Dirac $\tilde{\delta}$-function を定義する。

(i) $\tilde{\delta}(z-a)=0 \qquad (z\neq a)$

(ii) $\int_c \tilde{\delta}(z-a)dz=1$ （積分路 c が $z=a$ を通る場合）

$=0$ （積分路 c が $z=a$ を通らない場合）

ただし complex Dirac $\tilde{\delta}$-function と Dirac δ-function の関係は

$$\int_c \tilde{\delta}(z-a)dz = \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(R_e z - R_e a)\delta(I_m z - I_m a)d(R_e z)d(I_m z)$$

とおき，z と a は複素数，c は複素平面上の a を通る任意の積分路とする。complex Dirac $\tilde{\delta}$-function のいくつかの性質は，Dirac δ-function のそれと全く同様に形式化が可能である。complex Dirac $\tilde{\delta}$-function の定義より次の関係式が導びかれる。

$$\int_c f(z)\tilde{\delta}(z-a)dz = f(a) \tag{A-1}$$

$$\tilde{\delta}(-z) = \tilde{\delta}(z) \tag{A-2}$$

$$z\tilde{\delta}(z) = 0 \tag{A-3}$$

$$\tilde{\delta}(az) = a^{-1}\tilde{\delta}(z) \tag{A-4}$$

$$\tilde{\delta}(z^2-a^2) = \frac{1}{2a}\left\{\tilde{\delta}(z-a)+\tilde{\delta}(z+b)\right\} \tag{A-5}$$

$$\int_c \tilde{\delta}(a-z)\tilde{\delta}(z-b)dz = \tilde{\delta}(a-b) \tag{A-6}$$

この論文中の証明にでてくる（A-5）に関して証明する。

$$\begin{aligned} I &= \int_c f(z)\tilde{\delta}(z^2-a^2)dz \\ &= \int_{c(+)} f(z)\tilde{\delta}(z^2-a^2)dz + \int_{c(-)} f(z)\tilde{\delta}(z^2-a^2)dz \end{aligned}$$

ここで $c_{(+)}$，$c_{(-)}$ は各々 $z=a$，$z=-a$ を通る積分路とする。

$$\begin{aligned} I &= \int_{c'(+)} f(\sqrt{a^2+y})\tilde{\delta}(y)d(\sqrt{a^2+y}) + \int_{c'(-)} f(-\sqrt{a^2+y})\tilde{\delta}(y)d(-\sqrt{a^2+y}) \\ &= \int_{c'(+)} f(\sqrt{a^2+y})\tilde{\delta}(y)\frac{dy}{2\sqrt{a^2+y}} + \int_{-c'(-)} f(-\sqrt{a^2+y})\tilde{\delta}(y)\frac{dy}{2\sqrt{a^2+y}} \\ &= \frac{1}{2a}\left\{f(a)+f(-a)\right\} \end{aligned}$$

他方

$$\int_c f(z)\left[\frac{1}{2a}\left\{\tilde{\delta}(z-a)+\tilde{\delta}(z+a)\right\}\right] = \frac{1}{2a}\left\{f(a)+f(-a)\right\}$$

である。

$$\therefore \tilde{\delta}(z^2-a^2) = \frac{1}{2a}\left\{\tilde{\delta}(z-a)+\tilde{\delta}(z+a)\right\}$$

付 録（B）energy projection operator $\tilde{\Lambda}^{\pm}$

energy projection operator $\tilde{\Lambda}^{\pm}$ を次のように定義する。

$$\tilde{\Lambda}^{\pm}=\frac{\mp i\{\boldsymbol{\gamma p}\mp i\gamma_4 E\epsilon(\mp I_m E)\}+\eta}{2\eta} \qquad \text{(B-1)}$$

ただし spinor u と v は次の方程式を満足するものとする。

$$[i\{\boldsymbol{\gamma p}+i\gamma_4 E_p\epsilon(I_m E_p)\}+\eta]u=0 \qquad \text{(B-2)}$$

$$[-i\{\boldsymbol{\gamma p}-i\gamma_4 E_p\epsilon(-I_m E_p)\}+\eta]v=0 \qquad \text{(B-3)}$$

以上から $\Lambda^{\pm}$ と同様な次の関係式が導びかれる。

$$\tilde{\Lambda}^{+}+\tilde{\Lambda}^{-}=\hat{1} \qquad \text{(B-4)}$$

$$\tilde{\Lambda}^{\pm}\tilde{\Lambda}^{\mp}=0 \qquad \text{(B-5)}$$

$$\left(\tilde{\Lambda}^{+}\right)^2=\left(\tilde{\Lambda}^{-}\right)^2=0 \qquad \text{(B-6)}$$

$$\tilde{\Lambda}^{+}u=u,\quad \tilde{\Lambda}^{+}v=0 \qquad \text{(B-7)}$$

$$\tilde{\Lambda}^{-}v=v,\quad \tilde{\Lambda}^{-}u=0 \qquad \text{(B-8)}$$

（著者　一般教養　　昭和45年12月21日受理）