

自動車用ハイポイドギヤの測地的 捩率と曲率の影響について

高 橋 幸 一

Effect of Geodesic Torsion and Curvature on the Hypoid Tooth Surfaces

Koichi TAKAHASHI

In order to develop the hypoid gear bearing by the conventional cutting systems, a considerable time will be required in the automotive production.

This paper presents the new theory using geodesic torsion and curvature on the surface of hypoid gear and makes possible to get excellent bearing on the computer simulations instead of the trial-error cutting method.

1. ま え が き

自動車用ハイポイドギヤの歴史は、それ程古くはない。1925年、米国はグリーンソン社の E. Wildhaber 氏によって、この種歯車は初めて開発されたが、理論的に体系づけられた¹⁾のは1946年のことである。同氏は二次曲面を基本とする独自の解法により、設計および歯切法をシステム化し、今日の量産体制の基礎をつくった。

しかし、量産化に必要なマスターギヤを作るためには、試行錯誤的な実験歯切りを繰り返さなければならない。最近では改善のきざしもある²⁾が、今なお歯当りの開発実験は続けられている。

本論文の目標は、上記の方式を電算機によって正しくシミュレートし、優れた歯当りを迅速かつ容易に得ることである。本報告では、まず必要な基礎理論としての測地的曲率と捩率の影響について、まとめて発表する。

2. ハイポイドギヤに関する諸定義

元来、歯車は回転を伝達するための機構であるから、一組の歯車軸が必要である。これらの二軸が交差せず、平行でもない歯車を食違い軸歯車 (hyperboloidal gear) と定義する。ハイポイドギヤは円錐状の食違い軸歯車である。二軸が直角でない場合のハイポイドギヤを angular hypoid gear として区別することもある。

普通のハイポイドギヤには、まがりばが使用される。歯すじが直線状であるはすばを用いる場合は、skew hypoid gear³⁾と名づける。二軸が交差し、直線上のはすばを使用する場合があります、

これを skew bevel gear という。これらを合わせて skew gear と定義する。このため、食違い軸歯車を skew gear と英訳することは妥当ではない。

いまハイポイドギヤの二軸のなす角を軸角 (shaft angle) Σ , オフセット (offset) を E で表す。歯車軸方向を単位ベクトル \mathbf{a}_i , 角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}_i$ で表し, $\boldsymbol{\omega}_i$ をスカラーとすれば, $\boldsymbol{\omega}_i = \omega_i \mathbf{a}_i$ として求められる。また, かみあう歯面をベクトル \mathbf{x}_i として考察する。ここに添字 $i = 1$ はピニオン, 2 はギヤ側の諸元を表すことにする。

上記のごとき歯面 \mathbf{x}_1 および \mathbf{x}_2 が線接触のかみあいをする場合, 両歯面は互いに共役であると定義する。

つぎに, 上記の二歯面が, 時刻 t において図-1 のごとく線接触する場合, その接触線を C 曲線として表す。 \mathbf{x}_2 歯面を固定して考えれば, \mathbf{x}_1 歯面は相対回転運動によって, 時刻 $t + \delta t$ には新しい C' 接触線に移動する。ここに δt は微小な時間とする。 C 曲線上の任意の点 P には, 上記の運動によって相対速度ベクトル \mathbf{w} が生ずる。同様にして C' 接触線上の任意の点, 例えば Q_1 においては \mathbf{w} と異なる相対速度ベクトル \mathbf{w}_1 が生ずる。

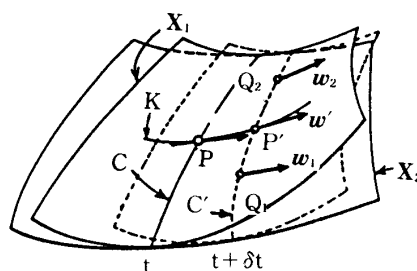


図-1 瞬間接触線とすべり線

いま \mathbf{x}_2 歯面上において, P 点で \mathbf{w} に接する曲線 K を引き, C 曲線とは P' 点で交わるものとする。 P' 点には相対速度ベクトル \mathbf{w}' が生じたと考えれば, 同点においても引続き相対速度 \mathbf{w}' に接するごとく, 曲線 K を描くことができる。上記のごとき曲線 K をすべり線 (slide line) と定義する。

設計および歯切りの基準点として, 点 P を歯面のほぼ中央に位置づける場合, これを mean point⁴⁾と呼ぶ。本論文では上記基準点 P を考察点として扱うことにする。平歯車におけるピッチ点 (pitch point) に相当するため, ピッチ点と呼ぶこともある。考察点 P を通るすべり線を, 特に歯すじと定義する。欧米では pitch curve⁵⁾, pitch line⁶⁾, tooth trace⁷⁾, tooth spiral⁸⁾などと呼ばれ, 明確にされていない。本論文では歯すじの内容を考えて, spiral pitch curve と定める。一方において \mathbf{x}_1 歯面を固定して考えれば, P 点を通るピニオン側の歯すじが得られる。

ここに一組のハイポイドギヤの歯すじがきまる。一組の歯すじは P 点で接触するが, 回転と共に接触点は移動し, 空間上に一つの軌跡をえがく。上記接触点の軌跡によって生ずる曲線をピッチ線 (pitch line) と定義する。またピッチ線が, それぞれの歯車軸まわりに回転, またはねじれ運動することによって生ずる曲面をピッチ面 (pitch surface) と定義する。

3. 曲面上の諸曲線

接触線や歯すじは, 歯面という曲面上の曲線である。考察点 P を通る曲線は, P 点からの弧長を s とすれば, 空間曲線の一つとしてベクトル $\mathbf{x}(s)$ で表される。上記曲線の曲率, 捩率半径を ρ ,

τ とし、 $\mathbf{x}' = d\mathbf{x}/ds$, $\mathbf{x}'' = d^2\mathbf{x}/ds^2$, $\mathbf{x}''' = d^3\mathbf{x}/ds^3$ として表せば、微分幾何学的につぎの公式がある。

$$1/\rho = \sqrt{\{\mathbf{x}''(s)\}^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$1/\tau = \rho^2 |\mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{x}'''| \quad \dots\dots\dots (2)$$

いま $\rho = \rho(s)$, $\tau = \tau(s)$ なる方程式が与えられるとき、空間曲線は決定される⁹⁾。

3. 1 曲面上の曲線に対する測地線

考察点 P を通る歯面をベクトル \mathbf{x} とする。P 点において \mathbf{x} の法線を引き x 軸に定め、相対速度 \mathbf{w} 方向を $-z$ 軸とすれば、直角座標系 P-xyz がきまる。ここに $y-z$ 平面は点 P を通る \mathbf{x} の接平面になる。

\mathbf{x} 歯面上の曲線を $\mathbf{x}(s)$ とすれば、P 点において $\mathbf{x}(s)$ に接する測地線 $\mathbf{x}(s_g)$ を引くことができる。ここに P 点からの測地線の弧長を s_g にて表す。上記測地線の曲率半径を ρ^* 、振率半径を τ とすれば、 $\rho^*(s_g)$, $\tau(s_g)$ が与えられる場合は、 $\mathbf{x}(s_g)$ は決定できる。

いま図-2 に示すごとく、曲面上の曲線 $\mathbf{x}(s)$ 上の点 P, P_1 , P_2 , ... においては、同曲線に接する測地線をそれぞれ引くことができる。各測地線は曲面上に多角形を形成するので、曲線 $\mathbf{x}(s)$ 上の点を無限に多くとれば、上記の多角形は $\mathbf{x}(s)$ 曲線に一致する。そこで曲面上の曲線の微小部分は、その部分に接する測地線の微小部分として扱う。すなわち曲面上の曲線には、曲線自身の曲率、振率があるが、その曲線に接する測地線の曲率、振率をもつことである。測地線の曲率と振率は、微分幾何学的には、曲線 $\mathbf{x}(s)$ の法曲率および測地的振率に一致する。以上のことが、曲面と曲面上の曲線とを結ぶ関係である。

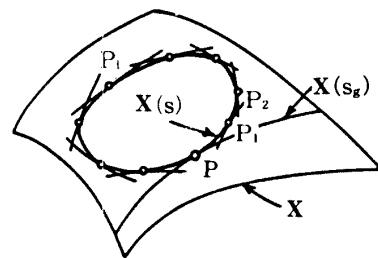


図-2 測地線と測地線多角形

3. 2 共役歯面の接触線

図-3 は y, z をパラメータとする歯面 $\mathbf{x}(y, z)$ を、P-xyz 座標系によって表した説明図である。まず \mathbf{x} 上の原点 P における主方向に s' , s'' 座標軸をとり、P- $xs's''$ 座標系とする。つぎに主方向の一つ s'' 軸と z 軸とのなす角を δ とすれば、P-xyz 座標系との関係が分る。 ρ' および ρ'' は一組の主曲率半径を図示したものである。かくて、曲面 $\mathbf{x}(s', s'')$ は座標変換の形で $\mathbf{x}(y, z)$ にかき換えられる。ベクトル \mathbf{x} を共役歯面 \mathbf{x}_i で表せば、

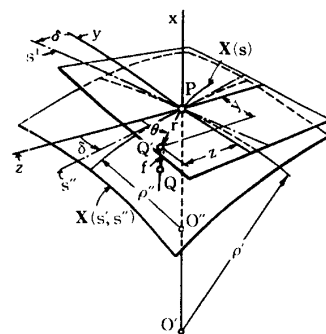


図-3 曲面の表示と P-xyz 座標系

$$\mathbf{x}_i(y, z) = \begin{bmatrix} -f_i(y, z) \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

として表示される。ここに $x = -f_i(y, z)$ である。考察点 P を通る共役歯面 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の接触線を $\mathbf{x}(s)$ とすれば、この曲線は両歯面に共通であるから、 $\mathbf{x}(s)$ 上ではつぎの式が成り立つ。

$$f_1(y, z) = f_2(y, z) \quad \dots\dots\dots (4)$$

式 (4) は $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が接触するために必要な条件の一つである。 yz 平面への投影曲線も共通であるから、つぎの式も成り立つ。

$$f_i(y, z) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

いま図-3の点 Q を接触線上の点とし、かつ P 点の近傍の点として考察する。また円柱極座標系で表すため、 $y = -r \sin \theta, z = r \cos \theta$ とし、三次の歯面係数を G_i, H_i, L_i, M_i とすれば、式 (3) はつぎのごとく書き換えられる¹⁰⁾。ただし r の4次以上は省略する。

$$\mathbf{x}_i(r, \theta) = \begin{bmatrix} -f_i(r, \theta) \\ -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{ここに} \quad f_i(r, \theta) = \frac{r^2}{2} V_i(\theta) + \frac{r^3}{6} X_{si}(\theta)$$

$$V_i(\theta) = \sin^2(\theta - \delta_i) / \rho'_i + \cos^2(\theta - \delta_i) / \rho''_i$$

$$X_{si}(\theta) = -G_i \sin^3(\theta - \delta_i) + 3H_i \sin^2(\theta - \delta_i) \cos(\theta - \delta_i)$$

$$-3L_i \sin(\theta - \delta_i) \cos^2(\theta - \delta_i) + M_i \cos^3(\theta - \delta_i)$$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 歯面が $\mathbf{x}(s)$ を接触線とするためには、点 Q における単位法線ベクトルを $\mathbf{n}_1(s)$ および $\mathbf{n}_2(s)$ とするとき、次の式が同時に成立することである。

$$\left. \begin{aligned} f_1(r, \theta) &= f_2(r, \theta) \\ \mathbf{n}_1(s) \times \mathbf{n}_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

投影曲線を表す式 (5) も共通であるから、

$$f_i(r, \theta) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) は $r = r(\theta)$ なる関数関係を示す。

つぎに原点 P における単位法線ベクトルを特に \mathbf{n} で表し、微小弧長 $\widehat{PQ} = ds$ とすれば、Q 点における単位法線ベクトル $\mathbf{n}_i = \mathbf{n} + [d\mathbf{n}_i/ds]_P ds$ によって表される。 $[\]_P$ は原点における値を示す。式 (7) に代入して

$$\left[\frac{d\mathbf{n}_1}{ds} \right]_P = \left[\frac{d\mathbf{n}_2}{ds} \right]_P \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\left[\frac{d\mathbf{x}_1}{ds} \right]_P = \left[\frac{d\mathbf{x}_2}{ds} \right]_P \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{しかるに} \quad \frac{d\mathbf{x}_i}{ds} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} \quad \dots\dots\dots (11)$$

原点の近傍で考えるので、 $ds = dr$ である。そこで $r' = dr/d\theta$ とすれば式 (11) は

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{ds} = \frac{d\mathbf{x}_i}{dr} + \frac{1}{r'} \frac{d\mathbf{x}_i}{d\theta} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (6) において $\partial f_i/\partial r = (f_i)_r$, $\partial f_i/\partial \theta = (f_i)_\theta$ として表せば、式 (12) に代入して

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{ds} = \begin{bmatrix} -(f_i)_r - \frac{1}{r'}(f_i)_\theta \\ -\sin \theta - \frac{r}{r'} \cos \theta \\ \cos \theta - \frac{r}{r'} \sin \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$r = 0$ の原点では $\mathbf{x}(s)$ の方向が定まるので、 $\theta = \sigma$ とする。

$$\left[\frac{d\mathbf{x}_i}{ds} \right]_p = \begin{bmatrix} 0, & -\sin \sigma, & \cos \sigma \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

また曲線 $\mathbf{x}(s)$ 上の点 Q における \mathbf{n}_i を微分幾何学的に計算すれば、

$$\mathbf{n}_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_i)_r^2 + \left\{ \frac{(f_i)_\theta}{r} \right\}^2}} \begin{bmatrix} -1 \\ (f_i)_r \sin \theta + \frac{(f_i)_\theta}{r} \cos \theta \\ -(f_i)_r \cos \theta + \frac{(f_i)_\theta}{r} \sin \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

また $\partial \mathbf{n}_i/\partial r = (\mathbf{n}_i)_r$, $\partial \mathbf{n}_i/\partial \theta = (\mathbf{n}_i)_\theta$ として表せば、つぎの式を得る。

$$\frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = (\mathbf{n}_i)_r + \frac{1}{r'}(\mathbf{n}_i)_\theta \quad \dots\dots\dots (17)$$

測地線 $\mathbf{x}(s_g)$ について、フルネーの式を応用すれば、 $ds_g = ds$ とおけるから、

$$\frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{x}_i}{ds} + \frac{1}{\tau} \frac{d\mathbf{x}_i}{ds} \times \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに ρ は接触線方向に関する法曲率半径、 τ は測地的振率半径を表す。式 (17), (18) から原点の近傍の点 Q では、つぎのごとく計算ができる。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\mathbf{n}_i}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{ds} = f_{rr} - 2 \frac{1}{r'} \left(\frac{f_\theta}{r} - f_{r\theta} \right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{d\mathbf{n}_i}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{ds} \times \mathbf{n} \\ &= \frac{f_\theta}{r^2} - \frac{f_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r'} \left(r f_{rr} - f_r - \frac{f_{\theta\theta}}{r} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに $f_{rr} = \partial^2(f_i)/\partial r^2$, $f_\theta = \partial(f_i)/\partial \theta$,

$$f_{r\theta} = \partial^2(f_i)/\partial r \partial \theta, \quad f_{\theta\theta} = \partial^2(f_i)/\partial \theta^2$$

いま原点における接触線方向の法曲率を $1/\rho_s$, 測地的振率を $1/\tau_s$ とすれば、両共役歯面では共通なものとなる。そこで $r = 0$ の原点で $1/\rho_s$ を求めると、 $[\theta]_p = \sigma$ として、

$$\frac{\sin^2(\sigma - \delta_1)}{\rho_1'} + \frac{\cos^2(\sigma - \delta_2)}{\rho_1''} = \frac{\sin^2(\sigma - \delta_2)}{\rho_2'} + \frac{\cos^2(\sigma - \delta_2)}{\rho_2''} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$1/\tau_s$ について求めれば、

$$-\left(\frac{1}{\rho'_1}-\frac{1}{\rho''_1}\right)\sin(\sigma-\delta_1)\cos(\sigma-\delta_1)=-\left(\frac{1}{\rho'_2}-\frac{1}{\rho''_2}\right)\sin(\sigma-\delta_2)\cos(\sigma-\delta_2) \quad \cdots \cdots (22)$$

原点の近傍では $r \neq 0$ である。 $2f_i = r^2 F_i(r, \theta)$ とおけば、式 (6) より

$$F_i(r, \theta) = \frac{\sin^2(\theta-\delta_i)}{\rho'_i} + \frac{\cos^2(\theta-\delta_i)}{\rho''_i} + \frac{r}{3} X_{si}(\theta) \quad \cdots \cdots (23)$$

式 (23) は $F_i = 0$ とおけば、接触線の yz 平面への投影曲線を表す。かかる場合、 $\theta = \theta(r)$ の関係を得るため、 $d\theta/dr = 1/r'$ 、 $d^2\theta/dr^2 = -r''/(r')^3$ であることを利用すれば、 F_i はつぎのごとく、 r の無限級数として展開される。

$$F_i = [F_i]_p + r \left[\frac{1}{r'} \left(\frac{dF_i}{d\theta} \right) \right]_p + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{1}{(r')^2} \left(\frac{d^2 F_i}{d\theta^2} \right) - \frac{r''}{(r')^3} \left(\frac{dF_i}{d\theta} \right) \right]_p + \cdots \quad \cdots \cdots (24)$$

点 Q までは r^2 の項まで考慮すればよい。 r のいかにかかわらず $F_1 = F_2$ であるためには、 r の各項の係数がそれぞれ等しいことである。

$$\text{よって, } [F_1]_p = [F_2]_p \quad \cdots \cdots (25)$$

$$[dF_1/d\theta]_p = [dF_2/d\theta]_p \quad \cdots \cdots (26)$$

$$[d^2 F_2/d\theta^2]_p = [d^2 F_2/d\theta^2]_p \quad \cdots \cdots (27)$$

すなわち、式 (25)、(26)、(27) が同時に成立する。式 (25) は式 (21) によって明らかである。また式 (26) より

$$[df_i/d\theta]_p = \left(\frac{1}{\rho'_i} - \frac{1}{\rho''_i} \right) \sin 2(\sigma - \delta_i) + \frac{r'}{3} X_{si}(\sigma) \quad \cdots \cdots (28)$$

式 (22) を代入すれば、つぎの式が成り立つ。

$$X_{s1}(\sigma) = X_{s2}(\sigma) \quad \cdots \cdots (29)$$

全く同様にして式 (27) を計算して、つぎの式を得る。

$$\frac{r'}{2} = \frac{\left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{1}{\rho''_1} \right) \cos 2(\sigma - \delta_1) - \left(\frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho''_2} \right) \cos 2(\sigma - \delta_2)}{Y_{s1}(\sigma) - Y_{s2}(\sigma)} \quad \cdots \cdots (30)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } Y_{si}(\sigma) = & G_i \sin^2(\sigma - \delta_i) \cos(\sigma - \delta_i) \\ & + H_i \sin(\sigma - \delta_i) \{1 - 3 \cos^2(\sigma - \delta_i)\} \\ & + L_i \cos(\sigma - \delta_i) \{1 - 3 \cos^2(\sigma - \delta_i)\} \\ & + M_i \cos^2(\sigma - \delta_i) \sin(\sigma - \delta_i) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (31)$$

式 (30) の $r'/2$ は、接触線は P を通るため、投影曲線の曲率半径を表す。これは微分幾何学的には測地的曲率半径 ρ_g に一致する。

4. 歯すじ方向の測地的振率と法曲率

歯すじの運動を考える場合には運動学的な座標系 P-XYZ を使用する。これは、考察点 P における相対速度の方向を Z 座標とすることは P-xyz 座標系と同じである。すなわち点 P におけるピニオンの速度ベクトルを v_1 、ギヤの速度ベクトルを v_2 とするとき、 $v_2 \times v_1$ の方向を Y 軸に定め、ZX 平面を接平面とする直角座標系 P-XYZ である。ここでは、ZX 平面のことをピッチ平面と名づけ

る。

図-4 はピッチ平面上の歯すじの微小運動を示している。ピニオン、ギヤの歯すじは P 点において接触しているが、微小時間 dt の後には、新しい接触点 P' に移動する。 a_i 軸のピッチ平面への投影直線と w 方向とのなす角を ψ_i とし、ねじれ角を表す。 P' の位置ベクトルを $d\xi$ で表し、 $\widehat{PP'}$ なる弧長を $d\xi$ とする。一方ピニオン、ギヤ歯面上の点 P は、微小回転後、それぞれ P_1, P_2 点に達する。そこで $\widehat{P_1P'} = ds_1$, $\widehat{P_2P'} = ds_2$ とすれば、それらは歯すじ上の P 点の、歯すじにそって移動した、それぞれの歯すじの弧長を表す。以上の関係運動によって、 P' における歯面の単位法線ベクトル n_i はつぎの式で表される。

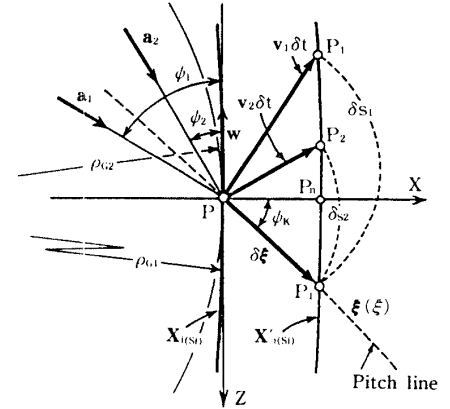


図-4 ピッチ平面上の微小回転運動

$$n_i = n + \omega_i \times n dt + \left[\frac{dn_i}{ds_i} \right]_P ds_i \quad \dots\dots\dots (32)$$

しかるに、 P' 点では両共役歯面は接触するので、共通な法線をもつ必要がある。よって

$$n_1 \times n_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

また $\omega = \omega_1 - \omega_2$ であるから、 P' における相対速度を w' とすれば、

$$w' = w + \omega \times d\xi \quad \dots\dots\dots (34)$$

ベクトル $d\xi$ と X 軸とのなす角を ψ_k で表す。また P' 点では、歯面 x_1, x_2 が接触する。したがって

$$n_i \cdot w' = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

歯すじの方向は dx_i/ds_i であるから、フルネーの公式が応用される。すなわち歯すじの法曲率、測地的振率をそれぞれ $1/\rho_i^*$, $1/\tau_i$ で表せば、つぎの式が成り立つ。

$$\frac{dn_i}{ds_i} = -\frac{1}{\rho_i^*} \frac{dx_i}{ds_i} + \frac{1}{\tau_i} \frac{dx_i}{ds_i} \times n_i \quad \dots\dots\dots (36)$$

図-4 の $\triangle PP_iP'$ を考えれば、

$$d\xi = v_i dt - \frac{w}{w} ds_i \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここに $w = \sqrt{w^2}$ とする。

上記の式 (32) ~ (37) によって計算すれば、つぎの式を得る。

$$\frac{1}{\frac{1}{\rho_1^*} - p} - \frac{1}{\frac{1}{\rho_2^*} - p} = \frac{1}{q} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{\frac{1}{\tau_1}}{\frac{1}{\rho_1^*} - p} - \frac{\frac{1}{\tau_2}}{\frac{1}{\rho_2^*} - p} = \frac{\lambda}{q} \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}}{w^2} \\ q &= \frac{\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_2)}{w_2} \\ \lambda &= \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{w}}{w^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

式 (38), (39) は新しいかみあいの式である。式 (37) から ϕ_k を計算すると,

$$\tan \phi_k = \frac{q(\tan \phi_1 - \tan \phi_2)}{\frac{1}{\rho_i^*} - p} - \tan \phi_i \dots\dots\dots (41)$$

ϕ_k は P 点を通るピッチ線の方角を定める角度である。

5. 歯すじ方向の測地的曲率

歯すじは、歯面上の曲線であるが、歯車軸まわりに回転すればハイポイドギヤのピッチ面になる。そのため、歯すじは歯面とピッチ面の交線である。歯面上の歯すじとして、法曲率、測地的振率について考えると、C 曲線の場合と同様にして計算できる。ただし歯すじ方向は Z 軸であるから、原点 P では $\sigma = 0$ の場合に相当する。上記の条件のもとで、

$$\frac{1}{\rho_i^*} = f_{rr} - 2 \frac{1}{r'} \left(\frac{f_\theta}{r} - f_{r\theta} \right) \dots\dots\dots (42)$$

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{f_\theta}{r^2} - \frac{f_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r'} \left(r f_{rr} - f_r - \frac{f_{\theta\theta}}{r} \right) \dots\dots\dots (43)$$

を得る。

原点 P の近傍では、式 (42), (43) によって、歯すじ (弧長 s_i) にそった微係数を求める。P 点における上記の微係数は、つぎのごとく表される。

$$\frac{d}{ds_i} \left(\frac{1}{\rho_i^*} \right) = - \frac{2}{\rho_{gi}} \left(\frac{1}{\tau_i} \right) + X_i \dots\dots\dots (44)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } X_i &= G_i \sin^3 \delta_i + 3 H_i \sin^2 \delta_i \cos \delta_i \\ &\quad + 3 L_i \sin \delta_i \cos^2 \delta_i + M_i \cos^3 \delta_i \end{aligned} \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{d}{ds_i} \left(\frac{1}{\tau_i} \right) = - \frac{1}{\rho_{gi}} \left(\frac{1}{\rho_i'} - \frac{1}{\rho_i''} \right) \cos 2\delta_i + Y_i \dots\dots\dots (46)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } Y_i &= G_i \sin^2 \delta_i \cos \delta_i - H_i \sin \delta_i (1 - 3 \cos^2 \delta_i) \\ &\quad + L_i \cos \delta_i (1 - 3 \sin^2 \delta_i) - M_i \cos^2 \delta_i \sin \delta_i \end{aligned} \dots\dots\dots (47)$$

式中の ρ_{gi} については、式 (30) の場合と同様に $\rho_{gi} = [r'/2]_P$ を示すが、それぞれの歯面の歯すじ方向の測地的曲率半径を表す。接触線方向とは異なるため ρ_{gi} とし、 $i = 1$ または 2 として区別する。

ρ_{gi} を求めるためには、ピッチ面の測地的曲率半径 ρ_{ci} を必要とする。そのため、まずピッチ面の主曲率半径を計算する。

いまピニオン、ギヤの主曲率半径をそれぞれ (ρ_I', ρ_{II}'') および $(\rho_{II}', \rho_{II}'')$ の組として表

す。ピッチ面の内接円錐を考え、その円錐距離を A_1 、 A_2 とし、ピッチ角を γ 、 Γ として表示する。P-XYZ 座標系で考えると、 $\rho_I'' = -A_1 \tan \gamma$ 、 $\rho_{II}'' = A_2 \tan \Gamma$ がそれぞれのピッチ面の主曲率半径として求められる。

一方ピッチ線のピッチ面に対する法曲率 $1/\rho_n$ は下記の式で求められる¹¹⁾。

$$\frac{1}{\rho_{\kappa}} = \frac{1}{2 \sin (\psi_1 - \psi_2)} \left(\frac{1}{A_1 \tan \gamma} + \frac{1}{A_2 \tan \Gamma} \right) \sin (\psi_1 + \psi_2 + 2\psi_{\kappa}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1 \tan \gamma} - \frac{1}{A_2 \tan \Gamma} \right) \dots\dots\dots (48)$$

オイラーの式を利用すれば,

$$\frac{1}{\rho_{II}'} = \frac{1}{\sin^2(\psi_x + \psi_2)} \left\{ \frac{1}{\rho_x} - \frac{\cos^2(\psi_x + \psi_2)}{A_2 \tan \Gamma} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

歯すじ方向の法曲率半径を ρ_{II} として表せば,

$$\frac{1}{\rho_{II}} = \frac{\cos^2 \phi_2}{\rho_{II'}} + \frac{\sin^2 \phi_2}{A_2 \tan \Gamma} \quad \dots\dots\dots (50)$$

図-5はXY平面に対する投影図であるから、歯すじに関する各種曲率中心は、歯すじ直角断面としての本平面上にある。ピッチ面の歯すじ方向における法曲率中心はY軸上の O_I 、 O_{II} で示す。歯面に対する法曲率中心 N_1 、 N_2 はベクトル n の方向にある。

$\triangle PO_{II}N_2$ において $\angle PO_{II}N_2 = x$ とし、 $\angle PN_2H_2 = \beta$ とする。ここで H_2 は P 点における歯すじの主法線上の曲率中心である。歯すじが歯面とピッチ面の交線であることから、主法線 $\overline{PH_2}$ は $\overline{O_{II}N_2}$ と直交し、 O_{II} 、 N_2 、 H_2 の 3 点は同一直線上にある。 $\triangle PO_{II}N_2$ から

$$\frac{\sin \alpha}{\rho_2^*} = \frac{\sin \beta}{\rho_{II}} \quad \dots\dots\dots (51)$$

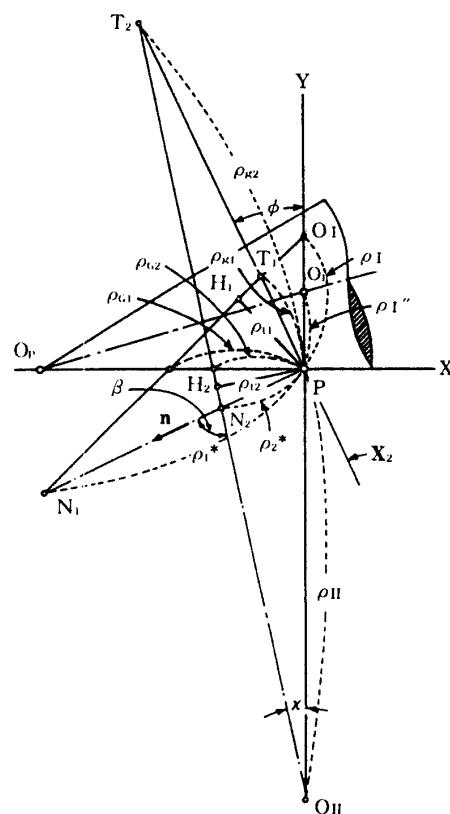
圧力角を ϕ とすれば, $\angle O_{II}PN_2 = \pi/2 - \phi$ であり,
 $\beta = \pi/2 - (\phi - \alpha)$ となることから

$$\frac{1}{\rho_2^*} = \frac{1}{P_{II}}(\cos \phi \cot \chi + \sin \phi) \quad \dots\dots\dots (52)$$

ギヤのピッチ面に関する測地的曲率半径を ρ_{G2} とす

れば、図-5より

$$\rho_{G2} = \rho_{II} \tan \chi \quad \dots\dots\dots (53)$$



図—5 歯すじ直角断面における
各種曲率中心の詳細

式 (52), (53) より κ を消去すると

$$\frac{1}{\rho_{G2}} = \frac{1}{\cos \phi} \left(\frac{1}{\rho_2^*} - \frac{\sin \phi}{\rho_{II}} \right) \quad \dots\dots\dots (54)$$

一方において、歯面に関する歯すじ方向の測地的曲率中心を T_1, T_2 とすれば n に直交する $\overline{PT_2}$ 直線上にある。 $\triangle PO_{II}T_2$ において $\rho_{g2} = -\overline{PT_2}$ であるから、

$$\frac{\sin \kappa}{\rho_{g2}} = -\frac{\sin(\phi - \kappa)}{\rho_{II}} \quad \dots\dots\dots (55)$$

式 (52), (55) より

$$\frac{1}{\rho_{g2}} = -\frac{1}{\cos \phi} \left(\frac{\sin \phi}{\rho_2^*} - \frac{1}{\rho_{II}} \right) \quad \dots\dots\dots (56)$$

ピニオン側についても同様に求め得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_{I'}} &= \frac{1}{\sin^2(\phi_1 + \phi_k)} \left\{ \frac{1}{\rho_k} + \frac{\cos^2(\phi_k + \phi_1)}{\tan \gamma} \right\} \\ \frac{1}{\rho_{G1}} &= \frac{1}{\cos \phi} \left(\frac{1}{\rho_1^*} - \frac{\sin \phi}{\rho_I} \right) \\ \frac{1}{\rho_{g1}} &= \frac{1}{\cos \phi} \left(-\frac{\sin \phi}{\rho_1^*} + \frac{1}{\rho_I} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (57)$$

以上の計算式により、一方の歯面がきまると測地的曲率半径が求められるので、式(44), (46) および式 (29), (30) によって三次の歯面係数が決定される。 ρ_g の値は創成運動によって求められる¹²⁾。

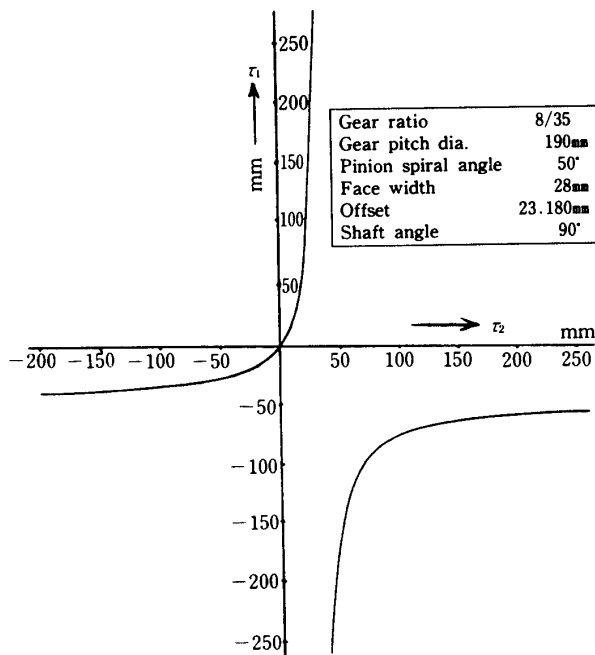


図-6 ピニオン、ギヤの測地的振率半径

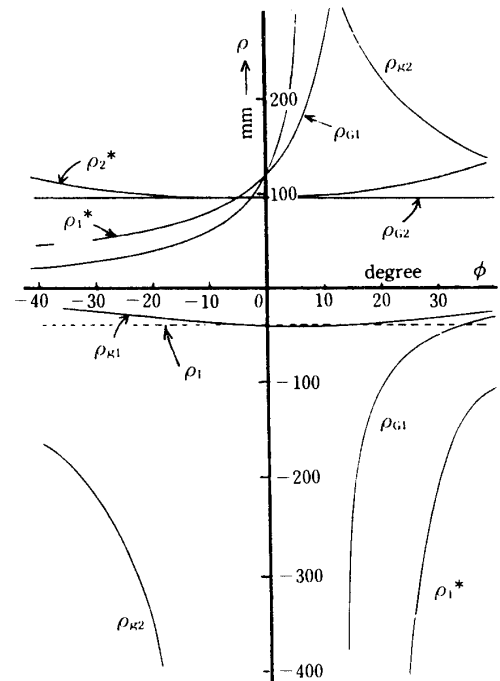


図-7 圧力角中と歯すじ方向の各種曲率半径との関係

図-6 はピニオン、ギヤの測地的振率半径について、自動車用の具体的諸元にもとづいた相互関係を示している。

図-7 は圧力角 ϕ を変えた場合、測地的曲率半径と法曲率の関係を示している。従来の歯切りでは、カッタ半径と歯すじ曲率半径との関係が明確でなかったが、本研究の結果として、圧力角に影響されない測地的曲率半径 ρ_{G2} が見出された。すなわち、歯切り計算は ρ_{G2} をもとに考慮すべきであることが分った。

6. 結 言

自動車用ハイポイドギヤは、現在使用されている歯車の中では、最も性能の高い歯車である。しかし、さらに優れたものにするためには、従来の試行錯誤的な歯当り開発¹³⁾を、電算機による精密なシミュレーション化によって、おきかえる必要がある。

本論文は上記の目標実現のため、まず測地的振率および曲率を基本とする理論的な背景を論じ、必要とされる新しい数式を開発した。すなわち、

- (1) ハイポイドギヤ研究の基礎になる諸元について検討し、明確な定義を加えた。
- (2) 測地的振率の概念を新しく導入し、曲面上の曲線との関係、かみあい条件に対する影響をあきらかにした。
- (3) 各種の測地的曲率半径を求め、それらが三次の歯面係数に与える影響を考察した。
- (4) 歯すじのピッチ面に関する測地的曲率半径が、歯切り計算上の基準になることを示した。

参 考 文 献

- 1) E. Wildhaber, Am. Mach., 90-2~90-8 (1946)
- 2) T.J. Krenzer, R. Knebel, SAE Paper 831266 (1983)
- 3) E. Wildhaber, Am. Mach., Aug. 1 (1946)
- 4) E. Wildhaber, Am. Mach., Feb. 28 (1946)
- 5) M.L. Baxter, Gear Handbook, 1-15, McGraw.
- 6) E. Wildhaber, Am. Mach., June 6 (1946)
- 7) JIS 歯車用語 12104
- 8) E. Wildhaber, Am. Mach., Sept. 27 (1945)
- 9) 窪田忠彦, 微分幾何学, (昭32) 岩波書店
- 10) K. Takahashi, N. Ito, ASME, 108-2, June (1986)
- 11) 高橋, 伊藤, 機論, 49-443 (昭58-7)
- 12) 高橋, 伊藤, 機論, 50-456 c(昭59)
- 13) M.L. Baxter, Ind. Math., 23 (1973)